

Общероссийский математический портал

А. Н. Захлевных, Д. А. Петров, Пространственные искажения ориентационной структуры ферронематика во внешних полях, *ЖТФ*, 2016, том 86, выпуск 4, 53–62

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.135.214.152

5 октября 2024 г., 17:12:46



05

## Пространственные искажения ориентационной структуры ферронематика во внешних полях

© А.Н. Захлевных, Д.А. Петров

Пермский государственный национальный исследовательский университет,  
614990 Пермь, Россия  
e-mail: anz@psu.ru

(Поступило в Редакцию 16 апреля 2015 г.)

Изучены пространственные искажения полей директора и намагниченности ферронематика — суспензии магнитных наночастиц в нематическом жидком кристалле, индуцированные совместным действием электрического и магнитного полей с учетом флексоэлектрической поляризации жидкокристаллической матрицы. Рассмотрен случай мягкого сцепления жидкого кристалла с магнитными частицами и границами слоя. Построена фазовая задержка проходящего через образец света как функция приложенного магнитного поля.

### Введение

Жидкие кристаллы (ЖК) обладают текучестью как обычные жидкости и дальним порядком в ориентации анизометричных молекул. Под влиянием электрических и магнитных полей они могут изменять свою ориентационную структуру и тем самым физические свойства. Если молекулы ЖК имеют изогнутую форму, то их переориентация в пространстве приводит к появлению некомпенсированной электрической поляризации, которая является аналогом флексоэлектричества в кристаллических телах [1–7]. В обычных ЖК влияние флексоэффекта на ориентационные искажения во внешних полях достаточно хорошо изучено [1–7], в то время как в ферронематиках (ФН), представляющих собой суспензии магнитных наночастиц в нематических жидких кристаллах (НЖК), изучение флексоэлектрических явлений ранее не проводилось. В зависимости от геометрии ячейки и условий сцепления директора с границами флексоэлектрические вклады в свободную энергию могут проявляться либо в условиях равновесия в объеме, либо в виде поверхностной флексоэлектрической поляризации. В последнем случае условия сцепления директора с границами ячейки должны быть мягкими.

В отсутствие флексоэлектрических деформаций ориентационное поведение ФН в электрических и магнитных полях изучено как для случая абсолютно жесткого планарного сцепления директора ЖК с границами слоя [8,9], так и для мягкого планарного сцепления молекул ЖК с ограничивающими поверхностями [10,11], где получены выражения для пороговых полей переходов между ориентационными фазами, и показано [11], что эти переходы могут быть первого или второго рода в зависимости от сегрегации магнитной примеси.

Целью настоящей работы является исследование влияния флексоэлектрической поляризации ЖК-матрицы на пространственную ориентационную и магнитную структуру ФН во внешних полях.

### Феноменологическая теория ферронематиков

Рассмотрим плоский слой ФН толщины  $L$ . Начало декартовой системы координат поместим в центре слоя, ось  $x$  направим вдоль границ слоя параллельно оси легкого ориентирования  $\mathbf{n}_0$ , а ось  $z$  — ортогонально границам слоя (рис. 1). Будем считать, что сцепление директора с границами слоя является мягким и планарным, а сцепление ЖК-матрицы с поверхностью примесных феррочастиц — мягкое и гомеотропное, т. е. в отсутствие внешних полей директор  $\mathbf{n}$  параллелен оси легкого ориентирования  $\mathbf{n}_0$  и перпендикулярен единичному вектору намагниченности  $\mathbf{m}$ . Магнитное  $\mathcal{H} = (0, 0, \mathcal{H})$  и электрическое  $\mathcal{E} = (0, 0, \mathcal{E})$  поля направим вдоль оси  $z$ .

Равновесному состоянию системы отвечает минимум свободной энергии

$$\mathcal{F} = \int F_V dV + \oint F_S dS. \quad (1)$$

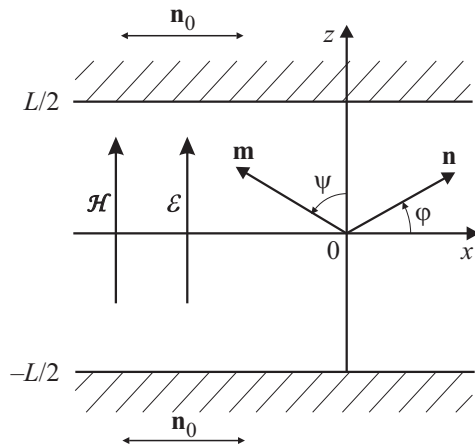
Здесь  $F_V = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7$  — объемная плотность свободной энергии. Слагаемое

$$F_1 = \frac{1}{2} [K_1 (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + K_2 (\mathbf{n} \cdot \nabla \cdot \mathbf{n})^2 + K_3 (\mathbf{n} \cdot \nabla \cdot \mathbf{n})^2]$$

является энергией ориентационно-упругих деформаций поля директора НЖК [7], в нем  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$  — модули ориентационной упругости НЖК. Вклад в свободную энергию взаимодействия диамагнитной ЖК-матрицы с магнитным полем можно записать как [7]

$$F_2 = -\frac{1}{2} \chi_a (\mathbf{n} \cdot \mathcal{H})^2,$$

где  $\chi_a$  — анизотропия диамагнитной восприимчивости. Будем рассматривать ЖК с  $\chi_a > 0$ , в этом случае директор  $\mathbf{n}$  стремится ориентироваться в направлении поля  $\mathcal{H}$ .



**Рис. 1.** Ориентация ферронематика в слое в электрическом  $\mathcal{E}$  и магнитном  $\mathcal{H}$  полях.

Взаимодействие магнитных моментов дисперсной фазы  $M_s v \mathbf{m}$  с полем  $\mathcal{H}$  имеет вид [12]

$$F_3 = -M_s f \mathbf{m} \cdot \mathcal{H},$$

где  $f$  — объемная доля феррочастиц,  $M_s$  — намагниченность насыщения материала феррочастиц,  $v$  — объем частицы. Вклад в свободную энергию энтропии смешения идеального раствора феррочастиц [12] описывается выражением

$$F_4 = \frac{k_B T}{v} f \ln f,$$

где  $T$  — температура,  $k_B$  — постоянная Больцмана. Слагаемое

$$F_5 = \frac{W_p}{d} f (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})^2$$

отвечает за ориентационные взаимодействия феррочастиц с ЖК-матрицей [13]. Здесь  $W_p$  — поверхностная плотность энергии сцепления НЖК с поверхностью магнитных частиц,  $d$  — поперечный диаметр магнитной частицы. При  $W_p > 0$  это выражение минимизируется при  $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$ , что называют гомеотропным типом сцепления. Взаимодействие электрического поля  $\mathcal{E}$  с ЖК-матрицей отвечает вкладу [7]

$$F_6 = -\frac{1}{8\pi} \varepsilon_a (\mathbf{n} \cdot \mathcal{E})^2.$$

Мы будем полагать, что анизотропия диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_a > 0$ , тогда директор стремится ориентироваться вдоль поля  $\mathcal{E}$ . В случае, когда молекулы ЖК обладают изогнутой формой, приводящей к флексоэлектрической поляризации нематика, вклад в свободную энергию имеет вид [1]

$$F_7 = -e_1 (\mathcal{E} \cdot \mathbf{n}) (\nabla \cdot \mathbf{n}) - e_3 \mathcal{E} [(\nabla \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}].$$

Здесь коэффициенты  $e_1$  и  $e_3$  описывают флексоэлектрические вклады от поперечных (splay) и продольных (bend) деформаций поля директора соответственно.

Согласно [14], выражение для поверхностной плотности свободной энергии  $F_S$  взаимодействия ЖК-матрицы с границами слоя описывается выражением

$$F_S = \frac{W^-}{2} (\mathbf{n}^- \times \mathbf{n}_0)^2 + \frac{W^+}{2} (\mathbf{n}^+ \times \mathbf{n}_0)^2, \quad (2)$$

где  $W^+$  и  $W^-$  — энергии сцепления НЖК с верхней и нижней границами слоя соответственно. При конечных и положительных значениях  $W^+$  и  $W^-$  минимуму выражения (2) отвечает состояние с директором  $\mathbf{n}$ , направленным параллельно оси легкого ориентирования  $\mathbf{n}_0$  (мягкое планарное сцепление). Здесь введены обозначения  $\mathbf{n}^+$  и  $\mathbf{n}^-$  для директора на верхней и нижней границах слоя соответственно.

Отметим, что концентрация дисперсной фазы в ФН достаточно мала [12], что позволяет пренебречь диполь-дипольным взаимодействием между феррочастицами. Кроме этого, из-за положительных  $\chi_a$  и  $\varepsilon_a$  и гомеотропного сцепления директора и намагниченности возникает конкуренция между ориентационными механизмами: директор стремится ориентироваться в направлении электрического и магнитного полей (квадрупольный механизм), с другой стороны магнитные моменты частиц также ориентируются в направлении магнитного поля (дипольный механизм), чему противодействует гомеотропное сцепление частиц с матрицей. В малых магнитных полях преобладает дипольный механизм ориентации (слагаемое  $F_3$ ), а в больших — квадратупольный механизм (слагаемое  $F_2$ ).

В рассматриваемой геометрии компоненты директора и намагниченности можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{n} = (\cos \varphi(z), 0, \sin \varphi(z)),$$

$$\mathbf{m} = (-\sin \psi(z), 0, \cos \psi(z)). \quad (3)$$

Здесь  $\varphi(z)$  — угол отклонения директора от оси легкого ориентирования  $\mathbf{n}_0 = (1, 0, 0)$ , а  $\psi(z)$  — угол отклонения намагниченности от внешних полей.

Минимизацией функционала (1) по углам ориентации директора  $\varphi(z)$  и намагниченности  $\psi(z)$ , а также объемной доле магнитных частиц  $f(z)$  получаем систему уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\varphi) \varphi'' + \frac{1}{2} \frac{d\mathcal{K}(\varphi)}{d\varphi} (\varphi')^2 + \frac{1}{2} (H^2 + E^2) \\ \times \sin 2\varphi - \sigma g \sin 2(\varphi - \psi) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$bH \sin \psi - \sigma \sin 2(\varphi - \psi) = 0, \quad (5)$$

$$g = Q \exp \left\{ \frac{bH}{\chi} \cos \psi(z) - \frac{\sigma}{\chi} \sin^2(\varphi(z) - \psi(z)) \right\},$$

$$Q^{-1} = \int_{-1/2}^{1/2} \exp \left\{ \frac{bH}{\chi} \cos \psi(z) - \frac{\sigma}{\chi} \sin^2(\varphi(z) - \psi(z)) \right\} dz, \quad (6)$$

а условия мягкого планарного сцепления директора с границами слоя с учетом флексоэлектрической поляризации имеют следующий вид:

$$\mathcal{K}(\varphi^+) \varphi' \Big|_{z=+1/2} - \frac{1}{2}(aE - \omega^+) \sin 2\varphi^+ = 0, \quad (7)$$

$$\mathcal{K}(\varphi^-) \varphi' \Big|_{z=-1/2} - \frac{1}{2}(aE + \omega^-) \sin 2\varphi^- = 0. \quad (8)$$

Здесь и далее мы используем в качестве единицы длины толщину слоя  $L$ , обозначение для безразмерной координаты оставим прежним —  $z$ . Штрихом обозначено дифференцирование по  $z$  и введены обозначения  $\varphi^\pm = \varphi|_{z=\pm 1/2}$  для углов ориентации директора на верхней „+“ и нижней „-“ границах слоя соответственно. В формулах (7) и (8) введено обозначение

$$\mathcal{K}(\varphi) = \cos^2 \varphi + k \sin^2 \varphi, \quad (9)$$

и следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} H &= \mathcal{H}L \sqrt{\frac{\chi_a}{K_1}}, & E &= \mathcal{E}L \sqrt{\frac{\varepsilon_a}{4\pi K_1}}, & g(z) &= \frac{f(z)}{\bar{f}}, \\ b &= \frac{M_s \bar{f} L}{\sqrt{\chi_a K_1}}, & \kappa &= \frac{k_B T \bar{f} L^2}{K_1 v}, & \omega^\pm &= \frac{W^\pm L}{K_1}, \\ \sigma &= \frac{W_p \bar{f} L^2}{K_1 d}, & k &= \frac{K_3}{K_1}, & a &= (e_1 + e_3) \sqrt{\frac{4\pi}{K_1 \varepsilon_a}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $H$  и  $E$  — безразмерные напряженности магнитного и электрического полей соответственно;  $\bar{f} = Nv/V$  — средняя объемная доля частиц в суспензии ( $N$  — число магнитных частиц,  $V$  — объем образца);  $g(z)$  — приведенная объемная доля частиц. Параметр  $b$  описывает относительную роль магнитных ориентационных механизмов в ФН, при  $b > 1$  основной вклад в искажения поля директора вносит дипольный механизм ( $F_2$ ), а при  $b < 1$  — квадрупольный ( $F_3$ ) [15];  $\kappa$  — сегрегационный параметр. Напомним, что эффект сегрегации заключается в том [12], что феррочастицы накапливаются в той области слоя, где минимальна сумма их энергий в магнитном поле ( $F_3$ ) и ориентационной энергии в матрице ( $F_3$ ). При  $\kappa \gg 1$  сегрегационные эффекты слабы, а распределение частиц по слою близко к однородному, при  $\kappa \sim 1$  — сегрегационные эффекты становятся существенными. Параметры  $\omega^\pm$  имеют смысл безразмерных энергий сцепления ЖК-матрицы с верхней „+“ и нижней „-“ границами слоя соответственно;  $\sigma$  — энергия сцепления директора с магнитными частицами;  $k$  — мера анизотропии ориентационной упругости;  $a$  — параметр, характеризующий влияние флексоэлектрических деформаций.

Отметим, что в рассматриваемой геометрии (рис. 1) флексоэлектрические вклады содержатся только в граничных условиях (7) и (8), и в зависимости от направления электрического поля флексоэлектрическая поляризация стабилизирует ориентацию директора на нижней границе слоя и дестабилизирует на верхней ( $E > 0$ ),

либо наоборот ( $E < 0$ ). Таким образом, в результате поверхностной поляризации ЖК-матрицы происходит изменение симметрии решения даже при одинаковых энергиях сцепления директора с границами слоя  $\omega^- = \omega^+$ . Положение  $z^*$  максимального отклонения директора от оси легкого ориентирования определяется условием

$$\frac{d\varphi}{dz} \Big|_{z=z^*} = 0. \quad (11)$$

Сделаем оценки безразмерных величин (10). Для типичных значений материальных параметров НЖК и феррочастиц [2,8,12,13]:  $\chi_a = 1.7 \cdot 10^{-7}$ ,  $\varepsilon_a = 13$ ,  $e_1 + e_3 = -10^{-4} - 10^{-3}$  CGS units,  $K_1 = 6.4 \cdot 10^{-7}$  dyn,  $K_3 = 1.0 \cdot 10^{-6}$  dyn,  $T = 298$  K,  $W^\pm = 10^{-3} - 10^{-2}$  dyn · cm<sup>-2</sup>,  $W_p \sim 10^{-2}$  dyn · cm<sup>-2</sup>,  $\bar{f} \sim 10^{-5}$ ,  $M_s = 10^2$  G,  $d = 4.0 \cdot 10^{-6}$  cm,  $v = 4.0 \cdot 10^{-17}$  cm<sup>3</sup>,  $L = 25$  μm, получаем  $\kappa \sim 10^{-1}$ ,  $k \sim 1$ ,  $\sigma \sim 10^{-1} - 1$ ,  $b \sim 10$ ,  $\omega^\pm \sim 1 - 10$ ,  $a \sim 10^{-1} - 1$ . Малость параметра  $\kappa$  свидетельствует о важности сегрегационных эффектов в ФН.

## Диаграммы фазового равновесия

Система уравнений (4)–(8) ФН допускает однородные решения во внешних полях. Одно из них отвечает гомеотропной фазе [16] с директором, параллельным оси легкого ориентирования ( $\mathbf{n} \parallel \mathbf{n}_0$ ), и намагниченностью, ориентированной в направлении электрического и магнитного полей ( $\mathbf{m} \parallel \mathcal{H}$ ); в этой фазе директор и намагниченность ортогональны друг другу во всем слое ( $\mathbf{n} \perp \mathbf{m}$ ). Гомеотропная фаза устойчива вплоть до некоторых пороговых значений электрического или магнитного полей, выше которых появляются искажения ориентационной структуры (переход Фредерикса), и угол между директором  $\mathbf{n}$  и намагниченностью  $\mathbf{m}$  начинает зависеть от внешних полей. Такую неоднородную фазу называют угловой [16].

Вблизи перехода Фредерикса из гомеотропной фазы в угловую фазу распределение ориентационной и магнитной структур близко к однородному. Для определения пороговых электрического  $E_F$  и магнитного  $H_F$  полей перехода из гомеотропной фазы в угловую фазу с неоднородным распределением директора и намагниченности, линеаризуем уравнения (4)–(6) по малым углам отклонения директора  $\varphi(z) \ll 1$  и намагниченности  $\psi(z) \ll 1$  от оси легкого ориентирования и магнитного поля соответственно, тогда получим

$$\varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0, \quad (12)$$

где введено обозначение

$$\lambda^2 = E_F^2 + H_F^2 - \frac{2\sigma b H_F}{2\sigma + b H_F}. \quad (13)$$

Решая уравнения (12) вместе с линеаризованными граничными условиями (7) и (8)

$$\varphi' \Big|_{z=1/2} - (aE - \omega^+) \varphi^+ = 0, \quad (14)$$

$$\varphi'|_{z=-1/2} - (aE + \omega^-)\varphi^- = 0, \quad (15)$$

и используя условие (11), получим

$$\varphi(z) = \varphi_0(\cos \lambda z + \sin \lambda z \times \operatorname{tg} \lambda z^*). \quad (16)$$

Здесь введено обозначение для угла ориентации директора в центре слоя  $\varphi(z)|_{z=0} \equiv \varphi_0$ , а выражение

$$\operatorname{tg} \lambda z^* = \frac{2aE_F + \omega^- - \omega^+}{2\lambda + (\omega^- + \omega^+) \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2}} \quad (17)$$

позволяет определить координату  $z^*$  максимального отклонения директора от оси легкого ориентирования при переходе Фредерикса. Из выражения (17) видно, что в общем случае значение  $z^*$  отлично от нуля даже при одинаковых энергиях сцепления директора с границами слоя ( $\omega^- = \omega^+$ ) вследствие флексоэлектрического вклада  $2aE_F$ .

Учитывая соотношение  $\varphi_0 = \varphi_F^* \cos \lambda z^*$ , решение (16) можно записать в следующем виде:

$$\varphi(z) = \varphi_F^* \cos \lambda(z - z^*), \quad (18)$$

условие существования которого позволяет получить выражение для полей перехода Фредерикса в зависимости от материальных параметров ФН

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\lambda(\omega^- + \omega^+)}{\lambda^2 + (aE_F - \omega^+)(aE_F + \omega^-)}. \quad (19)$$

Здесь  $\lambda$  задано выражением (13).

Другое однородное решение отвечает состоянию насыщения (планарной фазе [16]), в которой директор и намагниченность ориентированы в направлении внешних полей ( $\mathbf{n} \parallel \mathbf{m} \parallel \mathcal{K}$ ). Вблизи полей переходов  $E_S$  и  $H_S$  из неоднородного состояния в состояние насыщения отклонения директора и намагниченности от направления магнитного и электрического полей малы, поэтому систему уравнений (4)–(6) можно разложить в ряд по малым  $\varphi(z) = \pi/2 - \delta\varphi(z)$ ,  $\delta\varphi(z) \ll 1$ ,  $\psi(z) \ll 1$ :

$$\delta\varphi'' - \Lambda^2\delta\varphi = 0. \quad (20)$$

Здесь введено обозначение

$$\Lambda^2 = \frac{1}{k} \left( E_S^2 + H_S^2 + \frac{2\sigma bH_S}{2\sigma - bH_S} \right). \quad (21)$$

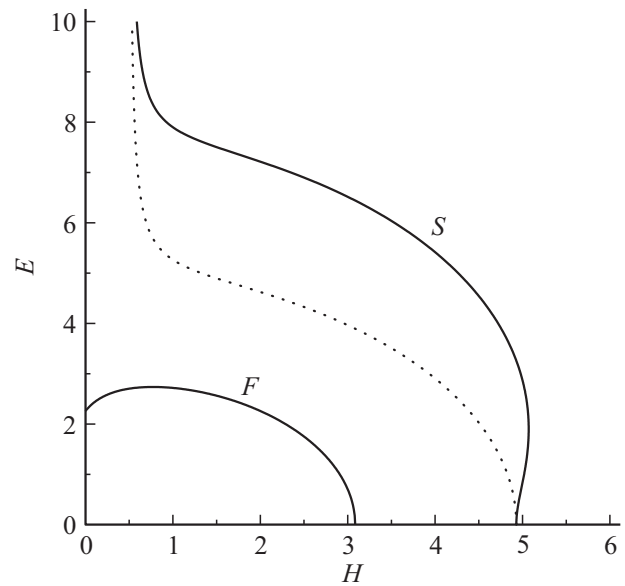
Линеаризованные граничные условия (7), (8) примут вид

$$k\delta\varphi'|_{z=1/2} + (aE_S - \omega^+)\delta\varphi^+ = 0, \quad (22)$$

$$k\delta\varphi'|_{z=-1/2} + (aE_S + \omega^-)\delta\varphi^- = 0. \quad (23)$$

Решая уравнение (20) с граничными условиями (22) и (23), находим выражение для электрического и магнитного полей переходов из угловой фазы в состояние насыщения

$$\operatorname{th} \Lambda = \frac{\Lambda k(\omega^- + \omega^+)}{\Lambda^2 k^2 - (aE_S - \omega^+)(aE_S + \omega^-)}. \quad (24)$$



**Рис. 2.** Фазовая диаграмма электрического и магнитного полей перехода Фредерикса ( $F$ ) и полей насыщения ( $S$ ) для  $b = 10$ ,  $\sigma = 2.5$ ,  $\omega = 5$ ,  $k = 1.5$ ,  $a = \pm 0.5$  пунктирной линии отвечает отсутствие флексоэлектрической поляризации  $a = 0$ .

На рис. 2 представлена бифуркационная диаграмма ориентационных фаз ФН, построенная с помощью уравнений (19) и (24). Здесь для простоты мы рассматриваем одинаковые энергии сцепления директора с верхней и нижней границами слоя ( $\omega^- = \omega^+ = \omega$ ). В этом случае пороговые поля переходов между ориентационными фазами не зависят от знака параметра флексоэлектрической поляризации  $a$ . Ниже кривой  $F$  находится область, отвечающая гомеотропной фазе, выше кривой  $S$  — фазе насыщения, а между этими кривыми находится область угловой фазы. На рис. 2 не показана граница перехода Фредерикса для  $a = 0$ , так как она практически совпадает с кривой  $F$  ( $a = \pm 0.5$ ). Видно, что из-за флексоэлектрической деформации ЖК-матрицы (кривая  $S$ ) переход в состояние насыщения происходит в меньших полях по сравнению со случаем  $a = 0$  (пунктирная кривая).

В численных расчетах удобно использовать интегральную форму системы уравнений ориентационного и магнитного равновесий. Для ее получения проинтегрируем уравнение (4) один раз

$$\varphi' = G^{1/2}(\varphi, \psi) \mathcal{K}^{-1/2}(\varphi), \quad z \in \left[ -\frac{1}{2}, z^* \right], \quad (25)$$

$$\varphi' = -G^{1/2}(\varphi, \psi) \mathcal{K}^{-1/2}(\varphi), \quad z \in \left[ z^*, +\frac{1}{2} \right]. \quad (26)$$

Здесь определена функция

$$G(\varphi, \psi) = (H^2 + E^2)(\cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi^*) - 2\chi(g(\varphi, \psi) - g^*(\varphi^*, \psi^*))$$

и введены обозначения для концентрации магнитных частиц и углов отклонения директора и намагниченности

при  $z = z^*$

$$g^* = g(\varphi^*, \psi^*), \quad \varphi^* = \varphi|_{z=z^*}, \quad \psi^* = \psi|_{z=z^*}.$$

Используя выражения (25) и (26), перепишем граничные условия (7) и (8)

$$\mathcal{K}^{1/2}(\varphi^-)G^{1/2}(\varphi^-, \psi^-) = -\frac{1}{2}(aE + \omega^-) \sin 2\varphi^-, \quad (27)$$

$$\mathcal{K}^{1/2}(\varphi^+)G^{1/2}(\varphi^+, \psi^+) = \frac{1}{2}(aE - \omega^+) \sin 2\varphi^+. \quad (28)$$

После интегрирования (25) и (26), получим уравнения для пространственного распределения угла ориентации директора в слое ФН

$$z + \frac{1}{2} = \int_{\varphi^-}^{\varphi} \mathcal{K}^{1/2}(\varphi)G^{-1/2}(\varphi, \psi)d\varphi, \quad z \in \left[-\frac{1}{2}, z^*\right], \quad (29)$$

$$z - \frac{1}{2} = \int_{\varphi}^{\varphi^+} \mathcal{K}^{1/2}(\varphi)G^{-1/2}(\varphi, \psi)d\varphi, \quad z \in \left[z^*, +\frac{1}{2}\right]. \quad (30)$$

В точке  $z = z^*$  имеем  $\varphi = \varphi^*$ ,  $\psi = \psi^*$  и уравнения (29), (30) примут вид

$$z^* + \frac{1}{2} = \int_{\varphi^-}^{\varphi^*} \mathcal{K}^{1/2}(\varphi)G^{-1/2}(\varphi, \psi)d\varphi, \quad (31)$$

$$z^* - \frac{1}{2} = \int_{\varphi^*}^{\varphi^+} \mathcal{K}^{1/2}(\varphi)G^{-1/2}(\varphi, \psi)d\varphi. \quad (32)$$

Для определения нормировочной константы  $Q$  воспользуемся условием постоянства числа частиц в системе. Это условие в безразмерной форме имеет вид

$$\int_{-1/2}^{1/2} g(z)dz = 1.$$

Здесь от интегрирования по координате  $z$  удобно перейти к интегрированию по углу  $\varphi$  с помощью уравнений (25) и (26), тогда получим

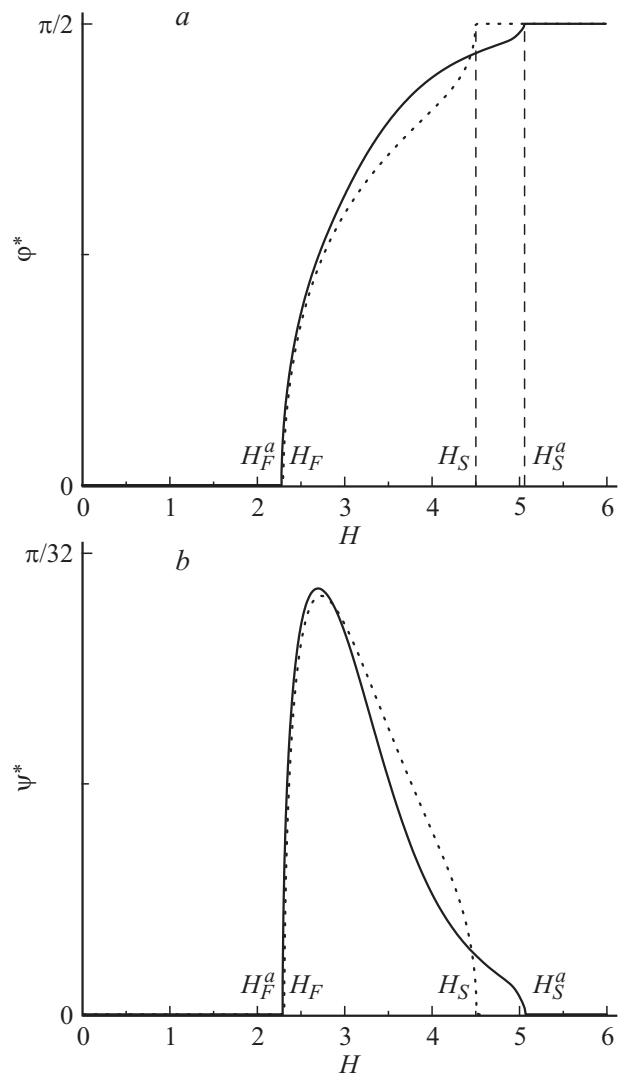
$$\int_{\varphi^-}^{\varphi^*} g(\varphi, \psi)\mathcal{K}^{1/2}(\varphi)G^{-1/2}(\varphi, \psi)d\varphi + \int_{\varphi^*}^{\varphi^+} g(\varphi, \psi)\mathcal{K}^{1/2}(\varphi)G^{-1/2}(\varphi, \psi)d\varphi = 1. \quad (33)$$

Таким образом, уравнения (5), (31)–(33) и граничные условия (27), (28) позволяют определить углы ориентации директора и намагниченности  $\varphi^*$  и  $\psi^*$  в

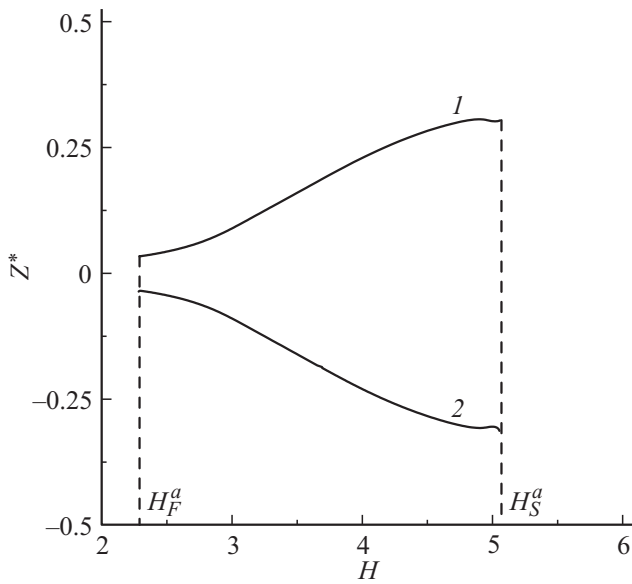
точке  $z^*$ , на верхней границе слоя  $\varphi^+$  и  $\psi^+$  и на нижней границе слоя  $\varphi^-$  и  $\psi^-$  соответственно, а также константу нормировки  $Q$  и координату  $z^*$  в зависимости от приложенных электрического и магнитного полей и материальных параметров ФН.

### Результаты численных расчетов

На рис. 3–5 представлены результаты численного решения системы (5), (31)–(33) с граничными условиями (27), (28) в зависимости от приложенного магнитного поля  $H$  для  $b = 10$ ,  $\sigma = 2.5$ ,  $\omega^- = \omega^+ \equiv \omega = 5$ ,  $k = 1.5$ ,  $E = 2$  и разных значений флексоэлектрического параметра  $a$ . Фазовая диаграмма ориентационных фаз для выбранных параметров показана на рис. 2. Далее будем обозначать магнитное поле перехода Фредерик-



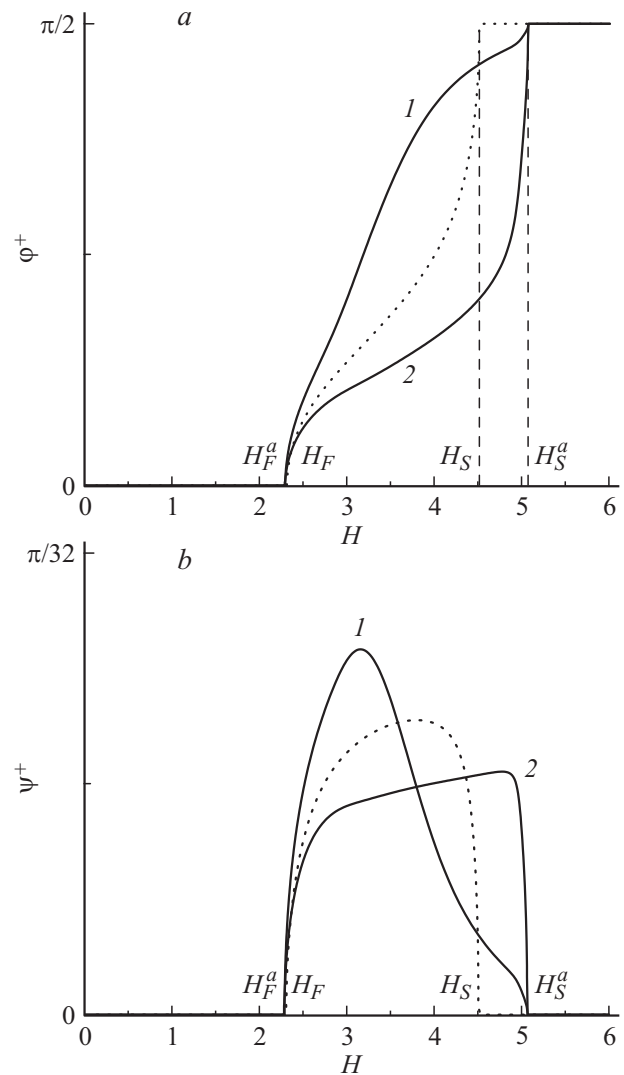
**Рис. 3.** Зависимости максимальных углов отклонения директора (а) и намагниченности (б) от напряженности магнитного поля  $H$  для  $b = 10$ ,  $\sigma = 2.5$ ,  $\omega = 5$ ,  $k = 1.5$ ,  $E = 2$ . Сплошная кривая —  $a = \pm 0.5$ , пунктирная кривая —  $a = 0$ . Здесь  $H_F^a = 2.26$ ,  $H_F = 2.28$ ,  $H_S^a = 5.07$ ,  $H_S = 4.51$ .



**Рис. 4.** Зависимость координаты  $z^*$  максимального угла отклонения директора от напряженности магнитного поля  $H$  для  $b = 10$ ,  $\sigma = 2.5$ ,  $\omega = 5$ ,  $k = 1.5$ ,  $E = 2$ . Кривая 1 —  $a = 0.5$ , кривая 2 —  $a = -0.5$ .  $H_F^a = 2.26$ ,  $H_F = 2.28$ ,  $H_S^a = 5.07$ ,  $H_S = 4.51$ .

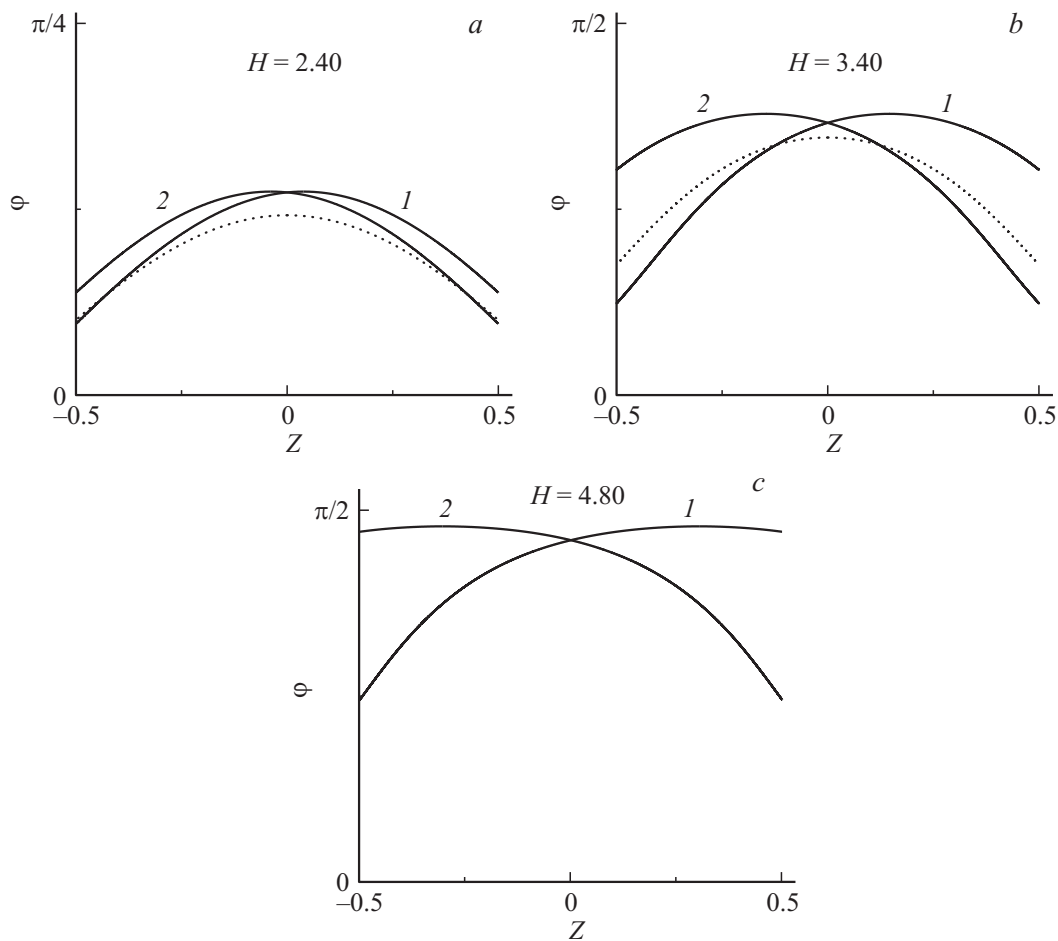
са и перехода в состояние насыщения в присутствии флексоэлектрической поляризации —  $H_F^a$  и  $H_S^a$ , а в отсутствие флексоэффекта —  $H_F$  и  $H_S$  соответственно. Ферронематик находится в гомеотропной фазе, пока магнитное поле не превысит значения  $H_F^a = 2.26$  для  $a = \pm 0.5$  и  $H_F = 2.28$  для  $a = 0$ , которые определяются с помощью уравнения (19), выше этих значений происходит переход Фредерикса, т.е. появляются искажения ориентационной и магнитной структур. Для выбранных материальных параметров флексоэлектрическая поляризация ЖК-матрицы слабо изменяет значения полей перехода Фредерикса, кроме этого, как отмечалось, знак параметра  $a$  в случае одинаковых энергий сцепления директора с границами слоя не влияет на величину этих полей. С ростом поля  $H$  директор ориентируется в направлении полей из-за положительных значений анизотропии диэлектрической проницаемости и магнитной восприимчивости (рис. 3, *a*) и при значении магнитного поля  $H_S^a = 5.07$  для  $a = \pm 0.5$  и  $H_S = 4.51$  для  $a = 0$  ФН переходит в состояние насыщения. Из рис. 3, *a* видно, что из-за флексоэлектрической поляризации переход ФН в состояние насыщения происходит в больших полях, чем при  $a = 0$ . С ростом магнитного поля угол ориентации намагниченности растет, достигая максимума, а затем уменьшается до нуля при переходе ФН в планарную фазу (рис. 3, *b*). Максимальное значение угла отклонения директора  $\varphi^*$  не зависит от знака параметра  $a$ , в то время как соответствующая этому значению координата  $z^*$  с ростом поля смещается к верхней границе слоя при положительных значениях параметра  $a = 0.5$  и к нижней границе при отрицательных  $a = -0.5$ , что видно из рис. 4.

На рис. 5 представлены зависимости углов ориентации директора и намагниченности на верхней границе слоя  $z = 0.5$  в зависимости от приложенного магнитного поля. Для случая положительных значений флексоэлектрического параметра  $a$  директор сильнее отклоняется от оси легкого ориентирования (кривая 1 на рис. 5, *a*) в направлении поля, чем в случае  $a < 0$  (кривая 2 на рис. 5, *a*). Из-за гомеотропного сцепления ЖК-матрицы с феррочастицами большими деформациями ориентационной структуры отвечают большие отклонения намагниченности от направления магнитного поля. Из рис. 5, *b* видно, что для  $a = 0.5$  угол ориентации намагниченности быстро растет с увеличением поля, достигает максимального значения, а затем уменьшается до нуля при переходе ФН в планарную фазу, в то время как для  $a = -0.5$  намагниченность отклоняется



**Рис. 5.** Зависимости углов отклонения директора (*a*) и намагниченности (*b*) на верхней границе слоя  $z = 1/2$  от напряженности магнитного поля  $H$  для  $b = 10$ ,  $\sigma = 2.5$ ,  $\omega = 5$ ,  $k = 1.5$ ,  $E = 2$ . Сплошная кривая 1 —  $a = 0.5$ , 2 —  $a = -0.5$ , пунктирная кривая —  $a = 0$ .  $H_F^a = 2.26$ ,  $H_F = 2.28$ ,  $H_S^a = 5.07$ ,  $H_S = 4.51$ .





**Рис. 6.** Пространственное распределение угла отклонения директора для  $b = 10, \sigma = 2.5, \omega = 5, k = 1.5, E = 2$  и разных значений напряженности поля  $H$ ; (а)  $H = 2.40$ ; (б)  $H = 3.40$ ; (с)  $H = 4.80$ . Кривая 1 —  $a = 0.5$ ; 2 —  $a = -0.5$ , пунктирная кривая —  $a = 0$ .

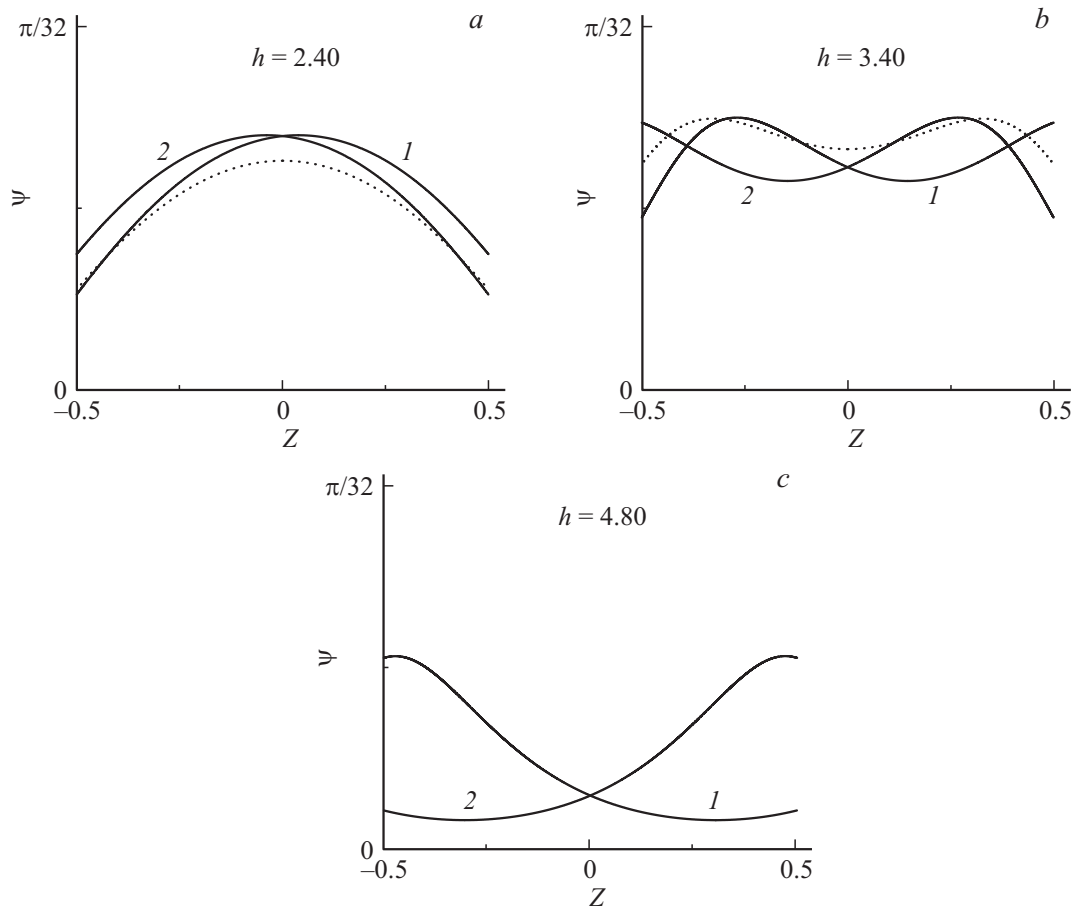
от направления поля, выходит на плато, и только вблизи порогового поля  $H_3^a$  происходит резкое уменьшение угла ориентации намагниченности. Заметим, что на нижней границе слоя  $z = -0.5$  углы ориентации директора  $\varphi^-$  и намагниченности  $\psi^-$  ведут себя противоположным образом: кривой 1 на рис. 5 отвечает значение параметра  $a = -0.5$ , а кривой 2 —  $a = 0.5$ , т.е. можно сказать, что кривая 1 качественно отвечает верхней границе слоя, а кривая 2 — нижней. Так как в отсутствие поверхностной поляризации ЖК-матрицы ( $a = 0$ ) отклонения директора от оси легкого ориентирования и намагниченности от направления полей на границах слоя ФН являются симметричными, в этом случае угол ориентации директора принимает меньшие значения на верхней границе слоя, чем при  $a = 0.5$ , и большие значения, чем при  $a = -0.5$  (рис. 5 пунктирная кривая).

На рис. 6 и 7 представлены пространственные распределения углов ориентации директора и намагниченности для разных значений магнитного поля, полученные путем численного решения системы уравнений (5), (29) и (30). Как видно из рис. 6 и 7, флексоэлектрическая поляризация изменяет симметрию полей директора и намагниченности. Для  $a = 0.5$ , как отмечалось выше, максимальное отклонение директора от оси легкого ори-

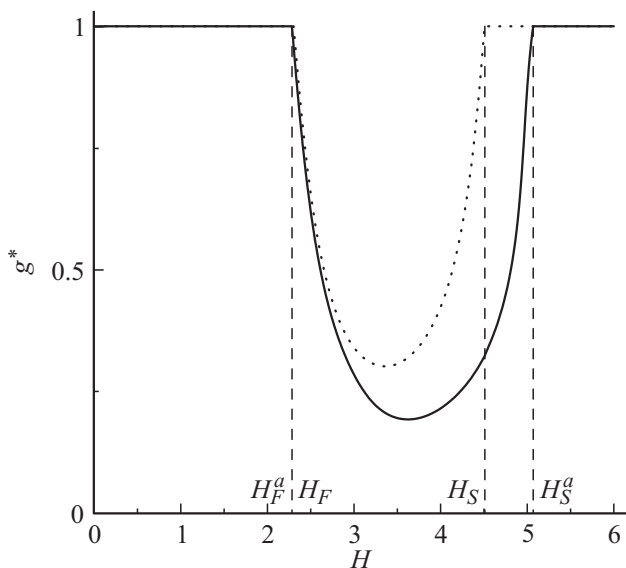
ентирования смещается к верхней границе слоя (рис. 6 кривая 1), а для  $a = -0.5$  — к нижней границе (рис. 6 кривая 2), в то время как в отсутствие флексоэффекта ориентационная деформация остается симметричной относительно середины слоя (пунктирные кривые на рис. 6 и 7). Флексоэффект приводит к большей переориентации директора в направлении поля по сравнению со случаем  $a = 0$  (рис. 3 и 6), кроме этого в полях, превышающих  $H \approx 4.0$ , флексоэлектрическая поляризация ЖК-матрицы увеличивает пороговое поле перехода в состояние насыщения (см. фазовую диаграмму на рис. 2).

В результате эффекта сегрегации происходит перераспределение магнитных частиц по толщине слоя: примесь аккумулируется в тех областях слоя, где минимальна сумма ее энергии в магнитном поле и ориентационной энергии в матрице. На рис. 8 представлена зависимость приведенной объемной доли магнитных частиц в точке  $z^*$  максимального отклонения директора от оси легкого ориентирования, а на рис. 9 пространственное распределение объемной доли феррочастиц. Из рис. 8 видно, что концентрация частиц в точке  $z^*$  уменьшается с ростом поля, достигает минимума, затем начинает возрастать и при переходе в состояние насыщения распределение частиц вновь становится однородным.





**Рис. 7.** Пространственное распределение угла отклонения намагниченности от оси  $z$  для  $b = 10$ ,  $\sigma = 2.5$ ,  $\omega = 5$ ,  $k = 1.5$ ,  $E = 2$  и разных значений напряженности поля  $H$ ; (а)  $H = 2.40$ , (б)  $H = 3.40$ ; (с)  $H = 4.80$ . Кривая 1 —  $a = 0.5$ , 2 —  $a = -0.5$ , пунктирная кривая —  $a = 0$ .



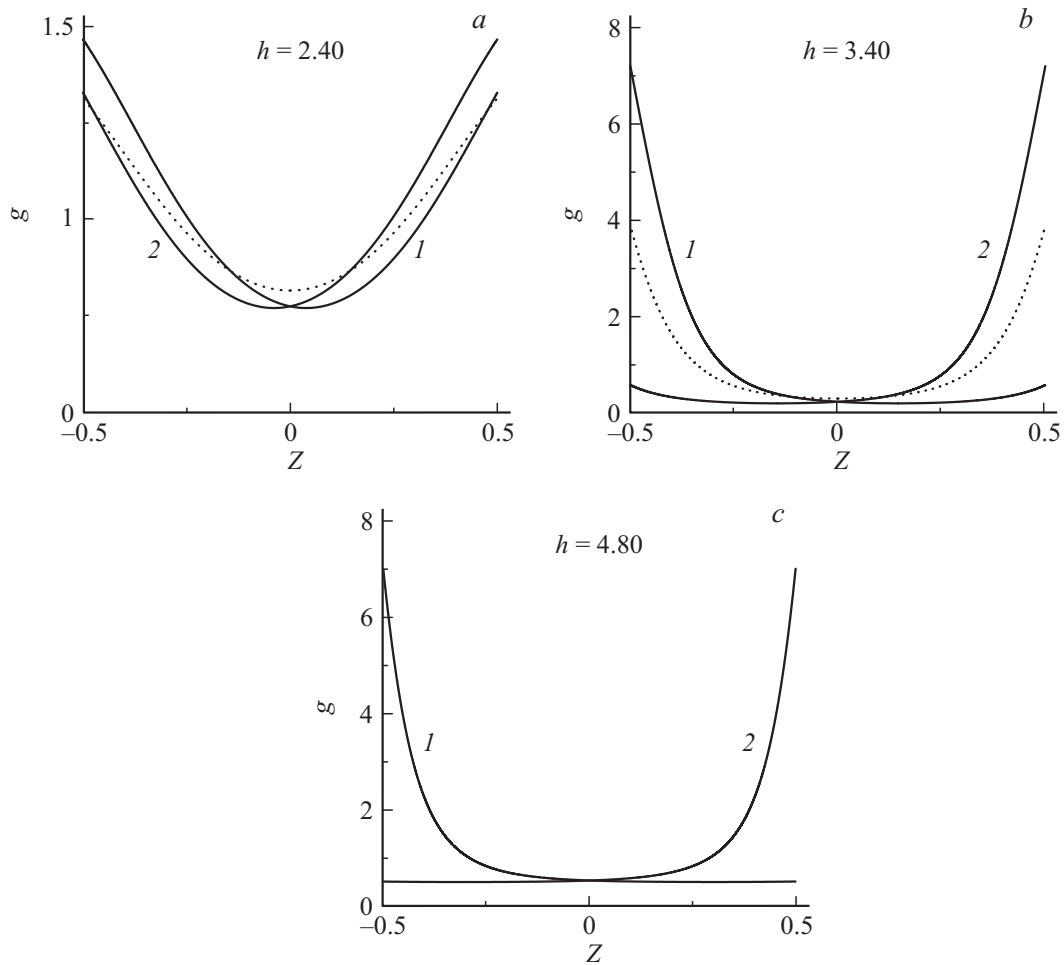
**Рис. 8.** Зависимость объемной доли феррочастиц в точке с координатой  $z^*$  от напряженности магнитного поля  $H$  для  $b = 10$ ,  $\sigma = 2.5$ ,  $\omega = 5$ ,  $k = 1.5$ ,  $E = 2$ . Сплошная кривая —  $a = \pm 0.5$ , пунктирная кривая —  $a = 0$ ,  $H_F^a = 2.26$ ,  $H_F = 2.28$ ,  $H_S^a = 5.07$ ,  $H_S = 4.51$ .

С ростом магнитного поля частицы накапливаются вблизи той границы слоя, где минимальна деформация ориентационной структуры: для  $a = 0.5$  это нижняя граница, а для  $a = -0.5$  — верхняя (рис. 9). В отсутствие флексоэффекта  $a = 0$  искажения директора, индуцированные электрическим и магнитным полями, симметричны относительно середины слоя, поэтому распределение магнитных частиц также симметрично относительно середины слоя (пунктирная линия на рис. 9).

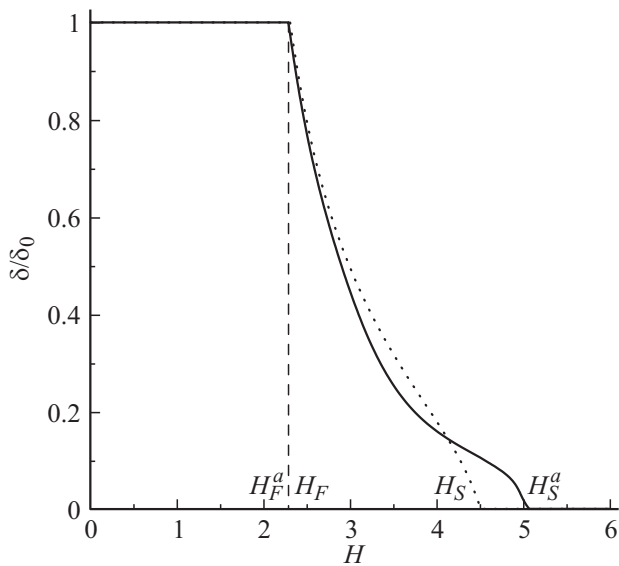
### Магнитооптический отклик ФН

В эксперименте ориентационные переходы в ФН, индуцированные внешними полями, можно изучить путем измерения, например, зависимости оптической разности фаз между обыкновенным и необыкновенным лучом света, прошедшим через слой ФН. Ниже на рис. 10 представлены результаты расчетов разности фаз  $\delta$  нормально падающего луча монохроматического света согласно формулам [17,18]

$$\delta = \frac{2\pi L}{\lambda} \int_{-1/2}^{1/2} [n_{\text{eff}} - n_o] dz, \quad \frac{1}{n_{\text{eff}}^2} = \frac{\sin^2 \varphi(z)}{n_o^2} + \frac{\cos^2 \varphi(z)}{n_e^2}.$$



**Рис. 9.** Пространственное распределение объемной доли феррочастиц для  $b = 10$ ,  $\sigma = 2.5$ ,  $\omega = 5$ ,  $k = 1.5$ ,  $E = 2$  и разных значений напряженности поля  $H$ , (a)  $H = 2.40$ , (b)  $H = 3.40$ , (c)  $H = 4.80$ . Кривая 1 —  $a = 0.5$ , 2 —  $a = -0.5$ , пунктирная кривая —  $a = 0$ .



**Рис. 10.** Разность фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами как функция напряженности магнитного поля  $H$  для  $b = 10$ ,  $\sigma = 2.5$ ,  $\omega = 5$ ,  $k = 1.5$ ,  $E = 2$ . Сплошная кривая —  $a = \pm 0.5$ , пунктирная кривая —  $a = 0$ .  $H_F^a = 2.26$ ,  $H_F = 2.28$ ,  $H_S^a = 5.07$ ,  $H_S = 4.51$ .

Здесь  $\lambda$  — длина световой волны,  $n_{\text{eff}}$  — эффективный показатель преломления,  $n_o$  и  $n_e$  — показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно. С помощью уравнений (25), (26) разность фаз  $\delta$  может быть записана в виде

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \int_{\varphi^-}^{\varphi^*} \mathcal{L}(\varphi) \mathcal{K}^{1/2}(\varphi) G^{-1/2}(\varphi, \psi) d\varphi + \int_{\varphi^+}^{\varphi^*} \mathcal{L}(\varphi) \mathcal{K}^{1/2}(\varphi) G^{-1/2}(\varphi, \psi) d\varphi, \quad (34)$$

где введены обозначения

$$\delta_0 = 2\pi L \frac{n_e - n_o}{\lambda}, \quad \xi = \frac{n_e^2 - n_o^2}{n_e^2},$$

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{(1 - \xi + \sqrt{1 - \xi}) \cos^2 \varphi}{1 - \xi \cos^2 \varphi + \sqrt{1 - \xi} \cos^2 \varphi}.$$

Выбранные материальные параметры соответствуют нематике 5СВ с  $n_o = 1.53$  и  $n_e = 1.71$  и

$\lambda = 632.8 \text{ nm}$  [19]. Расчеты проведены для толщины слоя  $L = 10.5 \cdot 10^{-4} \text{ nm}$ .

Из рис. 10 видно, что в магнитных полях, не превышающих значений  $H_F^a = 2.26$  для  $a = \pm 0.5$  и  $H_F = 2.28$  для  $a = 0$ , фазовая задержка максимальна, что отвечает однородной гомеотропной фазе. Выше пороговых полей Фредерикса появляются искажения ориентационной структуры и оптическая разность фаз монотонно уменьшается с ростом магнитного поля и при  $H_S^a = 5.07$  для  $a = \pm 0.5$  и  $H_S = 4.51$  для  $a = 0$ , когда происходит переход в состояние насыщения, фазовая задержка обращается в нуль.

## Заключение

В настоящей работе исследовано влияние флексоэлектрического эффекта на ориентационные переходы в плоском слое ферронематика, индуцированные совместным действием электрического и магнитного полей. Рассмотрен случай мягкого гомеотропного сцепления магнитных частиц с директором ЖК и мягкого планарного сцепления ЖК-матрицы с границами слоя.

В рамках континуальной теории получена система интегральных уравнений, описывающих равновесное состояние полей директора, намагниченности и концентрационного распределения магнитных частиц. Аналитически найдены выражения для пороговых полей переходов между неоднородным и однородными состояниями ФН.

Установлено, что флексоэлектрическая поляризация ЖК вносит существенный вклад в искажения ориентационной структуры ФН и влияет на значения пороговых полей переходов между сосуществующими ориентационными фазами. Показано, что флексоэффект приводит к переходу в состояние насыщения в больших магнитных и электрических полях по сравнению со случаем отсутствия флексоэлектрической поляризации. При одинаковых энергиях сцепления директора с границами слоя положительные значения параметра флексоэлектрической поляризации приводят к смещению максимального угла отклонения директора ФН в направлении электрического поля к верхней границе слоя, а отрицательные — к нижней.

Изучены пространственные искажения директора, концентрации магнитной примеси и намагниченности ФН, а также двулучепреломление проходящего через образец света как функции приложенного магнитного поля.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-02-96001).

## Список литературы

[1] Meyer R.B. // Phys. Rev. Lett. 1969. Vol. 22. P. 918–921.  
 [2] Derzhanski A., Petrov A.G., Mitov M.D. // J. Phys. (France). 1978. Vol. 39. P. 273–285.

[3] Sin-Doo Lee, Patel J.S. // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 65. P. 56–59.  
 [4] Barberi R., Barbero G., Gabbasova Z., Zvezdin A. // J. Phys. (France). 1993. Vol. 3. P. 147–164.  
 [5] Brown C.V., Mottram N.J. // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68. P. 031 702.  
 [6] Liu J., Zhang S., Yang Y., An H., Zhang Z., Yang G. // Liq. Cryst. 2007. Vol. 34. P. 1425–1431.  
 [7] de Gennes P.G., Prost J. Physics of liquid crystals. Oxford University Press, England. 1993.  
 [8] Makarov D.V., Zakhlevnykh A.N. // Mol. Cryst. Liq. Cryst. 2012. Vol. 553. P. 199–210.  
 [9] Makarov D.V., Zakhlevnykh A.N. // Soft Matter. 2012. Vol. 8. P. 6493–6503.  
 [10] Захлевных А.Н., Петров Д.А. // Вестн. Пермского ун-та. Сер.: Физика. 2014. Вып. 1 (26) С. 32–42.  
 [11] Захлевных А.Н., Петров Д.А. // Вестн. Пермского ун-та. Сер.: Физика. 2014. Вып. 2–3 (27–28) С. 42–51.  
 [12] Brochard F., de Gennes P.G. // J. Phys. (France). 1970. Vol. 31. P. 691–708.  
 [13] Burylov S.V., Raikher Yu.L. // Mol. Cryst. Liq. Cryst. 1995. Vol. 258. P. 107–122.  
 [14] Rapini A., Papoular M. // J. Phys. Colloque (France). 1969. Vol. 30. P. 4–54.  
 [15] Zakhlevnykh A.N., Sosnin P.A. // J. Magn. Magn. Mater. 1995. Vol. 146. P. 103–110.  
 [16] Zakhlevnykh A.N. // J. Magn. Magn. Mater. 2004. Vol. 269. P. 238–244.  
 [17] Makarov D.V., Zakhlevnykh A.N. // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 81. P. 051 710.  
 [18] Zakhlevnykh A.N., Petrov D.A. // J. Mol. Liq. 2014. Vol. 198. P. 220–232.  
 [19] Blinov L.M., Chigrinov V.G. Electrooptic Effects in Liquid Crystal Materials. NY: Springer-Verlag, 1994.