Л. Г. Байкова, Т. И. Песина, Э. И. Мансырев, М. Ф. Киреенко, Л. В. Тихонова, Деформация и прочность кварцевых волокон при испытании на 3-точечный изгиб с учетом нелинейной упругости стекла, *ЖТФ*, 2017, том 87, выпуск 1, 39–43

DOI: 10.21883/JTF.2017.01.44016.1764

05

Деформация и прочность кварцевых волокон при испытании на 3-точечный изгиб с учетом нелинейной упругости стекла

© Л.Г. Байкова,[1] Т.И. Песина,[1] Э.И. Мансырев,[2] М.Ф. Киреенко,[1] Л.В. Тихонова[1]

[1] Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
[2] Санкт-Петербургский политехнический университет им. Петра Великого,
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: lgbaikova@gmail.com

(Поступило в Редакцию 18 февраля 2016 г.)

Рассмотрена задача асимметричного распределения деформаций и напряжений в кварцевом волокне при испытании на 3-точечный изгиб. Выполнена оценка параметров нелинейной упругости кварцевого стекла при растяжении и сжатии на основе имеющихся литературных данных. Установлено, что учет нелинейной упругости кварцевого стекла приводит к незначительному увеличению вычисляемых значений прочности по сравнению с данными, полученными на основе линейной теории упругости.

DOI: 10.21883/JTF.2017.01.44016.1764

Введение

Вопросы прочности и деформации при разрушении кварцевых волокон продолжают привлекать внимание исследователей в связи с широким использованием этих волокон для производства оптических световодов. Современная технология производства оптических кварцевых волокон, используемых в качестве световодов, позволила получить кварцевое волокно в бездефектном состоянии, а нанесение покрытия в ходе производства волокна позволило сохранить поверхность стекла в нетронутом состоянии и обеспечить высокий уровень прочности, присущий структуре стекла [1–3]. Несмотря на то, что оптические кварцевые волокна разрабатываются уже более полувека, вопрос правильного определения их прочности остается актуальным и в настоящее время. В ФТИ исследования структурной прочности стекол проводилось с помощью метода 3-точечного изгиба стеклянных волокон [4,5]. Прочность, как максимальное растягивающее напряжение на поверхности волокна, вычислялась непосредственно по величине разрушающей нагрузки

$$\sigma = \frac{8Pl}{\pi D^3}, \qquad (1)$$

где P — разрушающая нагрузка, l — пролет между опорами, D — диаметр волокна ($l = 1.02$ mm, $D = 125\,\mu$m).

В то же время в ряде работ [6–8] показано, что как при одноосном растяжении, так и при одноосном сжатии, модуль упругости стекла не остается постоянным. Встает вопрос, в какой степени изменение модуля упругости при изгибе волокна может повлиять на определение его прочности при 3-точечном изгибе?

Недавно появилась работа [9], в которой проведен анализ изменения модуля упругости кварцевого стекла с помощью метода бриллюэновского рассеяния света. Работа выполнена на кварцевом волокне с прямоугольным сечением (толщиной $160\,\mu$m, шириной $200\,\mu$m). Было показано, что при 2-точечном изгибе волокна при деформации 6% происходит смещение нейтральной линии в область растяжения, которая таким образом сужается, а область сжатия увеличивается. Величина модуля упругости при этой деформации возрастает в области растяжения и уменьшается в области сжатия [9].

В связи с этим была поставлена задача провести расчет и анализ максимальных растягивающих напряжений, вызывающих разрушение при 3-точечном изгибе кварцевого волокна, для случая нелинейной зависимости напряжения и модуля упругости от деформации. Это особенно важно при проведении испытаний на прочность в жидком азоте, когда деформации при разрушении могут достигать значений около 18% [3,10,11]

Законы деформирования кварцевого стекла при растяжении и сжатии

В общем виде можно описать нелинейную упругость следующим уравнением, ограничиваясь кубической степенью зависимости напряжения (σ) от деформации (ε) [3]:

$$\sigma(\varepsilon) = Y_0\varepsilon + \frac{Y_1}{2}\varepsilon^2 + \frac{Y_2}{6}\varepsilon^3. \qquad (2)$$

Тогда для модуля упругости $Y(\varepsilon)$, который является производной от напряжения по деформации ($Y \equiv d\sigma/d\varepsilon$), уравнение будет иметь вид

$$Y(\varepsilon) = Y_0 + Y_1\varepsilon + \frac{Y_2}{2}\varepsilon^2, \qquad (3)$$

где Y_0 — модуль Юнга при малых деформациях, Y_1, Y_2 — параметры, определяющие нелинейную зависимость напряжения и модуля упругости от деформации.

Определение этих констант является основной трудностью при обработке результатов, получаемых с помощью методики изгиба. Для этого необходимо на

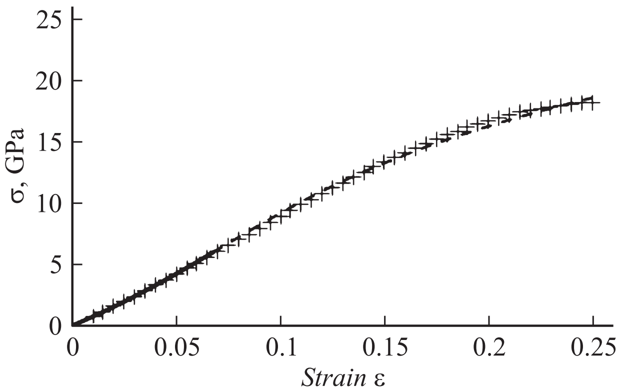

Рис. 1. Зависимость напряжения (σ) от деформации (ε) согласно выражению (4): сплошная линия — по экспериментальным данным [7] до 6%, штриховая линия — экстраполяция до деформаций > 20%, (+) — аппроксимация этой зависимости кубическим полиномом $\sigma = Y_0\varepsilon + \frac{546.4}{2}\varepsilon^2 - \frac{6531}{6}\varepsilon^3$.

основе имеющихся экспериментальных данных получить зависимость между деформацией и напряжением как для области растяжения, так и для области сжатия.

Нелинейное поведение модуля упругости оптического кварцевого волокна при одноосном растяжении наиболее полно было изучено в работе [7]. В этой работе установлено следующее выражение, связывающее напряжение и деформацию:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{Y_0} - 3.2\left(\frac{\sigma}{Y_0}\right)^2 + 12\left(\frac{\sigma}{Y_0}\right)^3, \qquad (4)$$

где $Y_0 = 72.3$ GPa.

К сожалению, экспериментальное исследование зависимости напряжения от деформации было проведено только до деформации 6%. Эта функциональная зависимость (4) была экстраполирована до деформаций > 20% и представлена в виде зависимости $\sigma(\varepsilon)$, которая приведена на рис. 1 сплошной линией до деформации 6% и продолжена штриховой линией в области экстраполяции. Чтобы получить необходимые параметры Y_1 и Y_2, зависимость $\sigma(\varepsilon)$ была затем аппроксимирована кубическим полиномом (2). В результате удалось установить следующие коэффициенты, входящие в полином (2): $Y_1 = 546.4$, $Y_2 = -6531$. Как видно из рисунка, представление зависимости $\sigma(\varepsilon)$ в области растяжения в виде полинома (2) с найденными параметрами нелинейности Y_1 и Y_2 хорошо совпадают с экспериментальной зависимостью $\sigma(\varepsilon)$, полученной в работе [7], и экстраполяцией ее до деформации $\sim 25\%$.

Следующей задачей являлось определение зависимости модуля упругости от деформации в области сжатия. Поведение модуля упругости кварцевого стекла при одноосном сжатии было изучено в работе [8]. Экспериментально показано, что в области сжатия до деформации 6% модуль упругости уменьшается согласно уравнению

$$Y = Y_0(1 + \alpha|\varepsilon|), \qquad (5)$$

где коэффициент $\alpha = -5.5$. Таким образом, следует, что в выражении (3) $Y_1 = Y_0\alpha$, и при $Y_0 = 72.3$ GPa значение параметра $Y_1 = -398$.

К сожалению, в настоящей работе исследование было проведено в диапазоне деформаций сжатия до 6%, где наблюдалось только снижение модуля упругости. Из работ по всестороннему сжатию [12] известно, что модуль упругости сначала падает, а потом начинает расти. Поэтому для более полного описания нелинейного поведения модуля упругости в области сжатия при больших деформациях необходимо использовать полином второй степени в зависимости модуля от деформации (см. (3)). Как упомянуто выше, в работе [9] с помощью методики бриллюэновского рассеяния света было проведено исследование упругих модулей при изгибе кварцевого волокна с прямоугольным сечением. Было обнаружено, что в области сжатия модуль Юнга уменьшается до значения ~ 60 GPa. К сожалению, точное положение минимума, после которого модуль упругости должен расти, не было установлено. На основании данных, приведенных в [9], можно предположить, что минимальное значение модуля упругости ~ 60 GPa находится в области деформаций сжатия $\sim 6.5\%$. Поскольку производная функции $Y(\varepsilon)$ в минимуме равна нулю, то дифференцируя выражение (3), получим $Y_1 + Y_2|\varepsilon| = 0$. Тогда при $Y_1 = -398$ и $|\varepsilon| = 0.065$ значение параметра $Y_2 = 6123$. Таким образом, нелинейное поведение модуля упругости и напряжения в области сжатия можно охарактеризовать коэффициентами $Y_1 = -398$, $Y_2 = 6123$.

Закон деформирования при изгибе

На основании выражения (2) и найденных параметров нелинейности Y_1 и Y_2 для областей растяжения и сжатия закон деформирования кварцевого волокна при испыта-

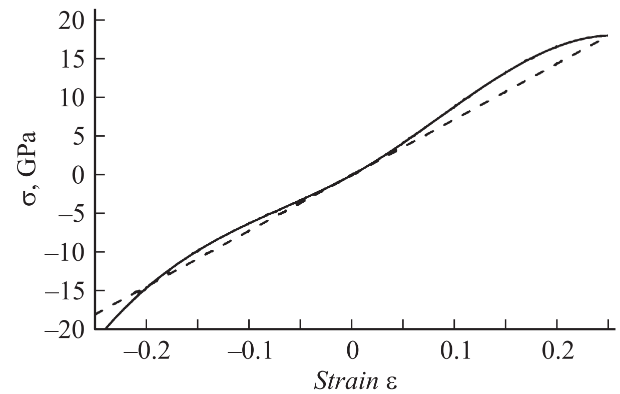

Рис. 2. Диаграмма растяжения–сжатия кварцевого волокна: сплошная линия — согласно закону деформирования (6), штриховая линия — согласно закону Гука.

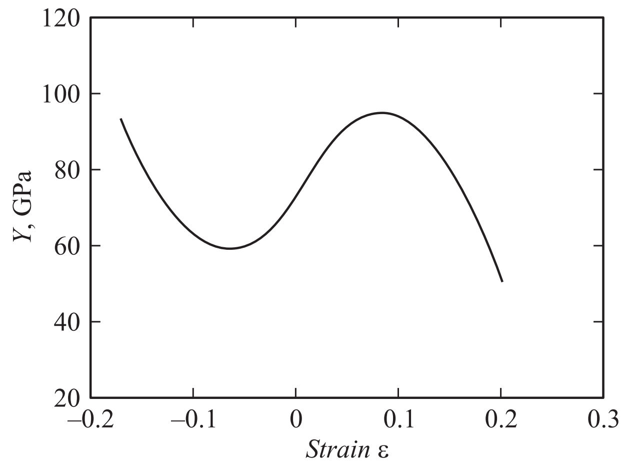

Рис. 3. Зависимость модуля упругости от деформации согласно уравнению (7).

нии на изгиб следует записать в следующем виде:

$$\sigma(\varepsilon)=\begin{cases}Y_0\varepsilon+\frac{546.4}{2}\varepsilon^2-\frac{6531}{6}\varepsilon^3 & \text{при}\quad \varepsilon\geq 0,\\ -\left[Y_0|\varepsilon|-\frac{398}{2}(|\varepsilon|)^2+\frac{6123}{6}(|\varepsilon|)^3\right] & \text{при}\quad \varepsilon<0.\end{cases} \tag{6}$$

Диаграмма растяжения–сжатия для этого закона представлена на рис. 2 (сплошная линия). Для сравнения на этом же рисунке штриховой линией представлена диаграмма растяжения–сжатия для закона Гука: $\sigma = Y_0\varepsilon$.

Зависимость модуля упругости от деформации, согласно выражению (3) и найденным параметрам нелинейности, запишется следующим выражением:

$$Y\varepsilon=\begin{cases}Y_0+546.4\varepsilon-\frac{6531}{2}\varepsilon^2 & \text{при}\quad \varepsilon\geq 0,\\ Y_0-398|\varepsilon|+\frac{6123}{2}(|\varepsilon|)^2 & \text{при}\quad \varepsilon<0.\end{cases} \tag{7}$$

Графически она представлена на рис. 3. Во всех выражениях принято $Y_0 = 72.3$ GPa.

Как следует из закона деформирования (6) и рис. 2, зависимость между напряжениями и деформациями различна при растяжении и сжатии, т. е. задача их нахождения является асимметричной.

В этом случае нейтральный слой в поперечном сечении волокна не будет совпадать со срединным слоем, а сместится в сторону центра кривизны оси волокна. Согласно гипотезе Кирхгофа–Лява [13], распределение деформаций по высоте поперечного сечения будет иметь вид

$$\varepsilon(\varepsilon_0, y, \rho)=\varepsilon_0-\frac{y}{\rho}, \tag{8}$$

где ε_0 — деформация в срединном слое, ρ — радиус кривизны нейтрального слоя, y — расстояние от произвольного слоя до срединного в рассматриваемом поперечном сечении.

Для определения деформаций в волокне, а затем и напряжений, необходимо определить положение нейтрального слоя и радиус кривизны нейтрального слоя в поперечном сечении волокна. Они находятся из следующих условий равновесия: 1) сумма внутренних сил упругости в поперечном сечении волокна равна нулю и 2) их момент равен изгибающему моменту. Для этого нужно решить два уравнения статики

$$\int_A \sigma dA = 0, \qquad \int_A \sigma y dA = M_{\text{bend}}, \tag{9}$$

где интегрирование ведется по области поперечного сечения волокна A.

Нормальная сила (N) в поперечном сечении как функция радиуса кривизны нейтрального слоя (ρ) и деформации в срединном слое (ε_0) для круглого сечения выразится формулой

$$N(\rho, \varepsilon_0)=\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}}\sigma\left(\varepsilon(\varepsilon_0, y, \rho)\right)2\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2-y^2}dy. \tag{10}$$

А изгибающий момент (M_{bend}) как функция радиуса кривизны нейтрального слоя и деформации в срединном слое, определяется выражением

$$M_{\text{bend}}(\rho, \varepsilon_0)=-\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}}\sigma\left(\varepsilon(\varepsilon_0, y, \rho)\right)y2\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2-y^2}dy. \tag{11}$$

Таким образом, чтобы определить деформации и напряжения для предложенного закона деформирования кварцевого волокна (6), необходимо решить систему двух уравнений (9), используя выражения (10) и (11) применительно к экспериментальным данным, полученным при испытании оптического кварцевого волокна на изгиб.

Результаты расчета деформаций и напряжений при разрушении волокна с учетом нелинейной упругости стекла

При испытаниях на 3-точечный изгиб фиксировалась разрушающая нагрузка P, приложенная в центре пролета [14,15], и разрушающий изгибающий момент определялся по следующей формуле: $M = Pl/4$. В зависимости от условий испытания (на воздухе при температуре 20°C и относительной влажности 35% или в жидком азоте при температуре −196°C) разрушающая нагрузка и, соответственно, изгибающий момент изменялись в широких пределах. На рис. 4 приведены данные для изгибающего момента при разрушении оптического кварцевого волокна на воздухе и в жидком азоте, которые, как и ранее в работе [15], представлены в виде распределения Вейбулла. Как следует из рис. 4 (кривая *1*), при испытании на воздухе наблюдается узкое распределение значений изгибающего момента при разрушении, поэтому расчет проводился только для среднего значения момента

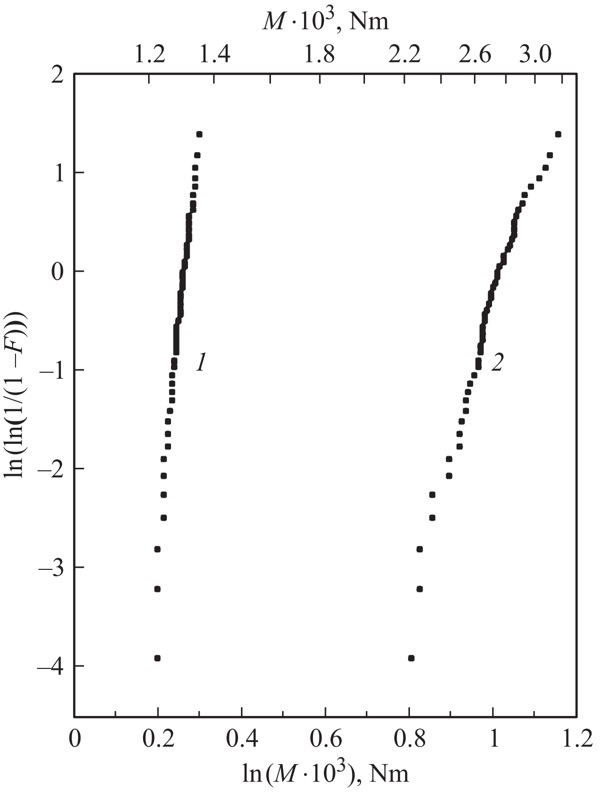

Рис. 4. Вейбулловское распределение изгибающих моментов при испытании на 3-точечный изгиб на воздухе (*1*) и в жидком азоте (*2*). Среднее значение $M = 1.275 \cdot 10^{-3}$ Nm при испытании на воздухе и $M = 2.678 \cdot 10^{-3}$ Nm при испытании в жидком азоте (в каждом случае испытано по 50 образцов).

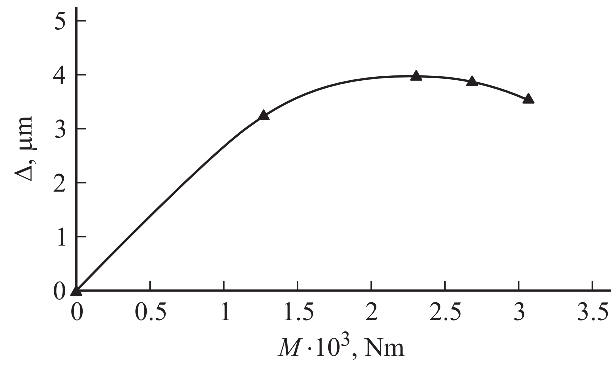

Рис. 5. Зависимость смещения нейтрального слоя (Δ) от изгибающего момента (M).

($M = 1.275 \cdot 10^{-3}$ Nm). При испытаниях в жидком азоте наблюдалось широкое распределение значений изгибающего момента (рис. 4, кривая *2*). В этом случае расчет проводился для среднего значения $M = 2.678 \cdot 10^{-3}$ Nm, а также для минимального $M = 2.3 \cdot 10^{-3}$ Nm, вычисленного по 10% нижних значений, и для максимального $M = 3.06 \cdot 10^{-3}$ Nm (по 10% верхних значений).

Решение поставленной задачи для каждого из этих моментов выполнено с помощью пакета прикладных программ Mathcad 15.0, реализующих численные итерационные методы решения системы нелинейных трансцендентных алгебраических уравнений (9) и методы численного интегрирования, реализующие в процессе итераций вычисление интегралов (10) и (11).

Для каждого значения изгибающего момента были определены радиус кривизны нейтрального слоя (ρ) и деформация в срединном слое (ε_0). Деформация в срединном слое получилась отрицательной, что свидетельствует о смещении нейтрального слоя от срединного в сторону области растяжения в поперечном сечении волокна. Смещение нейтрального слоя вычислялось по формуле $\Delta = |\varepsilon_0|\rho$ и приведено в таблице и на рис. 5.

Вычисленные значения максимальных деформаций и напряжений для каждого изгибающего момента представлены в таблице и на рис. 6. На рис. 6, *a* представлена зависимость деформации от величины изгибающего момента при 3-точечном изгибе: штриховая линия соответствует расчету деформации при условии $Y_0 = \text{const}$, сплошная линия проведена через точки, показывающие величину деформаций, вычисленных с учетом нелинейной упругости. Последние на $\sim 10\%$ ниже, чем значения деформации, полученные на основе линейной теории упругости.

Сравним результаты расчета напряжений, полученные при решении асимметричной задачи, с данными, полученными ранее в работе [5], когда расчет напряжений проводился по формуле (1) без учета нелинейности модуля упругости (см. также таблицу). Графически это представлено на рис. 6, *b*. Результаты показаны в ви-

Результаты расчета максимальных деформаций и напряжений в кварцевом волокне при 3-точечном изгибе с учетом нелинейной упругости стекла и при постоянном модуле упругости Y_0

Изгибающий момент $M \cdot 10^3$ Nm	Расчет по уравнениям (10), (11)					Расчет по формуле (1)	
	смещение нейтрального слоя Δ, μm	$\varepsilon_{\text{tens}}$, %	σ_{tens} GPa	$\varepsilon_{\text{comp}}$, %	σ_{comp}, GPa	ε, %	σ, GPa
1.275	3.26	8.6	7.6	−9.6	−6.0	9.3	6.7
2.300	3.96	15.0	13.4	−17.1	−11.6	16.6	12.0
2.678	3.87	17.3	15.0	−19.6	−14.0	19.4	14.0
3.060	3.36	19.6	16.5	−22.0	−17.2	22.0	16.0

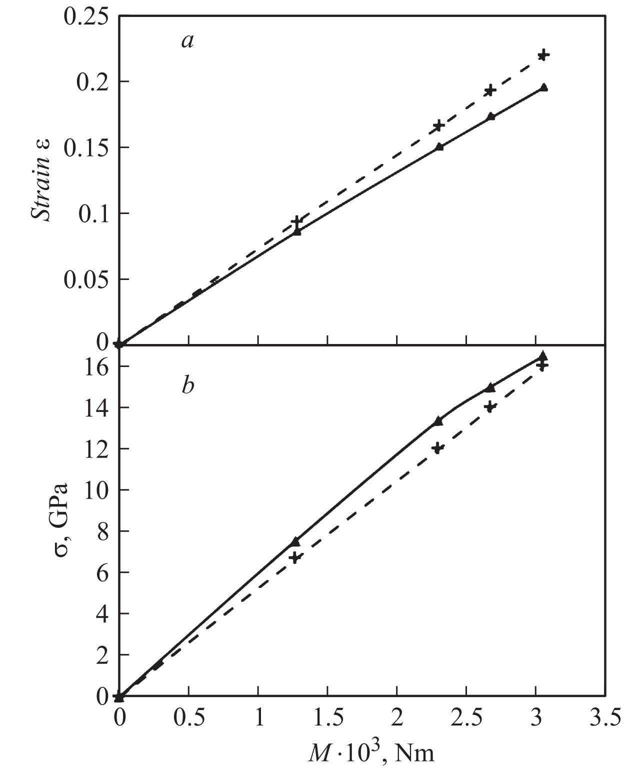

Рис. 6. Зависимость деформации при растяжении (a) и растягивающего напряжения (b) от изгибающего момента. Сплошные линии — согласно закону деформирования (6) и формулам (10), (11), штриховые линии — согласно закону Гука.

де точек, представляющих собой значения прочности, вычисленные для каждого изгибающего момента по формуле (1) для случая линейной упругости (штриховая линия) и по формулам (10), (11) для случая нелинейной упругости (точки соединены сплошной линией). Штриховая линия на рис. 6, b демонстрирует прямую пропорциональную зависимость прочности от величины изгибающего момента, как и следует из теории линейной упругости. Сплошная линия демонстрирует более высокие значения прочности, полученные при учете нелинейности упругости. Расхождение между значениями прочности, полученными при решении этих двух задач, не является постоянным и в среднем не превышает 10%.

Из представленных данных можно сделать вывод о том, что расчет по формулам линейной теории упругости дает несколько заниженные значения прочности по сравнению с расчетами на основе уравнений, включающих параметры нелинейного поведения модулей упругости кварцевого стекла при растяжении и сжатии.

Следует отметить, что сделанные количестввенные оценки параметров нелинейной упругости Y_1 и Y_2 для кварцевого стекла не являются окончательными, поскольку они базируются на ограниченном экспериментальном материале, представленном в работах [7–9]. Для получения более точных значений параметров нелинейности необходимы эксперименты по растяжению и сжатию кварцевого стекла при больших деформациях.

Заключение

Оценки значений прочности оптического кварцевого волокна при испытании на 3-точечный изгиб, полученные прямым расчетом по формулам линейной теории упругости, близки или несколько занижены по сравнению со значениями прочности, вычисленными с учетом нелинейной упругости кварцевого стекла. При отсутствии информации о параметрах нелинейной упругости структурную прочность стекла любого состава можно приближенно с достаточной степенью точности оценивать с помощью методики 3-точечного изгиба по формулам линейной теории упругости.

Авторы выражают свою благодарность Д.С. Рыбину за проведение математической обработки данных работы [7].

Список литературы

[1] *Kurkjian C.R., Paek U.C.* // Appl. Phys. Lett. 1983. Vol. 42. N 9. P. 251–253.
[2] *Kurkjian C.R., Gupta P.K., Brow R.K., Lower N.P.* // J. Non-Cryst. Sol. 2003. Vol. 316. P. 114–124.
[3] *Gupra P.K., Kurkjian C.R.* // J. Non-Cryst. Sol. 2005. Vol. 351. P. 2324–2328.
[4] *Пух В.П., Песина Т.И., Иванов М.И.* // ФХС. 1981. Т. 7. Вып. 3. С. 328–331.
[5] *Пух В.П., Байкова Л.Г., Киреенко М.Ф., Тихонова Л.В., Казанникова Т.П., Синани А.Б.* // ФТТ. 2005. Т. 47. Вып. 5. С. 850–855.
[6] *Mallinder F.P., Proctor B.A.* // Phys. Chem. Glasses. 1964. Vol. 5. P. 91–103.
[7] *Krause J.T., Testardi L.R., Thruston R.R.* // Phys. Chem. Glasses. 1979. Vol. 20. N 6. P. 135–139.
[8] *Griffioen W.* // J. Am. Ceram. Soc. 1992. Vol. 75. N 10. P. 2692–2696.
[9] *Guerette M., Huang L.* // Am. Ceram. Soc. Bull. 2015. Vol. 94. N 4. P. 40–43.
[10] *France P.W., Duncan W.J., Smith D.G., Beales K.J.* // J. Mat. Sci. 1983. Vol. 18. P. 785–792.
[11] *Kurkjian C.R., Gupta P.K., Brow R.K.* // Int. J. Appl. Glass Sci. 2010. Vol. 1. N 1. P. 27–37.
[12] *Kondo K., Satoshi Lio, Sawaoka A.* // J. Appl. Plys. 1981. Vol. 52. N 4. P. 2826–2831.
[13] *Ляв А.* Математическая теория упругости. М., Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
[14] *Байкова Л.Г, Песина Т.И., Киреенко М.Ф., Тихонова Л.В., Kurkjian C.R.* // ЖТФ. 2015. Т. 85. Вып. 6. С. 83–86.
[15] *Байкова Л.Г., Песина Т.И., Kurkjian C.R., Tang Zh., Киреенко М.Ф., Тихонова Л.В., Пух В.П.* // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 10. С. 55–60.