



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Н. Нестеров, Метод центральных многообразий в задаче асимптотического интегрирования функционально-дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. II, *Модел. и анализ информ. систем*, 2014, том 21, номер 5, 5–37

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.224.67.61

31 октября 2024 г., 16:24:24



УДК 517.929

Метод центральных многообразий в задаче асимптотического интегрирования функционально-дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. II¹

Нестеров П.Н.

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14*

e-mail: nesterov.pn@gmail.com

получена 14 февраля 2014

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, критическое многообразие, асимптотическое интегрирование, метод усреднения, теорема Левинсона

В работе исследуется задача асимптотического интегрирования некоторого класса линейных систем функционально-дифференциальных уравнений в окрестности бесконечности. Изучается вопрос о построении асимптотики решений указанных систем в критическом случае. Во второй части работы установлен факт существования критического многообразия для рассматриваемого класса систем и изучены основные его свойства. Рассмотрена задача построения асимптотики решений редуцированной на критическое многообразие системы. В качестве примера использования предложенного в работе метода асимптотического интегрирования строится асимптотика решений одного скалярного уравнения с запаздыванием.

1. Постановка задачи

Во второй части работы продолжают начатые в [4] исследования вопроса о построении асимптотики при $t \rightarrow \infty$ решений следующей системы функционально-дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = B_0 x_t + G(t, x_t). \quad (1)$$

Здесь $x \in \mathbb{C}^m$, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ ($-h \leq \theta \leq 0$) — элемент пространства $C_h \equiv C([-h, 0], \mathbb{C}^m)$ непрерывных на $[-h, 0]$ функций со значениями в \mathbb{C}^m . Далее, B_0 —

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ № МК-80.2013.1 и проекта 1875 госзадания на НИР №2014/258.

линейный ограниченный оператор, действующий из C_h в \mathbb{C}^m и не зависящий от t , а оператор $G(t, x_t)$ допускает представление в виде

$$G(t, x_t) = B(t, x_t) + R(t, x_t). \quad (2)$$

В этой формуле $B(t, \cdot)$ и $R(t, \cdot)$ — линейные ограниченные операторы, действующие из C_h в \mathbb{C}^m , такие, что при любом фиксированном $\varphi \in C_h$ функции $B(t, \varphi)$ и $R(t, \varphi)$ измеримы по Лебегу при $t \geq t_0$ и, кроме того,

$$|R(t, \varphi)| \leq \gamma(t) \|\varphi\|_{C_h}, \quad \gamma(t) \in L_1[t_0, \infty) \quad \left(\|\varphi\|_{C_h} = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)| \right). \quad (3)$$

Оператор $B(t, \varphi)$ устроен следующим образом:

$$B(t, \varphi) = \sum_{i=1}^n v_i(t) B_i(t, \varphi) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) B_{i_1 i_2}(t, \varphi) + \dots + \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} v_{i_1}(t) \cdot \dots \cdot v_{i_k}(t) B_{i_1 \dots i_k}(t, \varphi). \quad (4)$$

Здесь $B_{i_1 \dots i_k}(t, \cdot)$ — линейные ограниченные операторы, действующие из пространства C_h в пространство \mathbb{C}^m , относительно которых предполагается, что

$$B_{i_1 \dots i_k}(t, \varphi) = \sum_{j=1}^L \Gamma_j^{(i_1 \dots i_k)}(t) \ell_j^{(i_1 \dots i_k)}(\varphi), \quad \varphi \in C_h. \quad (5)$$

В формуле выше $\ell_j^{(i_1 \dots i_k)}(\varphi)$ — линейные ограниченные операторы, не зависящие от t и действующие из C_h в \mathbb{C}^m , а $\Gamma_j^{(i_1 \dots i_k)}(t)$ — матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены, т.е.

$$\Gamma_j^{(i_1 \dots i_k)}(t) = \sum_{s=1}^M \beta_{sj}^{(i_1 \dots i_k)} e^{i\omega_s t}, \quad (6)$$

где $\beta_{sj}^{(i_1 \dots i_k)}$ — постоянные, вообще говоря, комплексные $(m \times m)$ -матрицы, а ω_s — вещественные числа. Наконец, $v_1(t), \dots, v_n(t)$ — скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции такие, что

- 1⁰. $v_1(t) \rightarrow 0, v_2(t) \rightarrow 0, \dots, v_n(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$;
- 2⁰. $\dot{v}_1(t), \dot{v}_2(t), \dots, \dot{v}_n(t) \in L_1[t_0, \infty)$;
- 3⁰. Найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что произведение $v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) \dots v_{i_{k+1}}(t) \in L_1[t_0, \infty)$ для любого набора $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{k+1} \leq n$.

Основное предположение, при котором система (1) рассматривается в данной работе, состоит в следующем. Характеристическое уравнение

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta(\lambda) = \lambda I - B_0(e^{\lambda \cdot} I), \quad (7)$$

построенное для линейной автономной системы

$$\dot{x} = B_0 x_t, \quad (8)$$

имеет N корней $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ на мнимой оси с учетом их кратностей, а вещественные части остальных корней отрицательны. Данное предположение можно записать в виде следующих гипотез \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 . Пусть

$$\Lambda = \{\lambda_i \in \mathbb{C} \mid \det \Delta(\lambda_i) = 0, i = 1, \dots, N\}. \quad (9)$$

Предположим, что:

\mathbf{H}_1 . $\operatorname{Re} \lambda = 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$;

\mathbf{H}_2 . Множество Λ совпадает со множеством

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det \Delta(\lambda) = 0, \operatorname{Re} \lambda > \beta\} \quad (10)$$

для некоторого $\beta < 0$.

Вторая часть работы организована следующим образом. В разделе 2 изложены некоторые результаты из общей теории систем функционально-дифференциальных уравнений, необходимые нам в дальнейшем. Основные теоремы, описывающие свойства так называемого критического многообразия, устанавливаются в разделе 3. В разделе 4 изучается задача асимптотического интегрирования при $t \rightarrow \infty$ системы на критическом многообразии. В этом же разделе развитая в работе техника используется для построения асимптотики решений при $t \rightarrow \infty$ уравнения

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2}x(t-1) + \frac{a \sin \omega t}{t^\rho}x(t), \quad (11)$$

где $a, \omega \in \mathbb{R}/\{0\}$ и $\rho > 0$.

2. Вспомогательные сведения

Излагаемые в данном разделе сведения могут быть найдены, например, в монографии [7] (см. также [14, 16]).

Известно, что линейная автономная система (8) для $t \geq 0$ порождает в C_h сильно непрерывную полугруппу операторов $T(t) : C_h \rightarrow C_h$. Оператор $T(t)$, называемый оператором сдвига вдоль траекторий системы (8), определяется следующим образом: $T(t)\varphi = x_t^\varphi(\theta)$, где $\varphi \in C_h$ и $x_t^\varphi(\theta)$ — решение системы (8) с начальным условием $x_0^\varphi(\theta) = \varphi$. Инфинитезимальный производящий оператор A этой полугруппы задается равенством $A\varphi = \varphi'(\theta)$, где $\varphi \in D(A)$. Область определения оператора A

$$D(A) = \{\varphi \in C_h \mid \varphi'(\theta) \in C_h, \varphi'(0) = B_0\varphi\}$$

плотна в C_h . Имеют место следующие равенства:

$$\frac{d}{dt}T(t)\varphi = T(t)A\varphi = AT(t)\varphi, \quad \varphi \in D(A). \quad (12)$$

В дальнейшем нам удобно будет использовать представление Рисса для оператора B_0 :

$$B_0\varphi = \int_{-h}^0 d\eta(\theta)\varphi(\theta), \quad (13)$$

где $(m \times m)$ -матричная функция $\eta(\theta)$ имеет ограниченную вариацию на $[-h, 0]$.

С системой (8) можно связать так называемую формально сопряженную систему

$$\dot{y} = - \int_{-h}^0 y(t - \theta) d\eta(\theta), \quad (14)$$

где $y(t)$ — комплекснозначная вектор-строка длины m . Фазовым пространством для системы (14) является множество $C'_h \equiv C([0, h], \mathbb{C}^{m*})$, где \mathbb{C}^{m*} — пространство вектор-строк длины m . Для любых $\psi \in C'_h$ и $\varphi \in C_h$ определим билинейную форму

$$(\psi(\xi), \varphi(\theta)) = \psi(0)\varphi(0) - \int_{-h}^0 \int_0^\theta \psi(\xi - \theta) d\eta(\theta) \varphi(\xi) d\xi. \quad (15)$$

Пусть множество Λ определено согласно (9). Тогда пространство C_h можно разложить в прямую сумму двух подпространств

$$C_h = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda. \quad (16)$$

Здесь P_Λ — прямая сумма обобщенных собственных подпространств оператора A , отвечающих собственным значениям из Λ , а Q_Λ — некоторое дополнительное пространство такое, что $T(t)Q_\Lambda \subseteq Q_\Lambda$. Для того чтобы охарактеризовать эти подпространства более точно, определим $(m \times N)$ -матрицу $\Phi(\theta)$, по столбцам которой расположены обобщенные собственные функции $\varphi_1(\theta), \dots, \varphi_N(\theta)$ оператора A , отвечающие собственным числам из Λ . Таким образом, столбцы матрицы $\Phi(\theta)$ образуют базис подпространства P_Λ . Далее, пусть $\Psi(\xi)$ — $(N \times m)$ -матрица, по строкам которой расположены базисные функции $\psi_1(\xi), \dots, \psi_N(\xi)$ прямой суммы обобщенных собственных подпространств P_Λ^T оператора A^* , формально сопряженного к A относительно билинейной формы (15). Матрицы $\Phi(\theta)$ и $\Psi(\xi)$ могут быть выбраны таким образом, что

$$(\Psi(\xi), \Phi(\theta)) = \{(\psi_i(\xi), \varphi_j(\theta))\}_{1 \leq i, j \leq N} = I. \quad (17)$$

Поскольку $\Phi(\theta)$ — базис P_Λ и $AP_\Lambda \subseteq P_\Lambda$, то существует такая $(N \times N)$ -матрица D , спектром которой является множество Λ , что $A\Phi(\theta) = \Phi(\theta)D$. Тогда, учитывая определение оператора A , а также соотношения (12), имеем

$$\Phi(\theta) = \Phi(0)e^{D\theta}, \quad T(t)\Phi(\theta) = \Phi(\theta)e^{Dt} = \Phi(0)e^{D(t+\theta)}, \quad (18)$$

где $-h \leq \theta \leq 0$ и $t \geq 0$. Аналогично для матрицы $\Psi(\xi)$ получаем

$$\Psi(\xi) = e^{-D\xi}\Psi(0), \quad (19)$$

где $0 \leq \xi \leq h$. Возвращаясь теперь к разложению (16), мы можем описать пространства P_Λ и Q_Λ следующим образом:

$$\begin{aligned} P_\Lambda &= \{\varphi \in C_h \mid \varphi(\theta) = \Phi(\theta)a, a \in \mathbb{C}^N\}, \\ Q_\Lambda &= \{\varphi \in C_h \mid (\Psi, \varphi) = 0\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Пусть $x_t(\theta)$ — решение системы (1) при $t \geq t_0$ с начальным условием $x_{t_0} = \varphi$. Имеет место так называемая формула вариации произвольных постоянных (см. [14]):

$$x_t(\theta) = T(t - t_0)\varphi + \int_{t_0}^t dK(t, s)G(s, x_s)ds, \quad t \geq t_0. \quad (21)$$

Здесь $(m \times m)$ -матрица $K(t, \cdot) : [t_0, t] \rightarrow C_h$ задается формулой

$$K(t, s)(\theta) = \int_{t_0}^s X(t + \theta - \alpha)d\alpha, \quad (22)$$

где $X(t)$ — единственное матричное решение системы (8) с начальным условием при $t = 0$ равным

$$X_0(\theta) = \begin{cases} I, & \theta = 0, \\ 0, & -h \leq \theta < 0. \end{cases} \quad (23)$$

Формуле (21) можно придать формальный вид (см. [7])

$$x_t(\theta) = T(t - t_0)\varphi + \int_{t_0}^t T(t - s)X_0(\theta)G(s, x_s)ds, \quad t \geq t_0, \quad (24)$$

где $T(t - s)X_0(\theta) = X(t + \theta - s)$.

Разложим теперь решение $x_t(\theta)$ системы (1) с начальным условием $x_{t_0} = \varphi$, используя представление (16). Тогда с учетом (21) получаем

$$x_t(\theta) = x_t^{P\Lambda} + x_t^{Q\Lambda}, \quad \varphi(\theta) = \varphi^{P\Lambda} + \varphi^{Q\Lambda}, \quad (25)$$

$$x_t^{P\Lambda}(\theta) = T(t - t_0)\varphi^{P\Lambda} + \int_{t_0}^t T(t - s)X_0^{P\Lambda}(\theta)G(s, x_s)ds, \quad (26)$$

$$x_t^{Q\Lambda}(\theta) = T(t - t_0)\varphi^{Q\Lambda} + \int_{t_0}^t d[K(t, s)^{Q\Lambda}]G(s, x_s)ds, \quad (27)$$

где $t \geq t_0$ и

$$X_0^{P\Lambda}(\theta) = \Phi(\theta)\Psi(0), \quad K(t, s)^{Q\Lambda} = K(t, s) - \Phi(\theta)(\Psi, K(t, s)). \quad (28)$$

Осуществляя разложение (25) в формуле (24), заключаем, что справедливы представления, аналогичные (26), (27) с заменой представления (27) на следующее:

$$x_t^{Q\Lambda}(\theta) = T(t - t_0)\varphi^{Q\Lambda} + \int_{t_0}^t T(t - s)X_0^{Q\Lambda}(\theta)G(s, x_s)ds, \quad (29)$$

где $X_0^{Q\Lambda}(\theta) = X_0(\theta) - X_0^{P\Lambda}(\theta)$. Представлением (29), как правило, удобнее пользоваться при вычислениях. При этом для придания необходимой строгости в получаемых подынтегральных выражениях следует заменять члены вида $T(t - s)X_0(\theta)(\dots)ds$ на $dK(t, s)(\theta)(\dots)$. Положим

$$x_t^{P\Lambda}(\theta) = \Phi(\theta)u(t), \quad u(t) \in \mathbb{C}^N, \quad (30)$$

тогда $u(t) = (\Psi, x_t)$ и, кроме того, функция $u(t)$ удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = Du + \Psi(0)G(t, x_t), \quad t \geq t_0 \quad (31)$$

с начальным условием $u(t_0) = (\Psi, \varphi)$.

Пусть выполнены гипотезы $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ и пространство C_h разложено по Λ в прямую сумму (16). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется константа $M = M(\varepsilon)$ такая, что имеют место следующие неравенства:

$$\|T(t)\varphi^{Q_\Lambda}\|_{C_h} \leq Me^{(\beta+\varepsilon)t}\|\varphi^{Q_\Lambda}\|_{C_h}, \quad t \geq 0, \quad \varphi \in C_h, \quad (32)$$

$$\|T(t)X_0^{Q_\Lambda}\|_{C_h} \leq Me^{(\beta+\varepsilon)t}, \quad t \geq 0, \quad (33)$$

$$\left\| \int_{t_0}^t d[K(t, s)^{Q_\Lambda}]G(s, x_s)ds \right\|_{C_h} \leq M \int_{t_0}^t e^{(\beta+\varepsilon)(t-s)}|G(s, x_s)|ds, \quad t \geq t_0. \quad (34)$$

Отметим, что в левой части неравенства (33) функция $T(t)X_0^{Q_\Lambda}$ принадлежит пространству C_h лишь при $t \geq h$. Тем не менее оценка левой части (33) по норме пространства C_h допустима в силу ограниченности функции $T(t)X_0^{Q_\Lambda}(\theta)$ по $\theta \in [-h, 0]$, если $t \in [0, h]$.

3. Критическое многообразие: основные теоремы

В этом разделе будут установлены основные теоремы, касающиеся свойств критических многообразий. Методика доказательств соответствующих утверждений во многом опирается на схему, использованную в [9] при исследовании свойств центральных многообразий в нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Напомним сначала следующее определение (см. [4]).

Определение 1. Будем говорить, что множество (линейное пространство) $\mathcal{W}(t) \subset C_h$ при $t \geq t_* \geq t_0$ является критическим многообразием для системы (1), если выполнены следующие условия:

1. Существует $(m \times N)$ -матрица $H(t, \theta)$ непрерывная по $t \geq t_*$ и $\theta \in [-h, 0]$ такая, что ее столбцы принадлежат пространству Q_Λ при всех $t \geq t_*$ и, кроме того, $\|H(t, \cdot)\|_{C_h} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, где

$$\|H(t, \cdot)\|_{C_h} = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |H(t, \theta)|$$

и $|\cdot|$ — некоторая матричная норма в пространстве $(m \times N)$ -матриц;

2. Множество $\mathcal{W}(t)$ для $t \geq t_*$ задается формулой

$$\mathcal{W}(t) = \left\{ \varphi(\theta) \in C_h \mid \varphi(\theta) = \Phi(\theta)u + H(t, \theta)u, \quad u \in \mathbb{C}^N \right\}, \quad (35)$$

где столбцы $(m \times N)$ -матрицы $\Phi(\theta)$ образуют базис в пространстве P_Λ из (16);

3. Множество $\mathcal{W}(t)$ при $t \geq t_*$ положительно инвариантно относительно траекторий системы (1), т.е. если $x_T \in \mathcal{W}(T)$, $T \geq t_*$, то $x_t \in \mathcal{W}(t)$ для всех $t \geq T$.

Пусть в начальный момент $t = T$ вектор-функция $x_T(\theta)$ принадлежит многообразию $\mathcal{W}(T)$. В силу положительной инвариантности $\mathcal{W}(t)$ имеем

$$x_t(\theta) = \Phi(\theta)u(t) + H(t, \theta)u(t), \quad t \geq T, \quad u(t) \in \mathbb{C}^N. \quad (36)$$

Заметим, что формула (36) представляет собой разложение (25) и, следовательно, функция $u(t)$ в силу (31) удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = \left[D + \Psi(0)G(t, \Phi(\theta) + H(t, \theta)) \right] u, \quad t \geq T. \quad (37)$$

Эту систему назовем проекцией системы (1) на критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ или, короче, системой на критическом многообразии. В [4] показано, что если критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ существует при $t \geq t_*$, то для всех (t, θ) таких, что $t + \theta \geq t_*$, матрица $H(t, \theta)$ удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} \Phi(\theta)\Psi(0)G(t, \Phi(\theta) + H(t, \theta)) + H(t, \theta) \left(D + \Psi(0)G(t, \Phi(\theta) + H(t, \theta)) \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \\ = \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \theta}, & -h \leq \theta < 0, \\ B_0 H + G(t, \Phi(\theta) + H(t, \theta)), & \theta = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (38)$$

Далее нам потребуется следующее вспомогательное утверждение (см., например, [6, Глава XIII], [13, стр. 18–19]).

Утверждение 1. Пусть неотрицательная функция $p(t)$ локально интегрируема на промежутке $[t_*, \infty)$ и при $t \geq t_*$

$$\int_t^{t+1} p(s) ds \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (39)$$

Положим

$$f(t) = \int_{t_*}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|} p(s) ds, \quad \alpha > 0. \quad (40)$$

Тогда $f(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, и, кроме того, если $p(t) \in L_1[t_*, \infty)$, то $f(t) \in L_1[t_*, \infty)$.

Замечание. Если функция $p(t)$ удовлетворяет условию (39), то для функции $f(t)$, заданной формулой (40), при $t \geq t_*$ имеет место неравенство (см., например, оценки в [17, Лемма 2.1])

$$f(t) \leq \frac{2N(t_*)}{1 - e^{-\alpha}}, \quad N(t) = \max_{s \geq t} \int_s^{s+1} p(s) ds. \quad (41)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. При достаточно больших t у системы (1) существует критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$, определяемое формулой (35).

Доказательство. Поскольку столбцы матрицы $H(t, \theta)$ должны принадлежать пространству Q_Λ , то в силу (29) (см. также (27)) и (36) эта матрица удовлетворяет при $t \geq t_*$ интегральному уравнению

$$H(t, \theta)u(t) = T(t - t_*)H(t_*, \theta)u(t_*) + \int_{t_*}^t T(t - s)X_0^{Q_\Lambda}(\theta)G(s, \Phi(\theta) + H(t, \theta))u(s)ds. \quad (42)$$

В (42) вектор-функция $u(t) \in \mathbb{C}^N$ является решением системы (37) с начальным условием при $t = t_*$ равным $u(t_*)$. Пусть $U_H(t, s)$ ($t, s \geq t_*$) — матрица Коши системы (37) ($U_H(s, s) = I$). Тогда, учитывая, что $u(t) = U_H(t, t_*)u(t_*)$, и используя свойства матрицы $U_H(t, s)$, запишем уравнение (42) в операторной форме:

$$H(t, \theta) = \mathcal{A}H(t, \theta), \quad (43)$$

$$\mathcal{A}H(t, \theta) = T(t - t_*)H(t_*, \theta)U_H(t_*, t) + \int_{t_*}^t T(t - s)X_0^{Q_\Lambda}(\theta)G(s, \Phi(\theta) + H(t, \theta))U_H(s, t)ds. \quad (44)$$

Областью определения оператора \mathcal{A} будем считать банахово пространство B непрерывных по $t \geq t_*$ и $\theta \in [-h, 0]$ матриц $H(t, \theta)$ размера $(m \times N)$ с фиксированным начальным условием $H(t_*, \theta)$ таких, что $\|H(t, \cdot)\|_{C_h} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. При этом столбцы матрицы $H(t_*, \theta)$ принадлежат пространству Q_Λ . Норму в этом пространстве введем стандартным образом:

$$\|H\|_B = \sup_{t \geq t_*} \|H(t, \cdot)\|_{C_h}. \quad (45)$$

Покажем далее, что при достаточно больших t_* и достаточно малой величине $\|H(t_*, \cdot)\|_{C_h}$ оператор \mathcal{A} будет сжимающим в некотором шаре $\|H\|_B \leq r_0$ ($r_0 > 0$) пространства B .

Покажем сначала, что оператор \mathcal{A} переводит шар $\|H\|_B \leq r_0$ в себя. Заметим, что из (44) сразу следует, что матрица $\mathcal{A}H$ непрерывна по $t \geq t_*$ и $\theta \in [-h, 0]$. Кроме того, столбцы этой матрицы принадлежат пространству Q_Λ при всех $t \geq t_*$ в силу инвариантности этого пространства относительно оператора сдвига $T(t)$ и вида формулы (44). Таким образом, нам необходимо показать, что $\|\mathcal{A}H\|_B \leq r_0$ и $\|(\mathcal{A}H)(t, \cdot)\|_{C_h} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В дальнейшем нам потребуется оценка для величины $|U_H(s, t)|$, где $s \leq t$. Получить эту оценку можно следующим образом. Сперва заметим, что в силу (2)–(4), для любого $\varphi(\theta) \in C_h$ справедливо неравенство

$$|G(t, \varphi)| \leq p(t)\|\varphi\|_{C_h}, \quad p(t) = w(t) + \gamma(t). \quad (46)$$

Здесь $w(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, $\gamma(t) \in L_1[t_0, \infty)$, и функция $p(t)$, следовательно, обладает свойством (39). Без ограничения общности можно считать, что $p(t) > 0$ для всех $t \geq t_0$. Неравенство (46), очевидно, справедливо и в том случае, если $\varphi(\theta)$ — $(m \times N)$ -матрица (вместо векторной нормы, естественно, необходимо брать матричную норму). В силу свойств матриц Коши, имеем

$$(U_H(s, t))^* = (U_H^*(t, s))^{-1} = U_H^c(t, s), \quad s \leq t, \quad (47)$$

где символ $*$ означает эрмитово сопряжение, а $U_H^c(t, s)$ — матрица Коши сопряженной к (37) системы

$$\dot{u} = \left[-D^* - \left(G(t, \Phi(\theta) + H(t, \theta)) \right)^* \Psi^*(0) \right] u, \quad t \geq t_*. \quad (48)$$

Отсюда,

$$U_H^c(t, s) = e^{-D^*(t-s)} - \int_s^t e^{-D^*(t-\tau)} \left(G(\tau, \Phi(\theta) + H(\tau, \theta)) \right)^* \Psi^*(0) U_H^c(\tau, s) d\tau. \quad (49)$$

В силу гипотезы \mathbf{H}_1 все собственные числа матрица D (а следовательно, и матрицы $(-D^*)$) имеют нулевые вещественные части. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0$ можно подобрать константу $M = M(\varepsilon)$ так, что будет выполнено неравенство

$$|e^{-D^*(t-\tau)}| \leq M e^{\varepsilon(t-\tau)}, \quad t_* \leq \tau \leq t.$$

Учитывая (46), выводим из (49) оценку

$$|U_H^c(t, s)| \leq M e^{\varepsilon(t-s)} + M \int_s^t e^{\varepsilon(t-\tau)} p(\tau) |U_H^c(\tau, s)| d\tau. \quad (50)$$

Здесь и далее все возникающие в оценках константы, если их точный вид нас не интересует, мы будем обозначать одним символом. Домножая обе части неравенства (50) на $e^{-\varepsilon t}$ и применяя лемму Гронуолла–Беллмана, получаем

$$|U_H^c(t, s)| \leq M \exp \left\{ \varepsilon(t-s) + M \int_s^t p(\tau) d\tau \right\}.$$

В силу свойства (39) функции $p(t)$, выбирая t_* достаточно большим, для любого $\varepsilon > 0$ мы можем добиться выполнения неравенства

$$|U_H^c(t, s)| \leq M e^{\varepsilon(t-s)}, \quad t_* \leq s \leq t. \quad (51)$$

Отметим, что константа M в этом неравенстве может быть выбрана одна для всех $H(t, \theta)$ из шара $\|H\|_B \leq r_0$. Из (47) тогда следует, что аналогичное (51) неравенство (возможно, с другой константой M) справедливо и для матрицы Коши $U_H(s, t)$.

Вернемся теперь к равенству (44). Заметим, что в силу гипотезы \mathbf{H}_2 неравенства (32)–(34) справедливы с некоторым показателем экспоненты $-\alpha < 0$. Из (44) тогда следует, что

$$\|(\mathcal{A}H)(t, \cdot)\|_{C_h} \leq M e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)} \|H(t_*, \cdot)\|_{C_h} + M \int_{t_*}^t e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)} p(s) ds, \quad t \geq t_*. \quad (52)$$

Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, что $-\alpha + \varepsilon < 0$. Используя теперь утверждение 1, заключаем, что выражение в правой части неравенства (52) стремится к

нулю при $t \rightarrow \infty$. Кроме того, выбирая t_* достаточно большим и $\|H(t_*, \cdot)\|_{C_h}$ достаточно малой, мы можем добиться того, что $\|\mathcal{A}H\|_B \leq r_0$. Следовательно, оператор \mathcal{A} переводит шар $\|H\|_B \leq r_0$ пространства B в себя.

Покажем далее, что оператор \mathcal{A} является сжимающим в шаре $\|H\|_B \leq r_0$. Пусть $H_1(t, \theta), H_2(t, \theta) \in B$ и $\|H_1\|_B \leq r_0, \|H_2\|_B \leq r_0$. Тогда из (44) следует, что

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{A}H_1)(t, \cdot) - (\mathcal{A}H_2)(t, \cdot)\|_{C_h} &\leq M e^{-\alpha(t-t_*)} \|H_1(t_*, \cdot)\|_{C_h} |U_{H_1}(t_*, t) - U_{H_2}(t_*, t)| + \\ &+ M \int_{t_*}^t e^{-\alpha(t-s)} p(s) |U_{H_1}(s, t) - U_{H_2}(s, t)| ds + \\ &+ M \int_{t_*}^t e^{-\alpha(t-s)} p(s) \|H_1(s, \cdot) - H_2(s, \cdot)\|_{C_h} |U_{H_1}(s, t)| ds + \\ &+ M \int_{t_*}^t e^{-\alpha(t-s)} p(s) \|H_2(s, \cdot)\|_{C_h} |U_{H_1}(s, t) - U_{H_2}(s, t)| ds. \quad (53) \end{aligned}$$

Здесь при выводе оценки (53) мы учли, что $H_1(t_*, \theta) = H_2(t_*, \theta)$, а также предварительно в правой части выражения для $\mathcal{A}H_1 - \mathcal{A}H_2$ мы добавили и вычли величину

$$\int_{t_*}^t T(t-s) X_0^{Q\Lambda}(\theta) G(s, H_2(s, \theta)) U_{H_1}(s, t) ds.$$

Оценим далее величину $|U_{H_1}(s, t) - U_{H_2}(s, t)|$ ($s \leq t$). По тем же соображениям, что были использованы ранее, нам достаточно получить оценку для величины $|U_{H_1}^c(t, s) - U_{H_2}^c(t, s)|$, где $U_{H_1}^c(t, s), U_{H_2}^c(t, s)$ — фундаментальные матрицы сопряженной системы (48) с $H(t, \theta)$ равной $H_1(t, \theta)$ и $H_2(t, \theta)$ соответственно. Из (48) выводим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (U_{H_1}^c(t, s) - U_{H_2}^c(t, s)) &= -D^* (U_{H_1}^c(t, s) - U_{H_2}^c(t, s)) - (G(t, \Phi(\theta)))^* \Psi^*(0) \times \\ &\times (U_{H_1}^c(t, s) - U_{H_2}^c(t, s)) - (G(t, H_1(t, \theta)))^* \Psi^*(0) U_{H_1}^c(t, s) + (G(t, H_2(t, \theta)))^* \Psi^*(0) \times \\ &\times U_{H_2}^c(t, s) = -D^* (U_{H_1}^c(t, s) - U_{H_2}^c(t, s)) - (G(t, \Phi(\theta)))^* \Psi^*(0) (U_{H_1}^c(t, s) - U_{H_2}^c(t, s)) - \\ &- (G(t, H_1(t, \theta) - H_2(t, \theta)))^* \Psi^*(0) U_{H_1}^c(t, s) - (G(t, H_2(t, \theta)))^* \Psi^*(0) (U_{H_1}^c(t, s) - U_{H_2}^c(t, s)). \end{aligned}$$

Таким образом, разность $U_{H_1}^c(t, s) - U_{H_2}^c(t, s)$ удовлетворяет некоторой неоднородной системе, однородная часть которой совпадает с матрицей системы (48), где $H(t, \theta) = H_2(t, \theta)$. Следовательно, в силу формулы вариации постоянных, учитывая равенство $U_{H_1}^c(s, s) - U_{H_2}^c(s, s) = 0$, имеем

$$U_{H_1}^c(t, s) - U_{H_2}^c(t, s) = - \int_s^t U_{H_2}^c(t, \tau) (G(\tau, H_1(\tau, \theta) - H_2(\tau, \theta)))^* \Psi^*(0) U_{H_1}^c(\tau, s) d\tau. \quad (54)$$

Из (54) с учетом (46) и (51) при $t_* \leq s \leq t$ получаем оценку

$$\begin{aligned}
 |U_{H_1}^c(t, s) - U_{H_2}^c(t, s)| &\leq M e^{\varepsilon(t-s)} \int_s^t p(\tau) \|H_1(\tau, \cdot) - H_2(\tau, \cdot)\|_{C_h} d\tau \leq \\
 &\leq M e^{2\varepsilon(t-s)} \|H_1 - H_2\|_B. \quad (55)
 \end{aligned}$$

Здесь мы, разумеется, учли (39). Возвращаясь теперь к неравенству (53) и используя оценку (55) применительно к величине $|U_{H_1}(s, t) - U_{H_2}(s, t)|$ ($t_* \leq s \leq t$), при условии $-\alpha + 2\varepsilon < 0$ устанавливаем неравенство

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{A}H_1 - \mathcal{A}H_2\|_B &\leq M \left\{ \|H_1(t_*, \cdot)\|_{C_h} + \int_{t_*}^t e^{(-\alpha+2\varepsilon)(t-s)} p(s) ds + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_*}^t e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)} p(s) ds \right\} \|H_1 - H_2\|_B. \quad (56)
 \end{aligned}$$

Выбирая теперь t_* достаточно большим, а величину $\|H_1(t_*, \cdot)\|_{C_h}$ достаточно малой, на основании (41) устанавливаем сжимаемость оператора \mathcal{A} в некотором шаре $\|H\|_B \leq r_0$ пространства B . \square

В первой части этой работы (см. [4]) нами была построена $(m \times N)$ -матрица $\hat{H}(t, \theta)$, которая в определенном смысле является приближением для матрицы $H(t, \theta)$, описывающей критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$. Напомним, что

$$\begin{aligned}
 \hat{H}(t, \theta) &= \sum_{i=1}^n v_i(t) H_i(t, \theta) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) H_{i_1 i_2}(t, \theta) + \dots + \\
 &\quad + \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} v_{i_1}(t) \cdot \dots \cdot v_{i_k}(t) H_{i_1 \dots i_k}(t, \theta), \quad (57)
 \end{aligned}$$

где элементы $(m \times N)$ -матриц $H_{i_1 \dots i_k}(t, \theta)$ являются тригонометрическими многочленами переменной t и непрерывно дифференцируемы по $\theta \in [-h, 0]$, а величина $k \in \mathbb{N}$ определена свойством \mathcal{Z}^0 функций $v_1(t), \dots, v_n(t)$. Кроме того, столбцы матриц $H_{i_1 \dots i_k}(t, \theta)$ (а следовательно, и столбцы матрицы $\hat{H}(t, \theta)$) принадлежат пространству Q_Λ при всех $t \in \mathbb{R}$. Показано, что матрица $\hat{H}(t, \theta)$ удовлетворяет системе

$$\begin{aligned}
 \Phi(\theta) \Psi(0) G(t, \Phi(\theta) + \hat{H}(t, \theta)) + \hat{H}(t, \theta) \left(D + \Psi(0) G(t, \Phi(\theta) + \hat{H}(t, \theta)) \right) + \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = \\
 = \begin{cases} \frac{\partial \hat{H}}{\partial \theta} + R_1(t, \theta), & -h \leq \theta < 0, \\ B_0 \hat{H} + G(t, \Phi(\theta) + \hat{H}(t, \theta)) + R_1(t, 0) - R_2(t), & \theta = 0. \end{cases} \quad (58)
 \end{aligned}$$

Здесь матрицы $R_1(t, \theta)$ и $R_2(t)$ таковы, что $\|R_1(t, \cdot)\|_{C_h}, R_2(t) \in L_1[t_0, \infty)$, и матрица $R_2(t)$ — абсолютно интегрируемая на $[t_0, \infty)$ составляющая матрицы $G(t, \Phi(\theta) + \hat{H}(t, \theta))$.

Установим теперь результат, который определяет, в каком именно смысле матрица $\hat{H}(t, \theta)$ приближает матрицу $H(t, \theta)$.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{W}(t)$ — критическое многообразие системы (1), существующее согласно теореме 1 при достаточно больших t . Тогда найдется такое достаточно большое t_* , что при $t \geq t_*$ матрица $H(t, \theta)$ из (35) допускает представление в виде

$$H(t, \theta) = \hat{H}(t, \theta) + Z(t, \theta), \quad t \geq t_* \geq t_0, \quad -h \leq \theta \leq 0. \quad (59)$$

Здесь матрица $\hat{H}(t, \theta)$, определяемая формулой (57), удовлетворяет системе (58), а $(m \times N)$ -матрица $Z(t, \theta)$ такова, что $\|Z(t, \cdot)\|_{C_h} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $\|Z(t, \cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_*, \infty)$.

Доказательство. Представим решение $H(t, \theta)$ операторного уравнения (43) в виде суммы (59), где $\hat{H}(t, \theta)$ — матрица (57), принадлежащая пространству B , и $Z(t, \theta)$ — некоторая матрица из B . Тогда уравнение (43) можно записать относительно неизвестной матрицы $Z(t, \theta)$:

$$Z(t, \theta) = \mathcal{S}Z(t, \theta), \quad (60)$$

$$\mathcal{S}Z(t, \theta) = \mathcal{A}(\hat{H}(t, \theta) + Z(t, \theta)) - \hat{H}(t, \theta), \quad (61)$$

где оператор \mathcal{A} определен формулой (44). Будем рассматривать оператор \mathcal{S} действующим в пространстве BL непрерывных по $t \geq t_*$ и $\theta \in [-h, 0]$ матриц $Z(t, \theta)$ с фиксированным начальным условием $Z(t_*, \theta)$ таких, что $\|Z(t, \cdot)\|_{C_h} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $p(t)\|Z(t, \cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_*, \infty)$. Здесь функция $p(t)$, определяемая формулой (46), удовлетворяет условию (39). Кроме того, столбцы матрицы $Z(t_*, \theta)$ принадлежат пространству Q_Λ . Пространство BL будет банаховым, если ввести в нем норму по правилу

$$\|Z\|_{BL} = \|Z\|_B + \|Z\|_L, \quad \|Z\|_L = \int_{t_*}^{\infty} p(t)\|Z(t, \cdot)\|_{C_h} dt, \quad (62)$$

где норма $\|\cdot\|_B$ определяется формулой (45). Покажем далее, что оператор \mathcal{S} является сжимающим в некотором шаре $\|Z\|_{BL} \leq r_0$ ($r_0 > 0$) пространства BL при условии, что величина $\|Z(t_*, \cdot)\|_{C_h}$ достаточно мала, а t_* — достаточно велико.

Установим сначала, что оператор \mathcal{S} переводит пространство BL в себя. В силу свойств оператора \mathcal{A} и матрицы $\hat{H}(t, \theta)$ сразу заключаем, что матрица $\mathcal{S}Z$ непрерывна по $t \geq t_*$ и $\theta \in [-h, 0]$, и, кроме того, $\|(\mathcal{S}Z)(t, \cdot)\|_{C_h} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Отметим также, что столбцы матрицы $\mathcal{S}Z$ принадлежат пространству Q_Λ при всех $t \geq t_*$ в силу свойств оператора \mathcal{A} и матрицы $\hat{H}(t, \theta)$. Таким образом, нам необходимо показать, что $p(t)\|(\mathcal{S}Z)(t, \cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_*, \infty)$. С этой целью получим для оператора \mathcal{S} несколько иное представление.

Пусть вектор-функция $u(t) \in \mathbb{C}^N$ является решением системы (37), в которой $H(t, \theta)$ есть сумма (59), с начальным условием при $t = t_*$ равным $u(t_*)$. В силу вида матрицы $\hat{H}(t, \theta)$ (см. формулу (57)) и абсолютной непрерывности функций $v_1(t), \dots, v_n(t)$, а также свойств оператора сдвига $T(t)$, заключаем, что вектор-функция $T(t-s)\hat{H}(s, \theta)u(s)$ абсолютно непрерывна по переменной s на промежутке $t_* \leq s \leq t$. Следовательно,

$$\hat{H}(t, \theta)u(t) = T(t-t_*)\hat{H}(t_*, \theta)u(t_*) + \int_{t_*}^t \frac{d}{ds}(T(t-s)\hat{H}(s, \theta)u(s)) ds. \quad (63)$$

Учтем (см. вывод формул (12) в [7, стр. 202]), что для любой функции $\varphi \in C_h$, непрерывно дифференцируемой на отрезке $[-h, 0]$,

$$\begin{aligned} \int_{t_*}^t \frac{d}{ds} (T(t-s)\varphi(\theta)) ds &= - \int_{t_*}^t T(t-s) \begin{cases} \frac{d\varphi}{d\theta}, & -h \leq \theta < 0, \\ B_0\varphi(\theta), & \theta = 0. \end{cases} ds = \\ &= - \int_{t_*}^t T(t-s) \frac{d\varphi}{d\theta} ds + \int_{t_*}^t T(t-s) X_0(\theta) \frac{d\varphi}{d\theta} ds - \int_{t_*}^t T(t-s) X_0(\theta) B_0 \varphi ds. \end{aligned} \quad (64)$$

При этом мы напоминаем, что для придания математической строгости равенству (64) его следует переписать в следующем виде:

$$\int_{t_*}^t \frac{d}{ds} (T(t-s)\varphi(\theta)) ds = - \int_{t_*}^t T(t-s) \frac{d\varphi}{d\theta} ds + \int_{t_*}^t dK(t,s) \frac{d\varphi}{d\theta} - \int_{t_*}^t dK(t,s) B_0 \varphi. \quad (65)$$

Здесь матрица $K(t,s)(\theta)$ определяется формулой (22). Поскольку матрица $\hat{H}(t,\theta)$ абсолютно непрерывна по $t \geq t_0$ и непрерывно дифференцируема по $\theta \in [-h, 0]$, несложно показать, что

$$\begin{aligned} \int_{t_*}^t \frac{d}{ds} (T(t-s)\hat{H}(s,\theta)u(s)) ds &= \int_{t_*}^t T(t-s) \left\{ - \frac{\partial \hat{H}}{\partial \theta} u(s) + X_0(\theta) \frac{\partial \hat{H}}{\partial \theta} u(s) - \right. \\ &\quad \left. - X_0(\theta) B_0 \hat{H} u(s) + \frac{\partial \hat{H}}{\partial s} u(s) + \hat{H}(s,\theta) \frac{du}{ds} \right\} ds = \int_{t_*}^t T(t-s) \left\{ - \frac{\partial \hat{H}}{\partial \theta} + X_0(\theta) \frac{\partial \hat{H}}{\partial \theta} - \right. \\ &\quad \left. - X_0(\theta) B_0 \hat{H} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial s} + \hat{H}(s,\theta) \left(D + \Psi(0)G(s, \Phi(\theta) + \hat{H}(s,\theta) + Z(s,\theta)) \right) \right\} u(s) ds. \end{aligned} \quad (66)$$

Здесь мы, разумеется, учли тот факт, что вектор-функция $u(t)$ является решением системы (37). Повторим, что, аналогично (64), в правой части формулы (66) подынтегральные члены вида $T(t-s)X_0(\theta)(\dots)ds$ должны быть заменены на $dK(t,s)(\theta)(\dots)$. Воспользуемся теперь тем обстоятельством, что матрица $\hat{H}(t,\theta)$ удовлетворяет системе (58), которую можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\Phi(\theta)\Psi(0)G(t, \Phi(\theta) + \hat{H}(t,\theta)) + \hat{H}(t,\theta) \left(D + \Psi(0)G(t, \Phi(\theta) + \hat{H}(t,\theta)) \right) + \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial \hat{H}}{\partial \theta} + R_1(t,\theta) - X_0(\theta) \frac{\partial \hat{H}}{\partial \theta} + X_0(\theta) B_0 \hat{H} + X_0(\theta) G(t, \Phi(\theta) + \hat{H}(t,\theta)) - X_0(\theta) R_2(t). \end{aligned} \quad (67)$$

Учтем (67) в (66) и представим вектор-функцию $u(t)$ в виде $u(t) = U_{\hat{H}+Z}(t, t_*)u(t_*)$, где $U_{\hat{H}+Z}(t, s)$ ($t, s \geq t_*$) — матрица Коши системы (37) ($U(t, t) = I$), в которой $H(t, \theta)$ есть сумма (59). Тогда, вспоминая обозначение $X_0^{Q\Lambda} = X_0(\theta) - \Phi(\theta)\Psi(0)$, из (63) выводим

$$\hat{H}(t, \theta) = T(t-t_*)\hat{H}(t_*, \theta)U_{\hat{H}+Z}(t_*, t) + \int_{t_*}^t T(t-s) \left\{ R_1(s, \theta) + X_0^{Q_\Lambda} G(s, \Phi(\theta) + \hat{H}(s, \theta)) - \right. \\ \left. - X_0(\theta)R_2(s) + \hat{H}(s, \theta)\Psi(0)G(s, Z(s, \theta)) \right\} U_{\hat{H}+Z}(s, t) ds. \quad (68)$$

В силу (59), (44) и (68), из (61) получаем следующее представление для оператора \mathcal{S} :

$$\mathcal{S}Z(t, \theta) = T(t-t_*)Z(t_*, \theta)U_{\hat{H}+Z}(t_*, t) + \int_{t_*}^t T(t-s) \left\{ X_0^{Q_\Lambda} G(s, Z(s, \theta)) - R_1(s, \theta) + \right. \\ \left. + X_0(\theta)R_2(s) - \hat{H}(s, \theta)\Psi(0)G(s, Z(s, \theta)) \right\} U_{\hat{H}+Z}(s, t) ds. \quad (69)$$

Поскольку матрица $R_1(t, \theta)$ непрерывна по $\theta \in [-h, 0]$, то в силу (16) ее можно записать в виде суммы

$$R_1(t, \theta) = R_1^{P_\Lambda}(t, \theta) + R_1^{Q_\Lambda}(t, \theta),$$

где столбцы $(m \times N)$ -матриц $R_1^{P_\Lambda}(t, \theta)$ и $R_1^{Q_\Lambda}(t, \theta)$ принадлежат пространствам P_Λ и Q_Λ соответственно при всех $t \geq t_0$. Заметим также, что $\|R_1^{P_\Lambda}(t, \cdot)\|_{C_h}$ и $\|R_1^{Q_\Lambda}(t, \cdot)\|_{C_h}$ принадлежат классу $L_1[t_0, \infty)$. Далее, из формулы (57), определяющей вид матрицы $\hat{H}(t, \theta)$ и принадлежности столбцов матриц $H_{i_1 \dots i_l}(t, \theta)$ пространству Q_Λ при всех $t \in \mathbb{R}$, следует, что столбцы матриц $\hat{H}(t, \theta)$ и $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t}$ также принадлежат пространству Q_Λ при $t \geq t_0$. Значит, из (58) следует, что $R_1^{P_\Lambda}(t, \theta) = \Phi(\theta)\Psi(0)R_2(t)$, поскольку матрица $R_2(t)$ составлена из абсолютно интегрируемых на $[t_0, \infty)$ элементов матрицы $G(t, \Phi(\theta) + \hat{H}(t, \theta))$. С учетом этого обстоятельства уравнение (69) приобретает следующий вид:

$$\mathcal{S}Z(t, \theta) = T(t-t_*)Z(t_*, \theta)U_{\hat{H}+Z}(t_*, t) + \int_{t_*}^t T(t-s) \left\{ X_0^{Q_\Lambda} G(s, Z(s, \theta)) + X_0^{Q_\Lambda} R_2(s) - \right. \\ \left. - R_1^{Q_\Lambda}(s, \theta) - \hat{H}(s, \theta)\Psi(0)G(s, Z(s, \theta)) \right\} U_{\hat{H}+Z}(s, t) ds. \quad (70)$$

Вновь мы обращаем внимание на то, что для придания правой части выражения (70) необходимой строгости подынтегральные члены вида $T(t-s)X_0^{Q_\Lambda}(\dots)ds$ должны быть заменены на $dK(t, s)^{Q_\Lambda}(\theta)(\dots)$, где матрица $K(t, s)^{Q_\Lambda}$ определяется формулой (28).

Используя теперь оценки (32)-(34), а также неравенство (51) для $U_{\hat{H}+Z}(s, t)$, получаем

$$\|(\mathcal{S}Z)(t, \cdot)\|_{C_h} \leq M e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)} \|Z(t_*, \cdot)\|_{C_h} + M \int_{t_*}^t e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)} p(s) \|Z(s, \cdot)\|_{C_h} ds + \\ + M \int_{t_*}^t e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)} (|R_2(s)| + \|R_1^{Q_\Lambda}(s, \cdot)\|_{C_h}) ds, \quad t \geq t_*. \quad (71)$$

Откуда, меняя порядок интегрирования,

$$\begin{aligned}
 \int_{t_*}^{\infty} p(t) \|(\mathcal{S}Z)(t, \cdot)\|_{C_h} dt &\leq M \|Z(t_*, \cdot)\|_{C_h} \int_{t_*}^{\infty} e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)} p(t) dt + \\
 &+ M \int_{t_*}^{\infty} p(s) \|Z(s, \cdot)\|_{C_h} \int_{t_*}^{\infty} e^{(-\alpha+\varepsilon)|t-s|} p(t) dt ds + \\
 &+ M \int_{t_*}^{\infty} (|R_2(s)| + \|R_1^{Q\Lambda}(s, \cdot)\|_{C_h}) \int_{t_*}^{\infty} e^{(-\alpha+\varepsilon)|t-s|} p(t) dt ds. \quad (72)
 \end{aligned}$$

Учтем теперь утверждение 1, неравенство (41) и тот факт, что функции $\|R_1^{Q\Lambda}(t, \cdot)\|_{C_h}$, $|R_2(t)|$ и $p(t)\|Z(t, \cdot)\|_{C_h}$ ($Z(t, \theta) \in BL$) принадлежат классу $L_1[t_*, \infty)$. Заключаем, что все интегралы в правой части (72) существуют, а следовательно, функция $p(t)\|(\mathcal{S}Z)(t, \cdot)\|_{C_h}$ принадлежит $L_1[t_*, \infty)$ и оператор \mathcal{S} переводит пространство BL в себя.

Заметим, что в силу (49), (50) константа M , фигурирующая в неравенстве (72), может быть выбрана одна для всех матриц $Z(t, \theta)$ из шара $\|Z\|_{BL} \leq r_0$. Тогда из (72) с учетом неравенства (41) выводим, что $\|\mathcal{S}Z\|_L \leq MN(t_*)$ для всех $\|Z\|_{BL} \leq r_0$. Далее в силу (52), (61) для всех $\|Z\|_{BL} \leq r_0$ имеем

$$\|\mathcal{S}Z\|_{BL} = \|\mathcal{A}(\hat{H}(t, \theta) + Z(t, \theta)) - \hat{H}(t, \theta)\|_B + \|\mathcal{S}Z\|_L \leq M(\|\hat{H}\|_B + \|Z(t_*, \cdot)\|_{C_h} + N(t_*)). \quad (73)$$

Поскольку $\|\hat{H}(t, \cdot)\|_{C_h} \rightarrow 0$ и $N(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то, выбирая t_* достаточно большим, а величину $\|Z(t_*, \cdot)\|_{C_h}$ достаточно малой, мы можем добиться выполнения неравенства $\|\mathcal{S}Z\|_{BL} \leq r_0$. Таким образом, оператор \mathcal{S} переводит шар $\|Z\|_{BL} \leq r_0$ пространства BL в себя. Покажем теперь, что оператор \mathcal{S} будет сжимающим в этом шаре при достаточно больших t_* . Из (56), (61) следует, что для любых $Z_1(t, \theta)$, $Z_2(t, \theta)$ из шара $\|Z\|_{BL} \leq r_0$

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{S}Z_1 - \mathcal{S}Z_2\|_{BL} &= \|\mathcal{A}(\hat{H} + Z_1) - \mathcal{A}(\hat{H} + Z_2)\|_B + \|\mathcal{S}Z_1 - \mathcal{S}Z_2\|_L \leq \\
 &\leq q\|Z_1 - Z_2\|_B + \|\mathcal{S}Z_1 - \mathcal{S}Z_2\|_L, \quad 0 \leq q < 1, \quad (74)
 \end{aligned}$$

если величина $\|Z_1(t_*, \cdot)\|_{C_h} = \|Z_2(t_*, \cdot)\|_{C_h}$ достаточно мала, а t_* — достаточно велико. Далее из (70) выводим

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{S}Z_1 - \mathcal{S}Z_2\|_L &\leq M \|Z_1(t_*, \cdot)\|_{C_h} \int_{t_*}^{\infty} e^{-\alpha(t-t_*)} p(t) |U_{H_1}(t_*, t) - U_{H_2}(t_*, t)| dt + \\
 &+ M \int_{t_*}^{\infty} p(t) \int_{t_*}^t e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)} p(s) \|Z_1(s, \cdot) - Z_2(s, \cdot)\|_{C_h} ds dt + \\
 &+ M \int_{t_*}^{\infty} p(t) \int_{t_*}^t e^{-\alpha(t-s)} p(s) \|Z_2(s, \cdot)\|_{C_h} |U_{H_1}(s, t) - U_{H_2}(s, t)| ds dt +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + M \int_{t_*}^{\infty} p(t) \int_{t_*}^t e^{-\alpha(t-s)} (|R_2(s)| + \|R_1^{Q\Lambda}(s, \cdot)\|_{C_h}) |U_{H_1}(s, t) - U_{H_2}(s, t)| ds dt + \\
& + M \int_{t_*}^{\infty} p(t) \int_{t_*}^t e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)} p(s) \|\hat{H}(s, \cdot)\|_{C_h} \|Z_1(s, \cdot) - Z_2(s, \cdot)\|_{C_h} ds dt + \\
& + M \int_{t_*}^{\infty} p(t) \int_{t_*}^t e^{-\alpha(t-s)} p(s) \|\hat{H}(s, \cdot)\|_{C_h} \|Z_2(s, \cdot)\|_{C_h} |U_{H_1}(s, t) - U_{H_2}(s, t)| ds dt, \quad (75)
\end{aligned}$$

где $H_1 = \hat{H} + Z_1$ и $H_2 = \hat{H} + Z_2$. При выводе оценки (75) мы учли, что $Z_1(t_*, \theta) = Z_2(t_*, \theta)$, неравенство (51), а также предварительно в правой части выражения для $\mathcal{S}Z_1 - \mathcal{S}Z_2$ мы добавили и вычли величину

$$\int_{t_*}^t T(t-s) X_0^{Q\Lambda}(\theta) G(s, Z_2(t, \theta)) U_{H_1}(s, t) ds - \int_{t_*}^t T(t-s) \hat{H}(s, \theta) \Psi(0) G(s, Z_2(s, \theta)) U_{H_1}(s, t) ds.$$

Из первого неравенства в (55) при $t_* \leq s \leq t$ для любых $Z_1(t, \theta)$, $Z_2(t, \theta)$ из шара $\|Z\|_{BL} \leq r_0$ вытекает оценка

$$|U_{H_1}(s, t) - U_{H_2}(s, t)| \leq M e^{\varepsilon(t-s)} \|Z_1 - Z_2\|_L, \quad (76)$$

где $H_1 = \hat{H} + Z_1$ и $H_2 = \hat{H} + Z_2$. Меняя в (75) порядок интегрирования и учитывая (41), (76) и неравенства $\|Z_i\|_{BL} \leq r_0$ ($i = 1, 2$), заключаем

$$\|\mathcal{S}Z_1 - \mathcal{S}Z_2\|_L \leq MN(t_*) \|Z_1 - Z_2\|_L \leq q \|Z_1 - Z_2\|_L, \quad 0 \leq q < 1, \quad (77)$$

если t_* достаточно велико. Обращаясь теперь к неравенству (74), устанавливаем сжимаемость оператора \mathcal{S} в шаре $\|Z\|_{BL} \leq r_0$.

Пусть $Z(t, \theta)$ — существующее в силу доказанного выше решение уравнения (60) из пространства BL . Заметим, что поскольку функции $p(t)\|Z(t, \cdot)\|_{C_h}$, $\|R_1^{Q\Lambda}(t, \cdot)\|_{C_h}$ и $|R_2(t)|$ принадлежат классу $L_1[t_*, \infty)$, то в силу утверждения 1 правая часть неравенства (71) есть функция из класса $L_1[t_*, \infty)$. Следовательно, $\|Z(t, \cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_*, \infty)$, и теорема доказана. \square

При построении асимптотики решений системы (37) на критическом многообразии часто необходимо иметь более точную информацию о скорости стремления к нулю функции $\|Z(t, \cdot)\|_{C_h}$ при $t \rightarrow \infty$. В этой связи полезно привести следующий результат, вытекающий из теоремы 2.

Следствие 1. Пусть имеет место оценка

$$\|R_1^{Q\Lambda}(t, \cdot)\|_{C_h} + |R_2(t)| \leq \varphi(t), \quad t \geq t_0, \quad (78)$$

где функция $\varphi(t) > 0$ при $t \geq t_0$ и, кроме того, существует такое $\beta \in (0, \alpha)$, что

$$\varphi(t_1) e^{\beta t_1} \leq \varphi(t_2) e^{\beta t_2}, \quad t_0 \leq t_1 \leq t_2. \quad (79)$$

Тогда решение уравнения (60) при $t \geq t_* \geq t_0$ удовлетворяет неравенству

$$\|Z(t, \cdot)\|_{C_h} \leq K \varphi(t) \quad (80)$$

с некоторой постоянной K .

Доказательство. Из доказательства теоремы 2 следует, что оператор \mathcal{S} переводит некоторый шар $\|Z\|_B \leq r_0$ пространства B в себя и является сжимающим в этом шаре (см. неравенства (73), (74)). Рассмотрим подпространство B' пространства B , состоящее из матриц $Z(t, \theta)$, лежащих в шаре $\|Z\|_B \leq r_0$, для которых имеет место неравенство (80) с некоторой фиксированной константой K . Подпространство B' можно считать банаховым пространством с нормой пространства B . Таким образом, нам необходимо лишь показать, что при некотором выборе константы K оператор \mathcal{S} переводит B' в себя. Пусть $Z(t, \theta) \in B'$, тогда из (71) с учетом (78) следует, что

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{S}Z)(t, \cdot)\|_{C_h} &\leq M e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)} \|Z(t_*, \cdot)\|_{C_h} + KM \int_{t_*}^t e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)} p(s) \varphi(s) ds + \\ &\quad + M \int_{t_*}^t e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)} \varphi(s) ds, \quad t \geq t_*. \end{aligned} \quad (81)$$

Далее, в силу (79) заключаем, что

$$\varphi(s) \leq e^{\beta(t-s)} \varphi(t), \quad t_* \leq s \leq t \quad (82)$$

и, следовательно,

$$\|Z(t_*, \cdot)\|_{C_h} = \frac{\|Z(t_*, \cdot)\|_{C_h}}{\varphi(t_*)} \varphi(t_*) \leq \frac{\|Z(t_*, \cdot)\|_{C_h}}{\varphi(t_*)} e^{\beta(t-t_*)} \varphi(t), \quad t \geq t_*. \quad (83)$$

Учитывая (82), (83) в (81), получаем

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{S}Z)(t, \cdot)\|_{C_h} &\leq M \left(e^{(-\alpha+\beta+\varepsilon)(t-t_*)} \frac{\|Z(t_*, \cdot)\|_{C_h}}{\varphi(t_*)} + K \int_{t_*}^t e^{(-\alpha+\beta+\varepsilon)(t-s)} p(s) ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_*}^t e^{(-\alpha+\beta+\varepsilon)(t-s)} ds \right) \varphi(t), \quad t \geq t_*. \end{aligned} \quad (84)$$

Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, что $-\alpha + \beta + \varepsilon < 0$. Используя неравенство (41), окончательно получаем

$$\|(\mathcal{S}Z)(t, \cdot)\|_{C_h} \leq M \left(\frac{\|Z(t_*, \cdot)\|_{C_h}}{\varphi(t_*)} + \frac{2KN(t_*)}{1 - e^{-\alpha+\beta+\varepsilon}} + \frac{1}{\alpha - \beta - \varepsilon} \right) \varphi(t), \quad t \geq t_*. \quad (85)$$

Из (85) следует, что можно подобрать такую константу K и выбрать t_* достаточно большим, а величину $\|Z(t_*, \cdot)\|_{C_h}$ достаточно малой, так, чтобы при $t \geq t_*$ было выполнено неравенство $\|(\mathcal{S}Z)(t, \cdot)\|_{C_h} \leq K \varphi(t)$. \square

Следствие 2. Пусть имеет место оценка

$$\|R_1^{Q\Lambda}(t, \cdot)\|_{C_h} + |R_2(t)| \leq K e^{-\beta t}, \quad t \geq t_0, \quad (86)$$

где $\beta > \alpha$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, \alpha)$ найдется такая константа $M(\varepsilon) > 0$, что решение уравнения (60) при $t \geq t_* \geq t_0$ удовлетворяет неравенству

$$\|Z(t, \cdot)\|_{C_h} \leq M e^{(-\alpha+\varepsilon)t}. \quad (87)$$

Замечание. Из (2), (3), (57), (58) и условий 1^0-3^0 , накладываемых на функции $v_1(t), \dots, v_n(t)$, следует, что функция $\|R_1^{Q\Lambda}(t, \cdot)\|_{C_h} + |R_2(t)|$ есть величина порядка

$$O\left(\sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{k+1} \leq n} |v_{i_1}(t) \cdot \dots \cdot v_{i_{k+1}}(t)|\right) + O\left(\sum_{i=1}^n |\dot{v}_i(t)|\right) + O(\gamma(t)). \quad (88)$$

Установим теперь свойство глобального притяжения многообразия $\mathcal{W}(t)$.

Теорема 3. Пусть $x(t)$ — решение системы (1), определенное при $t \geq T \geq t_0$. Тогда найдется такое достаточно большое $t_* \geq T$, что при $t \geq t_*$ имеет место следующее асимптотическое представление:

$$x_t(\theta) = \Phi(\theta)u_H(t) + H(t, \theta)u_H(t) + O(e^{(-\alpha+\varepsilon)t}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (89)$$

Здесь величина $\alpha > 0$ выбрана так, что выполнены неравенства (32)–(34) с показателем экспоненты, равным $(-\alpha)$, $\varepsilon \in (0, \alpha)$ — произвольно и $u_H(t)$ ($t \geq t_*$) — некоторое решение системы на критическом многообразии (37).

Доказательство. В силу (25), (30) для решения $x_t(\theta)$ имеем

$$x_t(\theta) = \Phi(\theta)u(t) + x_t^{Q\Lambda}(\theta), \quad t \geq t_*, \quad (90)$$

где $x_t^{Q\Lambda}(\theta)$ определяется формулой (27) (см. также (29)) с $t_0 = t_*$, а функция $u(t)$ является решением системы (31) с начальным условием $u(t_*) = (\Psi(\xi), x_{t_*}(\theta))$. Далее, пусть $\mathcal{W}(t)$ — критическое многообразие для системы (1), существующее в силу теоремы 1 при $t \geq t_*$, где t_* достаточно велико. Напомним, что это многообразие определяется формулой (35). Положим $u_H(t_*) = u(t_*)$, тогда

$$\tilde{x}_t(\theta) = \Phi(\theta)u_H(t) + H(t, \theta)u_H(t) \quad (91)$$

представляет собой некоторое решение системы (1), лежащее при $t \geq t_*$ на многообразии $\mathcal{W}(t)$. Покажем, что $x_t(\theta) = \tilde{x}_t(\theta) + O(e^{(-\alpha+\varepsilon)t})$. Полагая $z(t, \theta) = x_t^{Q\Lambda}(\theta) - H(t, \theta)u_H(t)$, $r(t) = u(t) - u_H(t)$ и вычитая (91) из (90), получаем

$$x_t(\theta) - \tilde{x}_t(\theta) = \Phi(\theta)r(t) + z(t, \theta), \quad t \geq t_*. \quad (92)$$

Замечая, что вектор функция $H(t, \theta)u_H(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (42) и вычитая (42) из (29) (с $t_0 = t_*$), с учетом (90) получаем следующее уравнение для нахождения $z(t, \theta)$:

$$z(t, \theta) = T(t - t_*)z(t_*, \theta) + \int_{t_*}^t T(t - s)X_0^{Q\Lambda}G(s, \Phi(\theta)r(s) + z(s, \theta))ds, \quad t \geq t_*. \quad (93)$$

Отметим, что мы можем считать величину $\|z(t_*, \cdot)\|_{C_h}$ настолько малой, насколько нам это потребуется. Действительно, мы всегда можем от решения $x_t(\theta)$ в силу линейности системы (1) перейти к рассмотрению решения $\delta x_t(\theta)/\|x_{t_*}(\theta)\|_{C_h}$ с начальной функцией при $t = t_*$ равной $\varphi(\theta)$ и нормой $\|\varphi(\theta)\|_{C_h} = \delta$ для любого наперед заданного $\delta > 0$.

Далее, вычитая (37) (где $u(t) = u_H(t)$) из (31) и учитывая (90), заключаем, что вектор-функция $r(t)$ является решением следующей задачи Коши:

$$\dot{r} = Dr(t) + \Psi(0)G(t, \Phi(\theta)r(t) + z(t, \theta)), \quad r(t_*) = 0. \quad (94)$$

Представим матрицу D , имеющую жорданову форму

$$D = \text{diag}(D^{(1)}, \dots, D^{(l)}), \quad D^{(i)} = \begin{pmatrix} \lambda^{(i)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^{(i)} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda^{(i)} & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (95)$$

где $\lambda^{(i)} \in \Lambda$, $D^{(i)}$ — $(N_i \times N_i)$ -матрица и $N_1 + \dots + N_l = N$, в виде суммы

$$D = D_1 + D_2, \quad D_1 = \text{diag } D \quad (96)$$

и D_2 — нильпотентная матрица. Заметим, что всегда можно считать, что $|D_2| < \delta$ для любого наперед заданного $\delta > 0$. Действительно, в системе (94) можно осуществить замену с постоянной матрицей $r = C_\delta \tilde{r}$, где матрица C_δ приводит матрицу $\delta^{-1}D$ к жордановой форме. Тогда эта замена оставляет матрицу D_1 без изменения, а у матрицы D_2 могут быть отличными от нуля лишь элементы $d_{i,i+1} = \delta$. Переходя от (94) к соответствующему интегральному уравнению, получаем

$$r(t) = \int_{t_*}^t e^{D_1(t-s)} [D_2 r(s) + \Psi(0)G(s, \Phi(\theta)r(s) + z(s, \theta))] ds. \quad (97)$$

Рассмотрим пространство B_1 , элементами которого являются пары $(z(t, \theta), r(t))$. Вектор-функция $z(t, \theta)$ непрерывна по переменным $\theta \in [-h, 0]$ и $t \geq t_*$, а вектор-функция $r(t)$ непрерывна по $t \geq t_*$. Считаем, что функция $z(t_*, \theta)$ фиксирована и принадлежит пространству Q_Λ . Кроме того, имеют место следующие неравенства:

$$\|z(t, \cdot)\|_{C_h} \leq K e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}, \quad |r(t)| \leq K e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}, \quad t \geq t_*, \quad (98)$$

с некоторой константой $K > 0$ и выбранной произвольным образом величиной $\varepsilon \in (0, \alpha)$. Пространство B_1 становится банаховым, если ввести в нем норму по правилу

$$\|(z(t, \theta), r(t))\|_{B_1} = \sup_{t \geq t_*} (e^{(\alpha-\varepsilon)(t-t_*)} (\|z(t, \cdot)\|_{C_h} + |r(t)|)).$$

Заметим, что если система (93), (97) имеет решение $(z(t, \theta), r(t)) \in B_1$, то уравнение (97) и можно записать в следующей эквивалентной форме. Устремим в этом уравнении переменную t к бесконечности, учтем правое из неравенств (98), а также тот

факт, что в силу гипотезы \mathbf{H}_1 все собственные числа матрицы D_1 имеют нулевые вещественные части. Получим

$$\int_{t_*}^{\infty} e^{-D_1 s} [D_2 r(s) + \Psi(0)G(s, \Phi(\theta)r(s) + z(s, \theta))] ds = 0.$$

Используя это соотношение в (97), переписываем последнее в следующем виде:

$$r(t) = - \int_t^{\infty} e^{D_1(t-s)} [D_2 r(s) + \Psi(0)G(s, \Phi(\theta)r(s) + z(s, \theta))] ds, \quad t \geq t_*. \quad (99)$$

Систему уравнений (93), (99) запишем в виде операторного уравнения в пространстве B_1 :

$$(z(t, \theta), r(t)) = \mathcal{L}(z(t, \theta), r(t)) = (\mathcal{L}_1(z(t, \theta), r(t)), \mathcal{L}_2(z(t, \theta), r(t))), \quad (100)$$

где операторы \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 определяются правыми частями уравнений (93) и (99) соответственно. Покажем, что оператор \mathcal{L} будет сжимающим в пространстве B_1 , если величина $\|z(t_*, \cdot)\|$ достаточно мала и t_* достаточно велико.

Сначала установим, что оператор \mathcal{L} переводит пространство B_1 в себя. Пусть $(z, r) \in B_1$, тогда из (93) с учетом (41) следует, что

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{L}_1(z, r))(t, \cdot)\|_{C_h} &\leq M e^{-\alpha(t-t_*)} \|z(t_*, \cdot)\|_{C_h} + MK e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)} \int_{t_*}^t e^{-\varepsilon(t-s)} p(s) ds \leq \\ &\leq M \left(\|z(t_*, \cdot)\|_{C_h} + \frac{2KN(t_*)}{1 - e^{-\varepsilon}} \right) e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}, \quad t \geq t_*. \end{aligned} \quad (101)$$

Выбирая теперь $\|z(t_*, \cdot)\|_{C_h}$ достаточно малой и t_* достаточно большим, можно добиться того, что для функции $\mathcal{L}_1(z, r)$ будет выполнено левое из неравенств (98). Замечая, что $|e^{D_1(t-s)}| \leq C$ для некоторой константы C (она зависит только от используемой матричной нормы) и $|D_2| < \delta$, из (99) выводим

$$\begin{aligned} |(\mathcal{L}_2(z, r))(t)| &\leq \frac{CK\delta}{\alpha - \varepsilon} e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)} + MK \int_t^{\infty} e^{(-\alpha+\varepsilon)(s-t_*)} p(s) ds \leq \\ &\leq K \left(\frac{C\delta}{\alpha - \varepsilon} + M\hat{\varepsilon} + M \int_t^{\infty} \gamma(s) ds \right) e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}, \quad t \geq t_*, \end{aligned} \quad (102)$$

где величина M зависит, вообще говоря, от δ . Здесь мы учли формулу (46), определяющую вид функции $p(t)$, а также то обстоятельство, что $w(t) < \hat{\varepsilon}$ для любого наперед заданного $\hat{\varepsilon} > 0$, если t_* достаточно велико. Используя теперь тот факт, что $\gamma(t) \in L_1[t_0, \infty)$, произвольность величин δ , $\hat{\varepsilon}$ и выбирая t_* достаточно большим, устанавливаем справедливость правого из неравенств (98) для функции $\mathcal{L}_2(z, r)$.

Установим теперь сжимаемость оператора \mathcal{L} . Пусть (z_1, r_1) и (z_2, r_2) принадлежат пространству B_1 , тогда

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{L}(z_1, r_1) - \mathcal{L}(z_2, r_2)\|_{B_1} &= \sup_{t \geq t_*} \left\{ e^{(\alpha-\varepsilon)(t-t_*)} \left(\|(\mathcal{L}_1(z_1, r_1) - \mathcal{L}_1(z_2, r_2))(t, \cdot)\|_{C_h} + \right. \right. \\
 &+ \|(\mathcal{L}_2(z_1, r_1) - \mathcal{L}_2(z_2, r_2))(t)\| \left. \right\} \leq M \sup_{t \geq t_*} \int_{t_*}^t e^{-\varepsilon(t-s)} p(s) e^{(\alpha-\varepsilon)(s-t_*)} \{ |r_1(s) - r_2(s)| + \\
 &+ \|z_1(s, \cdot) - z_2(s, \cdot)\|_{C_h} \} ds + \sup_{t \geq t_*} \left\{ C \delta e^{(\alpha-\varepsilon)t} \int_t^\infty e^{(-\alpha+\varepsilon)s} e^{(\alpha-\varepsilon)(s-t_*)} |r_1(s) - r_2(s)| ds + \right. \\
 &+ M e^{(\alpha-\varepsilon)t} \int_t^\infty e^{(-\alpha+\varepsilon)s} p(s) e^{(\alpha-\varepsilon)(s-t_*)} (|r_1(s) - r_2(s)| + \|z_1(s, \cdot) - z_2(s, \cdot)\|_{C_h}) ds \left. \right\} \leq \\
 &\leq \left\{ \frac{2MN(t_*)}{1 - e^{-\varepsilon}} + \frac{C\delta}{\alpha - \varepsilon} + M\hat{\varepsilon} + M \int_{t_*}^\infty \gamma(s) ds \right\} \|(z_1, r_1) - (z_2, r_2)\|_{B_1}. \quad (103)
 \end{aligned}$$

Выбирая теперь t_* достаточно большим, а величины $\delta, \hat{\varepsilon}$ достаточно малыми, устанавливаем сжимаемость оператора \mathcal{L} в пространстве B_1 . Следовательно, уравнение (100) имеет единственное решение в пространстве B_1 .

Обращаясь теперь к равенству (92), завершаем доказательство теоремы. \square

Пусть $u^{(1)}(t), \dots, u^{(N)}(t)$ — фундаментальные решения системы на критическом многообразии (37), а $x(t)$ — произвольное решение системы (1), определенное при $t \geq T$. Тогда в силу теоремы 4 имеет место следующее асимптотическое представление:

$$x(t) = x_t(0) = \sum_{i=1}^N c_i (\Phi(0) + H(t, 0)) u^{(i)}(t) + O(e^{-\beta t}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (104)$$

где c_1, \dots, c_N — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — некоторое действительное число.

4. Асимптотическое интегрирование системы на критическом многообразии

Система (37), описывающая динамику исходной системы (1) на критическом многообразии $\mathcal{W}(t)$, относится к классу так называемых систем с колебательно убывающими коэффициентами. Метод асимптотического интегрирования систем такого типа предложен в работе [5]. Система (37) в силу (57), (59) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \dot{u} = \left[D + \sum_{i=1}^n v_i(t) A_i(t) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) A_{i_1 i_2}(t) + \dots + \right. \\
 \left. + \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} v_{i_1}(t) \cdot \dots \cdot v_{i_k}(t) A_{i_1 \dots i_k}(t) + W(t) \right] u, \quad u \in \mathbb{C}^N. \quad (105)
 \end{aligned}$$

В этой системе матрица D определяется формулой (95), $(N \times N)$ -матрицы $A_{i_1 \dots i_k}(t)$ — это матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены, т.е.

матрицы вида (6), а матрица $W(t)$ — это некоторая матрица из класса $L_1[t_*, \infty)$. Без ограничения общности можно считать, что матрица D в системе (105) — это матрица D_2 , отличными от нуля элементами которой могут быть лишь элементы $d_{i,i+1} = 1$ при некоторых $i \in \mathbb{N}$. Действительно, матрицу D можно представить в виде суммы (96), где в силу гипотезы \mathbf{H}_1 все собственные числа диагональной матрицы D_1 имеют нулевые вещественные части. В системе (105) можно предварительно сделать замену $u = e^{D_1 t} \hat{u}$, которая не меняет свойств матриц $A_{i_1 \dots i_l}(t)$ и $W(t)$, а на месте матрицы D в преобразованной системе будет стоять матрица D_2 .

Таким образом, в дальнейшем будем считать, что единственным собственным числом жордановой матрицы D в системе (105) является ноль. Построение асимптотики решений этой системы при $t \rightarrow \infty$ усложняет то обстоятельство, что ее коэффициенты имеют колебательный вид. Поэтому на первом этапе построения асимптотических формул в системе (105) осуществляется так называемая усредняющая замена, которая позволяет избавиться от осциллирующих величин в главной части системы. Имеет место следующая теорема (см. [5]).

Теорема 4. Система (105) при достаточно больших t заменой

$$u = \left[I + \sum_{i=1}^n Y_i(t) v_i(t) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} Y_{i_1 i_2}(t) v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) + \dots + \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} Y_{i_1 \dots i_k}(t) v_{i_1}(t) \cdot \dots \cdot v_{i_k}(t) \right] u_1 \quad (106)$$

приводится к виду

$$\dot{u}_1 = \left[D + \sum_{i=1}^n A_i v_i(t) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} A_{i_1 i_2} v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) + \dots + \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} A_{i_1 \dots i_k} v_{i_1}(t) \cdot \dots \cdot v_{i_k}(t) + W_1(t) \right] u_1(t) \quad (107)$$

с постоянными матрицами $A_{i_1 \dots i_l}$ и матрицей $W_1(t)$ из класса $L_1[t_*, \infty)$. В замене (106) I — единичная матрица, а элементами матриц $Y_{i_1 \dots i_l}(t)$ являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением.

Как правило, для построения асимптотики решений системы (107) достаточно вычислить лишь несколько первых постоянных матриц. По этой причине приведем здесь для них явные формулы. Имеем

$$A_i = M[A_i(t)], \quad i = 1, \dots, n. \quad \left(M[F(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(s) ds \right). \quad (108)$$

Далее,

$$A_{ij} = M[A_{ij}(t) + A_i(t)Y_j(t) + A_j(t)Y_i(t)], \quad 1 \leq i < j \leq n$$

и

$$A_{ii} = M[A_{ii}(t) + A_i(t)Y_i(t)], \quad i = 1, \dots, n. \quad (109)$$

Матрицы $Y_i(t)$ с нулевым средним значением определяются как решения матричных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{Y}_i - DY_i + Y_i D = A_i(t) - A_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (110)$$

Дальнейшее преобразование усредненной системы (107) во многом определяется структурой матрицы D . Рассмотрим подробно лишь случай, когда матрица D в системах (105) и (107) является нулевой. Предположим, что в главной части системы (107) можно выделить так называемый ведущий член, и этим членом является матрица $A_{i_1 \dots i_s} v_{i_1}(t) \cdot \dots \cdot v_{i_s}(t)$. Это означает, что систему (107) можно записать в виде

$$\dot{u}_1 = [A_{i_1 \dots i_s} + V(t)] v_{i_1}(t) \cdot \dots \cdot v_{i_s}(t) u_1 + W_1(t) u_1, \quad (111)$$

где матрица $V(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $\dot{V}(t) \in L_1[t_*, \infty)$. Справедлива следующая лемма (см., например, [1, 3, 13]).

Лемма 1 (о диагонализации переменной матрицы). Пусть все собственные числа матрицы $A_{i_1 \dots i_s}$ различны, а матрица $V(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $\dot{V}(t) \in L_1[t_*, \infty)$. Тогда при достаточно больших t существует невырожденная матрица $C(t)$ такая, что:

- (i) по столбцам этой матрицы расположены собственные векторы матрицы $A_{i_1 \dots i_s} + V(t)$ и $C(t) \rightarrow C_0$ при $t \rightarrow \infty$. Постоянная матрица C_0 составлена из собственных векторов матрицы $A_{i_1 \dots i_s}$;
- (ii) $\dot{C}(t) \in L_1[t_*, \infty)$;
- (iii) она приводит матрицу $A_{i_1 \dots i_s} + V(t)$ к диагональному виду, т.е.

$$C^{-1}(t)[A_{i_1 \dots i_s} + V(t)]C(t) = \hat{\Lambda}(t),$$

где $\hat{\Lambda}(t) = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1(t), \dots, \tilde{\lambda}_N(t))$ и $\tilde{\lambda}_j(t)$ ($j = 1, \dots, N$) — собственные числа матрицы $A_{i_1 \dots i_s} + V(t)$.

В системе (107) осуществим замену

$$u_1(t) = C(t)u_2(t), \quad (112)$$

где $C(t)$ — матрица из леммы 1. Эта замена приводит систему (107) к так называемому L -диагональному виду:

$$\dot{u}_2 = [\Lambda(t) + W_2(t)]u_2, \quad (113)$$

где $\Lambda(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t))$, $\lambda_j(t) = \tilde{\lambda}_j(t)v_{i_1}(t) \cdot \dots \cdot v_{i_s}(t)$ ($j = 1, \dots, N$) и

$$W_2(t) = -C^{-1}(t)\dot{C}(t) + C^{-1}(t)W_1(t)C(t).$$

В силу свойств (i) и (ii) матрицы $C(t)$ матрица $W_2(t)$ принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$.

Для построения асимптотики фундаментальной матрицы L -диагональной системы (113) при $t \rightarrow \infty$ может быть использована известная асимптотическая теорема

Н. Левинсона. Предположим, что для элементов матрицы $\Lambda(t)$ выполнено следующее условие, называемое условием дихотомии: для каждой пары индексов (i, j) имеет место либо неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re}(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)) ds \leq K_1, \quad t_2 \geq t_1 \geq t_*, \quad (114)$$

либо неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re}(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)) ds \geq K_2, \quad t_2 \geq t_1 \geq t_*, \quad (115)$$

где K_1, K_2 — некоторые постоянные. Справедлива следующая теорема (см., например, [3, 13]).

Теорема 5 (Levinson). Пусть выполнено условие дихотомии (114), (115). Тогда фундаментальная матрица L -диагональной системы (113) допускает следующее асимптотическое представление при $t \rightarrow \infty$:

$$U(t) = (I + o(1)) \exp \left\{ \int_{t^*}^t \Lambda(s) ds \right\}. \quad (116)$$

В том случае, когда матрица D в системе (107) является ненулевой жордановой матрицей, а также когда жордановой является матрица $A_{i_1 \dots i_s}$ в системе (111), общего алгоритма построения асимптотики указать нельзя. В этой ситуации на вид асимптотических формул в главном существенное влияние могут оказывать элементы матрицы $W_1(t)$, принадлежащей классу $L_1[t_*, \infty)$. В этой работе мы не будем приводить соответствующие результаты, ограничившись лишь некоторыми ссылками (см., например, [10–13]).

Пример. Рассмотрим задачу построения асимптотических формул для решений уравнения (11) при $t \rightarrow \infty$. Известно (см., например, [7]), что характеристический полином для соответствующего предельного уравнения (8)

$$p(\lambda) = \lambda + \frac{\pi}{2} e^{-\lambda}$$

имеет чисто мнимые корни $\lambda_{1,2} = \pm i\pi/2$, а вещественные части всех остальных корней этого уравнения — отрицательны. Таким образом, мы находимся в условиях применимости описанного выше метода. Несложные вычисления показывают, что (1×2) -матрица $\Phi(\theta)$ и (2×1) -матрица $\Psi(\xi)$, удовлетворяющие условию нормировки (17), могут быть выбраны следующим образом:

$$\Phi(\theta) = (e^{i\frac{\pi}{2}\theta}, e^{-i\frac{\pi}{2}\theta}), \quad -1 \leq \theta \leq 0, \quad \Psi(\xi) = \frac{4}{4 + \pi^2} \begin{pmatrix} (1 - i\frac{\pi}{2})e^{-i\frac{\pi}{2}\xi} \\ (1 + i\frac{\pi}{2})e^{i\frac{\pi}{2}\xi} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \xi \leq 1.$$

Далее, поскольку $G(t, \varphi) = at^{-\rho} \sin \omega t \varphi(0)$, то система на критическом многообразии (37) имеет вид

$$\dot{u} = \left[D + t^{-\rho} B_1(t) + W(t) \right] u, \quad t \geq t_*, \quad (117)$$

где

$$D = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}, \quad B_1(t) = -\frac{2a\mathbf{i}}{4 + \pi^2} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \begin{pmatrix} 1 - \mathbf{i}\frac{\pi}{2} & 1 - \mathbf{i}\frac{\pi}{2} \\ 1 + \mathbf{i}\frac{\pi}{2} & 1 + \mathbf{i}\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \quad (118)$$

и $W(t) = \Psi(0)G(t, H(t, \theta))$. Заметим, что в силу представления (57), вида оператора $G(t, \varphi)$, а также теоремы 2, следствия 1 и замечания к этой теореме, следует, что $W(t) = O(t^{-2\rho})$. Рассмотрим далее следующие случаи.

Если

$$\rho > 1,$$

то система (117) имеет L -диагональную форму (113). Из теоремы 5 тогда следует, что фундаментальные решения системы (117) имеют следующую асимптотику при $t \rightarrow \infty$:

$$u^{(j)}(t) = (e_j + o(1))e^{\pm i\frac{\pi}{2}t}, \quad j = 1, 2, \quad (119)$$

где e_j — векторы канонического базиса в \mathbb{R}^2 . Тогда в силу (104) и свойств матрицы $H(t, \theta)$ все решения уравнения (11) при $t \rightarrow \infty$ имеют следующее асимптотическое представление:

$$x(t) = c_1(1 + o(1))e^{i\frac{\pi}{2}t} + c_2(1 + o(1))e^{-i\frac{\pi}{2}t} + O(e^{-\beta t}), \quad (120)$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — некоторое действительное число.

Пусть теперь

$$\frac{1}{2} < \rho \leq 1.$$

В системе (117) осуществим замену $u = \text{diag}(e^{i\frac{\pi}{2}t}, e^{-i\frac{\pi}{2}t})u_1$, которая приводит ее к виду

$$\dot{u}_1 = [t^{-\rho} A_1(t) + W_1(t)] u_1, \quad (121)$$

где

$$A_1(t) = -\frac{2a\mathbf{i}}{4 + \pi^2} \begin{pmatrix} (1 - \mathbf{i}\frac{\pi}{2})(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) & (1 - \mathbf{i}\frac{\pi}{2})(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})e^{-i\pi t} \\ (1 + \mathbf{i}\frac{\pi}{2})(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})e^{i\pi t} & (1 + \mathbf{i}\frac{\pi}{2})(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \end{pmatrix}, \quad (122)$$

а матрица $W_1(t) \in L_1[t_*, \infty)$. В системе (121) сделаем усредняющую замену

$$u_1 = (I + t^{-\rho} Y_1(t)) u_2,$$

в результате которой в силу теоремы 4 приходим к усредненной системе

$$\dot{u}_2 = [t^{-\rho} A_1 + W_2(t)] u_2. \quad (123)$$

Здесь $A_1 = M[A_1(t)]$ и $W_2(t)$ — некоторая матрица из класса $L_1[t_*, \infty)$. Вид матрицы A_1 будет различаться в следующих случаях.

Пусть

$$\omega \neq \pm\pi. \quad (124)$$

Тогда матрица A_1 является нулевой и система (123) имеет L -диагональный вид. В силу теоремы Левинсона базисные решения этой системы имеют следующую асимптотику при $t \rightarrow \infty$:

$$u_2^{(j)}(t) = e_j + o(1), \quad j = 1, 2.$$

Возвращаясь теперь к системе (117), получаем асимптотические формулы (119) для ее фундаментальных решений при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, все решения исходного уравнения (11) при $t \rightarrow \infty$ имеют асимптотику вида (120).

Предположим теперь, что

$$\omega = \pi. \quad (125)$$

Случай $\omega = -\pi$ в силу вида уравнения (11) сводится к данной ситуации простой заменой параметра a на $(-a)$. Имеем

$$A_1 = -\frac{2ai}{4 + \pi^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 - i\frac{\pi}{2} \\ -1 - i\frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (126)$$

Собственные числа матрицы A_1 различны и имеют вид

$$\mu_{1,2} = \pm \frac{a}{\sqrt{4 + \pi^2}}.$$

Таким образом, система (123) заменой $u_2 = Cu_3$, где матрица $C = [f_1, f_2]$ диагонализует матрицу A_1 , приводится к L -диагональному виду. Фундаментальные решения системы (123) имеют следующую асимптотику при $t \rightarrow \infty$:

$$u_2^{(j)}(t) = (f_j + o(1)) \exp\left\{\mu_j \int t^{-\rho} dt\right\}, \quad j = 1, 2,$$

где

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\delta \end{pmatrix}, \quad \delta = \frac{-\pi + 2i}{\sqrt{4 + \pi^2}}.$$

В этой ситуации все решения исходного уравнения (11) имеют следующее асимптотическое представление при $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} x(t) = & c_1 \left(\exp\left\{i\frac{\pi}{2} + \mu_1 \int t^{-\rho} dt\right\} (1 + o(1)) + \exp\left\{-i\frac{\pi}{2} + \mu_1 \int t^{-\rho} dt\right\} (\delta + o(1)) \right) + \\ & + c_2 \left(\exp\left\{i\frac{\pi}{2} + \mu_2 \int t^{-\rho} dt\right\} (1 + o(1)) + \exp\left\{-i\frac{\pi}{2} + \mu_2 \int t^{-\rho} dt\right\} (-\delta + o(1)) \right) + O(e^{-\beta t}), \end{aligned} \quad (127)$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — некоторое действительное число.

Рассмотрим далее случай, когда

$$\frac{1}{3} < \rho \leq \frac{1}{2}. \quad (128)$$

Матрица $W(t) = \Psi(0)G(t, H(t, \theta))$ в системе (117) более не принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$. Таким образом, нам необходимо построить (1×2) -матрицу $H(t, \theta)$, описывающую критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$. В силу (57), (59) имеем,

$$H(t, \theta) = t^{-\rho}H_1(t, \theta) + t^{-2\rho}H_2(t, \theta) + Z(t, \theta), \quad (129)$$

где $\|Z(t, \cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_*, \infty)$. Заметим, что представляет интерес лишь изучение ситуации, когда выполнено неравенство (124). Действительно, если имеет место равенство (125), то усредненную систему на критическом многообразии можно сперва представить в виде (111), где $A_{i_1 \dots i_s} = A_1$, а матрица A_1 определяется формулой (126). Затем, воспользовавшись леммой 1, эту систему можно привести к L -диагональному виду (113) и построить асимптотику с помощью теоремы Левинсона. Несложно установить, что в случае выполнения равенства (125) при условии $\rho \leq 1/2$ для решений уравнения (11) при $t \rightarrow \infty$ будет справедливо асимптотическое представление типа (127). Единственное отличие состоит в том, что в этом представлении величину $\int t^{-\rho} dt$ нужно заменить на величину

$$\frac{t^{1-\rho}}{1-\rho}(1 + o(1)). \quad (130)$$

Итак, будем считать, что выполнено неравенство (124). Вычислим матрицу $H_1(t, \theta)$, используя алгоритм, описанный в [4]. Подставим представление (129) в систему (38) и соберем члены, содержащие множитель $t^{-\rho}$. Получаем следующую систему для нахождения (1×2) -матрицы $H_1(t, \theta)$:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})\Phi(\theta)\Psi(0)\Phi(0) + H_1(t, \theta)D + \frac{\partial H_1}{\partial t} = \\ = \begin{cases} \frac{\partial H_1}{\partial \theta}, & -1 \leq \theta < 0, \\ -\frac{\pi}{2}H(t, -1) + \frac{a}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})\Phi(0), & \theta = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (131)$$

Полагая $H(t, \theta) = (h_1(t, \theta), h_2(t, \theta))$, получаем следующие задачи для нахождения элементов этой матрицы:

$$\begin{aligned} -\frac{2ai}{4 + \pi^2}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})\left(\left(1 - i\frac{\pi}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{2}\theta} + \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}\theta}\right) + (-1)^{j-1}i\frac{\pi}{2}h_j(t, \theta) + \frac{\partial h_j}{\partial t} = \\ = \begin{cases} \frac{\partial h_j}{\partial \theta}, & -1 \leq \theta < 0, \\ -\frac{\pi}{2}h_j(t, -1) + \frac{a}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}), & \theta = 0, \end{cases} \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (132)$$

Каждая из этих задач однозначно разрешима в силу [4, Теорема 1]. Отсюда и из вида (132) легко вывести, что $h_2(t, \theta) = \overline{h_1(t, \theta)}$. Решение $h_1(t, \theta)$ ищем в виде

$$h_1(t, \theta) = g_1(\theta)e^{i\omega t} + g_2(\theta)e^{-i\omega t}. \quad (133)$$

Подставляя (133) в (132) и собирая члены при одинаковых показателях экспоненты, получаем

$$\begin{aligned}
& (-1)^j \frac{2a\mathbf{i}}{4 + \pi^2} \left((1 - \mathbf{i}\frac{\pi}{2})e^{i\frac{\pi}{2}\theta} + (1 + \mathbf{i}\frac{\pi}{2})e^{-i\frac{\pi}{2}\theta} \right) + \mathbf{i}\frac{\pi}{2}g_j(\theta) + (-1)^{j-1}\mathbf{i}\omega g_j(\theta) = \\
& = \begin{cases} \frac{dg_j}{d\theta}, & -1 \leq \theta < 0, \\ -\frac{\pi}{2}g_j(-1) + (-1)^j \frac{a\mathbf{i}}{2}, & \theta = 0, \end{cases} \quad j = 1, 2. \quad (134)
\end{aligned}$$

Несложные вычисления приводят к следующим формулам для функций $g_j(\theta)$ ($j = 1, 2$):

$$\begin{aligned}
g_{1,2}(\theta) &= K_{1,2}e^{i(\frac{\pi}{2} \pm \omega)\theta} + \frac{2a}{\omega(4 + \pi^2)}(1 - \mathbf{i}\frac{\pi}{2})e^{i\frac{\pi}{2}\theta} + \frac{4a}{(\omega \pm \pi)(4 + \pi^2)}(1 + \mathbf{i}\frac{\pi}{2})e^{-i\frac{\pi}{2}\theta}, \quad (135) \\
K_{1,2} &= \mp \frac{4a}{4 + \pi^2} \left(1 + \frac{\pi^2}{8} + \mathbf{i}\frac{\pi}{4} \right) \frac{1}{\frac{\pi}{2} \pm \omega - \frac{\pi}{2} \exp\{\mp \mathbf{i}\omega\}}.
\end{aligned}$$

Здесь верхний знак в формулах и константа K_1 соответствуют функции $g_1(\theta)$, а нижний знак и константа K_2 — функции $g_2(\theta)$. Таким образом, матрица $H_1(t, \theta)$ имеет вид

$$H_1(t, \theta) = (h_1(t, \theta), \overline{h_1(t, \theta)}), \quad (136)$$

где функция $h_1(t, \theta)$ определяется формулами (133), (135).

Возвращаясь теперь к системе на критическом многообразии (117) и учитывая (129), (136), получаем для нее следующее представление:

$$\dot{u} = \left[D + t^{-\rho}B_1(t) + t^{-2\rho}B_2(t) + R(t) \right] u, \quad t \geq t_*, \quad (137)$$

где матрицы D и $B_1(t)$ определяются формулами (118), а матрица $R(t)$ принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$. Кроме того,

$$\begin{aligned}
B_2(t) &= -\frac{a\mathbf{i}}{2}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})\Psi(0)H_1(t, 0) = \\
&= -\frac{2a\mathbf{i}}{4 + \pi^2}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \begin{pmatrix} (1 - \mathbf{i}\frac{\pi}{2})h_1(t, 0) & (1 - \mathbf{i}\frac{\pi}{2})\overline{h_1(t, 0)} \\ (1 + \mathbf{i}\frac{\pi}{2})h_1(t, 0) & (1 + \mathbf{i}\frac{\pi}{2})\overline{h_1(t, 0)} \end{pmatrix}. \quad (138)
\end{aligned}$$

В системе (137) сделаем замену $u = \text{diag}(e^{i\frac{\pi}{2}t}, e^{-i\frac{\pi}{2}t})u_1$, в результате которой она приводится к виду

$$\dot{u}_1 = [t^{-\rho}A_1(t) + t^{-2\rho}A_2(t) + R_1(t)]u_1. \quad (139)$$

Здесь матрица $A_1(t)$ определяется формулой (122),

$$A_2(t) = -\frac{2a\mathbf{i}}{4 + \pi^2} \begin{pmatrix} (1 - \mathbf{i}\frac{\pi}{2})(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})h_1(t, 0) & (1 - \mathbf{i}\frac{\pi}{2})(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})e^{-i\pi t}\overline{h_1(t, 0)} \\ (1 + \mathbf{i}\frac{\pi}{2})(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})e^{i\pi t}h_1(t, 0) & (1 + \mathbf{i}\frac{\pi}{2})(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})\overline{h_1(t, 0)} \end{pmatrix}, \quad (140)$$

и матрица $R_1(t) \in L_1[t_*, \infty)$. Согласно теореме 4, осуществим в системе (139) усредняющую замену

$$u_1 = [I + t^{-\rho}Y_1(t) + t^{-2\rho}Y_2(t)]u_2.$$

В результате этой замены приходим к системе

$$\dot{u}_2 = [t^{-2\rho}A_2 + R_2(t)]u_2. \quad (141)$$

Здесь мы учли, что в силу (124) матрица $A_1 = M[A_1(t)]$ является нулевой. Далее,

$$A_2 = M[A_2(t) + A_1(t)Y_1(t)], \quad \dot{Y}_1 = A_1(t) - A_1 = A_1(t) \quad (142)$$

и матрица $R_2(t) \in L_1[t_*, \infty)$. Пусть сначала

$$\omega = \frac{\pi}{2}, \quad \left(\omega = -\frac{\pi}{2}\right). \quad (143)$$

Несложные, но довольно утомительные вычисления приводят к следующей формуле для матрицы A_2 :

$$A_2 = \frac{4a^2}{\pi(4 + \pi^2)} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \frac{\pi}{10} + i\left(\frac{4}{15} - \frac{\pi}{5}\right) & \frac{4}{4+\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 + i\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{8} + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi^3}{16}\right)\right) \\ \frac{4}{4+\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 - i\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{8} + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi^3}{16}\right)\right) & \frac{4}{5} - \frac{\pi}{10} - i\left(\frac{4}{15} - \frac{\pi}{5}\right) \end{pmatrix}. \quad (144)$$

Собственные числа матрицы A_2 действительны и разных знаков:

$$\mu_{1,2} = \frac{a^2}{15(4 + \pi^2)} (48 - 6\pi \pm \sqrt{81\pi^2 - 516\pi + 4244}). \quad (145)$$

Система (141) заменой $u_2 = Cu_3$ приводится к L -диагональному виду. Фундаментальные решения системы (141), следовательно, имеют следующую асимптотику при $t \rightarrow \infty$:

$$u_2^{(j)}(t) = (f_j + o(1)) \exp\left\{\mu_j \int t^{-2\rho} dt\right\}, \quad j = 1, 2,$$

где $f_1 = (\delta_1, \delta_2)^T$ и f_2 — собственные векторы матрицы A_2 , отвечающие собственным числам μ_1 и μ_2 соответственно. Решения исходного уравнения (11) при $t \rightarrow \infty$ имеют следующее асимптотическое представление:

$$x(t) = c_1 \left(e^{i\frac{\pi}{2}} (\delta_1 + o(1)) + e^{-i\frac{\pi}{2}} (\delta_2 + o(1)) \right) \exp\left\{\mu_1 \int t^{-2\rho} dt\right\} + O\left(\exp\left\{\mu_2 \int t^{-2\rho} dt\right\}\right), \quad (146)$$

где c_1 — произвольная комплексная постоянная.

Предположим теперь, что

$$\omega \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \quad (147)$$

и имеет место неравенство (128). Матрица A_2 , определяемая соотношениями (142), имеет следующий вид:

$$A_2 = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \bar{\nu} \end{pmatrix}, \quad \nu = -\frac{2\pi a^2 i}{4 + \pi^2} \left(\frac{(1 - i\frac{\pi}{4})(\cos \omega - 1)}{\omega^2 + \pi\omega i \sin \omega + \frac{\pi^2}{2} \cos \omega - \frac{\pi^2}{2}} + \frac{1}{\omega^2 - \pi^2} \right). \quad (148)$$

Фундаментальные решения системы (141) имеют следующую асимптотику при $t \rightarrow \infty$:

$$u_2^{(1,2)}(t) = (e_{1,2} + o(1)) \exp\left\{(\operatorname{Re} \nu \pm i \operatorname{Im} \nu) \int t^{-2\rho} dt\right\},$$

где e_j — векторы канонического базиса в \mathbb{R}^2 . Следовательно, все решения уравнения (11) имеют следующую асимптотику при $t \rightarrow \infty$:

$$x(t) = c_1(1 + o(1)) \exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2}t + \operatorname{Im} \nu \int t^{-2\rho} dt\right)\right\} \exp\left\{\operatorname{Re} \nu \int t^{-2\rho} dt\right\} + \\ + c_2(1 + o(1)) \exp\left\{-i\left(\frac{\pi}{2}t + \operatorname{Im} \nu \int t^{-2\rho} dt\right)\right\} \exp\left\{\operatorname{Re} \nu \int t^{-2\rho} dt\right\} + O(e^{-\beta t}), \quad (149)$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — некоторое действительное число. Очевидно, что качественное поведение решений уравнения (11) в рассматриваемой ситуации будет определяться знаком величины $\operatorname{Re} \nu$. Можно показать (используя, в частности, пакеты символьных вычислений), что эта величина задается формулой

$$\operatorname{Re} \nu = \frac{2\pi^2 a^2 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) (2\omega^2 + 8\omega \sin \omega + \pi^2 \cos \omega - \pi^2)}{(4 + \pi^2) ((\pi^2 - 2\omega^2)^2 - 2\pi^2(\pi^2 - 2\omega^2) \cos \omega + \pi^4 \cos^2 \omega + 4\pi^2 \omega^2 \sin^2 \omega)}. \quad (150)$$

График величины $\operatorname{Re} \nu$ как функции переменной ω изображен на рис. 1. Используя

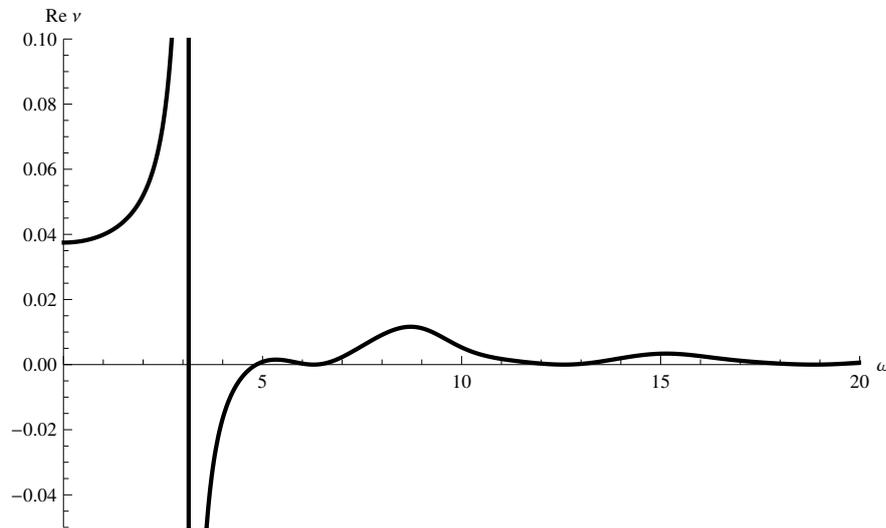


Рис. 1. График величины (150) при $a = 1$.

(150), несложно установить следующие предельные равенства:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} \nu = \frac{\pi^2 a^2 (20 - \pi^2)}{(4 + \pi^2)^3}, \quad \operatorname{Re} \nu = \frac{\pi^2 a^2 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{(4 + \pi^2) \omega^2} \left(1 + O(\omega^{-1})\right), \quad \omega \rightarrow +\infty \quad (151)$$

и

$$\operatorname{Re} \nu = -\frac{2\pi}{(4 + \pi^2)^2 (\omega - \pi)} \left(1 + O(\omega - \pi)\right), \quad \omega \rightarrow \pi. \quad (152)$$

Из (151), (152) (см. также Рис. 1) заключаем, в частности, что $\operatorname{Re} \nu > 0$ при достаточно больших ω ($\omega \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$) и $\operatorname{Re} \nu < 0$, если $\omega \rightarrow \pi + 0$.

Пусть, наконец,

$$\rho \leq \frac{1}{3}. \quad (153)$$

В силу (57), (59) имеем,

$$H(t, \theta) = t^{-\rho} H_1(t, \theta) + \dots + t^{-k\rho} H_k(t, \theta) + Z(t, \theta). \quad (154)$$

Здесь $k \in \mathbb{N}$ выбрано так, что $k\rho \leq 1 < (k+1)\rho$, а (1×2) -матрица $Z(t, \theta)$ такова, что $\|Z(t, \cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_*, \infty)$. Система на критическом многообразии имеет вид

$$\dot{u} = \left[D + t^{-\rho} B_1(t) + t^{-2\rho} B_2(t) + \dots + t^{-k\rho} B_k(t) + R(t) \right] u, \quad t \geq t_*, \quad (155)$$

где матрицы D , $B_1(t)$ определяются формулами (118), матрица $B_2(t)$ имеет вид (138) и матрица $R(t)$ принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$. Заменой $u = \text{diag}(e^{i\frac{\pi}{2}t}, e^{-i\frac{\pi}{2}t})u_1$ систему (155) приводим к виду

$$\dot{u}_1 = \left[t^{-\rho} A_1(t) + t^{-2\rho} A_2(t) + \dots + t^{-k\rho} A_k(t) + R_1(t) \right] u_1. \quad (156)$$

Согласно теореме 4, осуществим в системе (156) усредняющую замену

$$u_1 = \left[I + t^{-\rho} Y_1(t) + t^{-2\rho} Y_2(t) + \dots + t^{-k\rho} Y_k(t) \right] u_2.$$

В результате этой замены приходим к системе

$$\dot{u}_2 = \left[A_1 t^{-\rho} + t^{-2\rho} A_2 + \dots + t^{-k\rho} A_k + R_2(t) \right] u_2. \quad (157)$$

Дальнейший анализ системы (157) связан с представлением ее в виде (111) и последующим использованием леммы 1 для приведения этой системы к L -диагональной форме (113). Если $\omega = \pm\pi$, то собственные числа матрицы A_1 различны. Следовательно, в этом случае для решений уравнения (11) справедливо представление (127), где величину $\int t^{-\rho} dt$ нужно заменить на выражение (130). Далее, если $\omega = \pm\frac{\pi}{2}$, то $A_1 = 0$, а собственные числа матрицы A_2 различны и имеют вид (145). Асимптотика всех решений уравнения (11) определяется тогда формулой (146), где $\int t^{-2\rho} dt$ следует заменить выражением

$$\frac{t^{1-2\rho}}{1-2\rho} (1 + o(1)). \quad (158)$$

Наконец, если выполнены неравенства (147), то $A_1 = 0$, а матрица A_2 определяется формулой (148). В этой ситуации собственные числа различны, если $\text{Im } \nu \neq 0$. Тогда в предположении, что $\text{Re } \nu \neq 0$, асимптотика всех решений уравнения (11) имеет вид (149), где $\int t^{-2\rho} dt$ следует заменить величиной (158).

Интересно сравнить динамику решений уравнения (11) при $t \rightarrow \infty$ с динамикой решений так называемого адиабатического осциллятора

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\omega_0^2 + \frac{a \sin \omega t}{t^\rho} \right) x = 0, \quad \omega_0 = \frac{\pi}{2}. \quad (159)$$

Заметим, что предельные уравнения (т.е. уравнения (11) и (159) при $a = 0$) демонстрируют, по существу, одинаковую динамику. Динамика этих предельных уравнений совпадает с динамикой гармонического осциллятора с частотой собственных колебаний, равной ω_0 :

$$x(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}, \quad (160)$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные. Уравнения (11) и (159), таким образом, можно рассматривать как возмущенные гармонические осцилляторы с одинаковым характером внешнего воздействия. Если $\rho > 1$, то решения уравнений

(11) и (159) в пределе при $t \rightarrow \infty$ описываются формулой (160). Хорошо известно (см., например, [2, 13, 15]), что если ($\omega = \pm 2\omega_0$ и $\rho \leq 1$) или ($\omega = \pm\omega_0$ и $\rho \leq 1/2$), то уравнение (159) имеет неограниченные решения для всех $a \neq 0$. Если $\omega \neq \pm\omega_0, \pm 2\omega_0$, то все решения уравнения (159) ограничены и не стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Таким образом (см. формулу (127)), можно заключить, что динамика уравнений (11) и (159) при $\rho > 1/2$ качественно одинакова. Существенные различия наблюдаются в случае, когда $\rho \leq 1/2$. Так, в уравнении (11) неограниченные колебания реализуются почти при всех ω , когда $\omega \gg 1$. Кроме того, все решения уравнения (11) могут стремиться к нулю, если $\omega \rightarrow \pi + 0$.

Список литературы

1. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954. 216 с. (*Bellman R. Stability theory of differential equations. New York, McGraw-Hill, 1953.*)
2. Бурд В.Ш., Каракулин В.А. Асимптотическое интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами // Математические заметки. 1998. Т. 64, №5. С. 658–666. (English transl.: *Burd V.Sh., Karakulin V.A. On the asymptotic integration of systems of linear differential equations with oscillatory decreasing coefficients // Math. Notes. 1998. V. 64, No. 5. P. 571–578.*)
3. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958. 475 с. (*Coddington E.A., Levinson N. Theory of ordinary differential equations. New York, McGraw-Hill, 1955.*)
4. Нестеров П.Н. Метод центральных многообразий в задаче асимптотического интегрирования функционально-дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. I // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, №3. С. 5–34. [*Nesterov P.N. Center manifold method in the asymptotic integration problem for functional differential equations with oscillatory decreasing coefficients. I // Modeling and Analysis of Information Systems. 2014. Vol. 21, №3. P. 5–34 (in Russian).*]
5. Нестеров П.Н. Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, №6. С. 731–742. (English transl.: *Nesterov P.N. Averaging method in the asymptotic integration problem for systems with oscillatory-decreasing coefficients // Differ. Equ. 2007. V. 43, No. 6. P. 745–756.*)
6. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с. (*Hartman P. Ordinary Differential Equations. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1964.*)
7. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. (*Hale J.K. Theory of functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1977.*)
8. Ait Babram M., Hbid M.L., Arino O. Approximation scheme of a center manifold for functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1997. Vol. 213. P. 554–572.
9. Carr J. Applications of centre manifold theory. New York: Springer-Verlag, 1981.
10. Castillo S., Pinto M. Asymptotic integration of ordinary different systems // J. Math. Anal. Appl. 1998. Vol. 218, No. 1. P. 1–12.

11. *Coppel W.A.* Stability and asymptotic behavior of differential equations. D.C. Heath and Co., Boston, 1965.
12. *Devinatz A.* The asymptotic nature of the solutions of certain linear systems of differential equations // Pacific J. Math. 1965. V. 15, No. 1. P. 75–83.
13. *Eastham M.S.P.* The asymptotic solution of linear differential systems. London Math. Soc. Monographs. Oxford: Clarendon Press, 1989.
14. *Hale J., Verduyn Lunel S.M.* Introduction to functional differential equations. Appl. Math. Sciences 99. New York: Springer-Verlag, 1993.
15. *Harris Jr. W.A., Lutz D.A.* Asymptotic integration of adiabatic oscillators // J. Math. Anal. Appl. 1975. Vol. 51. P. 76–93.
16. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Introduction to the theory and applications of functional differential equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.
17. *Nesterov P.* Method of averaging for systems with main part vanishing at infinity // Math. Nachr. 2011. Vol. 284, No. 11-12. P. 1496–1514.

Center Manifold Method in the Asymptotic Integration Problem for Functional Differential Equations with Oscillatory Decreasing Coefficients. II

Nesterov P.N.

*P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia*

Keywords: functional-differential equations, critical manifold, asymptotic integration, averaging method, Levinson's theorem

In this paper we study the asymptotic integration problem in the neighborhood of infinity for a certain class of linear functional differential systems. We construct the asymptotics for the solutions of the considered systems in a critical case. In the second part of the work we establish the existence of a critical manifold for the considered class of systems and study its main properties. We also investigate the asymptotic integration problem for a reduced system. We illustrate the proposed method with an example of constructing the asymptotics for the solutions of a certain scalar delay differential equation.

Сведения об авторе:

Нестеров Павел Николаевич,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд. физ.-мат. наук, доцент