



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. С. Гинзбург, В. А. Кубарев, В. Л. Черепенин, Вынужденное рассеяние волн на релятивистском электронном пучке в присутствии однородного магнитного поля: нелинейная теория эффекта двойного циклотронного резонанса, *ЖТФ*, 1985, том 55, выпуск 1, 53–59

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.135.195.180

8 января 2025 г., 06:06:57



УДК 538.56

**ВЫНУЖДЕННОЕ РАССЕЯНИЕ ВОЛН  
НА РЕЛЯТИВИСТСКОМ ЭЛЕКТРОННОМ ПУЧКЕ  
В ПРИСУТСТВИИ ОДНОРОДНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ:  
НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ЭФФЕКТА  
ДВОЙНОГО ЦИКЛОТРОННОГО РЕЗОНАНСА**

*Н. С. Гинзбург, В. А. Кубарев, В. А. Черепенин*

Исследована нелинейная стадия режима двойного циклотронного резонанса электронов с полями сигнала и накачки в ЛСЭ, основанных на вынужденном рассеянии волн и вынужденном ондуляторном излучении. Показано, что максимально достижимое значение КПД в режиме двойного резонанса, как и в режимах, далеких от резонанса, обратно пропорционально числу осцилляций  $N$ , совершаемых электронами в полях сигнала и накачки, и относительно невелико:  $\eta \sim N^{-1} \ll 1$ . Однако оптимальные напряженности полей сигнала и накачки в исследованном режиме в  $\sqrt{N}$  раз меньше, чем в режимах, далеких от циклотронного резонанса.

1. Исследованию эффекта двойного резонанса [1, 2], состоящего в том, что при наложении однородного магнитного поля в устройствах, основанных на вынужденном рассеянии волн и вынужденном ондуляторном излучении, в циклотронном резонансе с электронами одновременно оказываются волны сигнала и накачки

$$\omega_s - k_s v_{\parallel} \simeq \omega_i + k_i v_{\parallel} \simeq \omega_H, \quad (1)$$

в настоящее время посвящено большое число публикаций [3-8]. Все они преимущественно касались линейной теории эффекта. В данной работе, являющейся продолжением [6], для генераторов с высокодобротными резонаторами на сигнальную волну проведено рассмотрение нелинейной стадии процесса рассеяния в режиме двойного резонанса. Определена эффективность передачи энергии пучка сигнальной волне, найдены оптимальные соотношения между напряженностями полей сигнала и накачки.

2. В случае встречного коллинеарного рассеяния двух циркулярно-поляризованных волн постоянной амплитуды с фазовыми скоростями, равными скорости света  $A_{s,i}^+ = A_x + iA_y = A_{s,i} e^{i(\omega_{s,i} t \mp k_{s,i} z)}$ , на релятивистском электронном пучке, фокусируемом однородным магнитным полем  $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{z}_0$ , движение электронов описывается уравнениями <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \frac{dp_+}{dz} &= -\frac{e}{cv_{\parallel}} \left[ \omega_s A_s \left(1 - \frac{v_{\parallel}}{c}\right) e^{i\theta_s} + \omega_i A_i \left(1 + \frac{v_{\parallel}}{c}\right) e^{i\theta_i} \right], \\ \frac{d\varepsilon}{dz} &= -\frac{e}{c} \operatorname{Re} \left[ \frac{P_+^*}{p_{\parallel}} (\omega_s A_s e^{i\theta_s} + \omega_i A_i e^{i\theta_i}) \right], \\ \frac{d\theta_s}{dz} &= \frac{\omega_s}{v_{\parallel}} - k_s - \frac{sH_0}{cp_{\parallel}}, \quad \frac{d\theta_i}{dz} = \frac{\omega_i}{v_{\parallel}} + k_i - \frac{eH_0}{cp_{\parallel}}. \end{aligned} \quad (2)$$

<sup>1</sup> Рассеяние поперечно неоднородных, например волноводных, полей в условиях двойного циклотронного резонанса также описывается уравнением (2). При этом под величинами  $A_{s,i}^+$  следует понимать циркулярно-поляризованные компоненты волн, взятые на невозмущенной траектории электрона [9].

Здесь  $p_+ = (p_x + ip_y)e^{-i \int_0^z \omega_H dt}$  — поперечный импульс электрона;  $\epsilon = mc^2\gamma$  — его энергия;  $\theta_{s,i} = \omega_{s,i}t \mp k_{s,i}z - \int_0^t \omega_H dt$  — циклотронные фазы;  $\omega_H = eH_0/mc\gamma$  — гиро-частота;  $A_{s,i}$  — амплитуды вектор-потенциалов волн сигнала и накачки;  $p_{\parallel} = m\gamma v_{\parallel}$  — продольный импульс электрона, связанный с энергией и поперечным импульсом с помощью соотношения

$$p_{\parallel} = \sqrt{\epsilon^2/c^2 - m^2c^2 - |p_+|^2}. \quad (3)$$

После перехода к безразмерным обозначениям уравнения (2) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{dp'_+}{dZ} &= -[\alpha_s(\beta_{\parallel}^{-1} - 1)e^{i\theta_s} + \Gamma\alpha_i(\beta_{\parallel}^{-1} + 1)e^{i\theta_i}], \\ \frac{dw}{dZ} &= \text{Re} \left[ \frac{p'_+}{p'_i\gamma_0} (\alpha_s e^{i\theta_s} + \Gamma\alpha_i e^{i\theta_i}) \right], \\ \frac{d\theta_s}{dZ} &= \beta_{\parallel}^{-1} - 1 - \frac{\omega_{H0}}{\omega_s p'_i}, \quad \frac{d\theta_i}{dZ} = \Gamma \left( \beta_{\parallel}^{-1} + 1 - \frac{\omega_{H0}}{\omega_i p'_i} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $Z = \omega_s z/c$ ,  $p'_+ = p_+/mc$ ,  $p'_{\parallel} = p_{\parallel}/mc$ ,  $\alpha_{s,i} = eA_{s,i}/mc^2$ ,  $w = 1 - \epsilon/\epsilon_0$ ,  $\beta_{\parallel} = v_{\parallel}/c$ , индекс «0» указывает начальные значения величин.

Рассмотрим далее случай ультрарелятивистских энергий электронов  $\gamma_0 \gg 1$ , когда отношение частот волн достигает значения

$$\Gamma = \frac{\omega_i}{\omega_s} = \frac{1 - \beta_{\parallel 0}}{1 + \beta_{\parallel 0}} \simeq \frac{1}{4\gamma_0^2} \ll 1. \quad (5)$$

Амплитуды волн будем считать малыми

$$\alpha_{s,i} \ll 1. \quad (6)$$

При этом невелики относительные потери энергии электронов, а также максимальное значение поперечного импульса, который может приобрести электрон в поле накачки, оставаясь в синхронизме с сигнальной волной [2]

$$|w| \sim \alpha_i^{2/3}, \quad |p'_+| \sim \alpha_i^{1/3}. \quad (7)$$

В таких условиях для продольного импульса и скорости электронов из соотношения (3) получим следующие приближенные выражения:

$$\begin{aligned} p'_{\parallel} &= \gamma_0(1 - w) \left[ 1 - \frac{\gamma_0^{-2}(1 + |p'_+|^2)}{2} (1 - 2w) \right], \\ \beta_{\parallel} &= \left[ 1 - \frac{\gamma_0^{-2}(1 + |p'_+|^2)}{2} (1 - 2w) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя (8) в уравнения (4) и сохраняя в правых частях уравнений только главные члены разложений по малым величинам  $\gamma_0^{-1}$ ,  $\Gamma$ ,  $|w|$ ,  $|p'_+|$ , приведем эти уравнения к асимптотическому виду [2, 6]

$$\begin{aligned} dp'_+/d\zeta &= -(\alpha_s e^{i\theta_s} + \alpha_i e^{i\theta_i}), \\ dw/d\zeta &= \text{Re}(2p'_+ \alpha_s e^{i\theta_s}), \\ d\theta_s/d\zeta &= \delta_s + w + |p'_+|^2, \quad d\theta_i/d\zeta = \delta_i - w, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\zeta = z/2\gamma_0^2$ ;  $\delta_s = 2\gamma_0^2(1 - \beta_{\parallel 0} - \omega_{H0}/\omega_s)$ ,  $\delta_i = 2\gamma_0^2[(\omega_i/\omega_s)(1 + \beta_{\parallel 0}) - \omega_{H0}/\omega_s]$  — начальные расстройки циклотронных резонансов с полями сигнала и накачки.

Для прямолинейного моноскоростного на входе в пространство взаимодействия электронного пучка граничные условия к уравнениям (5) имеют вид

$$p'_+|_{\zeta=0} = 0, \quad w|_{\zeta=0} = 0, \quad \theta_{s,i}|_{\zeta=0} = \theta_{s,i}^0, \quad 0 < \theta_{s,i} \leq 2\pi. \quad (10)$$

Для проведения численных расчетов целесообразно сократить число независимых параметров в уравнениях (5), а также исключить зависимость решения от начальной фазы электрона в поле каждой из волн. Это достигается с помощью замены переменных

$$\vartheta_s = \theta_s - \theta_s^0, \quad \vartheta_i = \theta_i - \theta_i^0, \quad \rho = \alpha_i^{-1/2} \rho'_i e^{-i\vartheta_i^0}, \quad u = \alpha_i^{-2/2} u, \quad (11)$$

в результате которой уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} d\rho/d\xi &= -(ae^{i(\vartheta_s + \varphi_0)} + e^{i\vartheta_i}), \\ du/d\xi &= \text{Re}(2\rho^* \alpha e^{i(\vartheta_s + \varphi_0)}), \\ d\vartheta_s/d\xi &= \Delta_s + u + |\rho|^2, \quad d\vartheta_i/d\xi = \Delta_i - u. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $\varepsilon = \alpha_i^{2/2} \xi$ ,  $\Delta_{s,i} = \alpha_i^{-2/2} \delta_{s,i}$ ,  $\varphi_0 = \theta_{s0} - \theta_{i0}$ ,  $0 < \varphi_0 \leq 2\pi$ .

Электронный КПД определяется соотношением

$$\eta = \alpha_i^{2/2} \bar{\eta}, \quad \bar{\eta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi_k, \varphi_0) d\varphi_0, \quad (13)$$

где  $\xi_k = \alpha_i^{2/2} k_s L / 2\gamma_0^2$  — приведенная длина рабочего пространства.

Следует отметить, что уравнения (12) и приведенные ниже результаты их решения описывают также нелинейную стадию эффекта двойного циклотронного резонанса в убитронах, где поле накачки представляет собой периодическое магнитостатическое поле ондулятора:  $\omega_i = 0$ ,  $k_i = 2\pi/d$ ,  $d$  — период ондулятора. В отличие от устройств, основанных на вынужденном рассеянии, в убитронах усреднение по начальным фазам электронов относительно поля накачки отсутствует и величина  $\theta_{i0}$  является дополнительным параметром задачи, зависимость от которого может быть исключена с помощью замены переменных (11).

3. Рассмотрим сначала процесс группировки электронов в условиях двойного циклотронного резонанса (1) на качественном уровне. Под действием резонансного поля волны накачки происходит линейное по продольной координате нарастание поперечного импульса электронов  $\rho \sim \xi$ , соответственно уменьшается их поступательная скорость  $\beta_{\parallel} = \beta_{\parallel 0} - \gamma_0^{-2} \alpha_i^{1/2} |\rho|^2 / 2$ . Одновременно происходит модуляция электронного пучка по энергиям  $u \sim (\xi \alpha / \Delta_s) \cos \varphi_0$ , приводящая к группировке электронов. В результате изменение фаз электронов относительно сигнальной волны описывается следующим приближенным соотношением:

$$\theta_s = \theta_{s0} + \bar{\theta}_s + G(\xi) \cos \varphi_0, \quad (14)$$

где  $\bar{\theta}_s = \Delta_s \xi + \xi^{2/2}$ ;  $G(\xi) = (\alpha / \Delta_s) \xi^2$ .

Наиболее эффективный энергообмен электронов с сигнальной волной должен осуществляться на длинах  $\xi_{\text{от}}$ , соответствующих медленному изменению средней фазы сгустка  $d\bar{\theta}/d\xi = 0$ , что возможно при  $\Delta_s < 0$ , когда

$$\xi_{\text{от}} = |\Delta_s|^{1/2}, \quad \bar{\theta}_s(\xi_{\text{от}}) = -2/3 \cdot |\Delta_s|^{3/2}. \quad (15)$$

Если при этом сгусток попадает в центр тормозящей фазы поля сигнала  $\bar{\theta}_s(\xi_{\text{от}}) \simeq -2\pi n$ , то он эффективно отдает энергию этой волне. Поэтому существует последовательность зон с положительным КПД, расположенных вблизи следующих значений начальных расстроек синхронизма:

$$\Delta_{sn} \simeq -(3\pi n)^{2/3}. \quad (16)$$

Степень группировки электронного пучка удобно характеризовать величиной амплитуды первой гармоники ВЧ тока  $I = J_1(G)$ , где  $J_1$  — функция Бесселя первого порядка. Наилучшая группировка достигается при условии  $G(\xi) = \mu_1 = 1.84$ , что соответствует длине

$$\xi_{\text{гп}} \simeq \left( \frac{\mu_1 \Delta_s}{\alpha} \right)^{1/2} \simeq \left( \frac{\mu_1}{\alpha} \right)^{1/2} \xi_{\text{от}}. \quad (17)$$

Максимальный КПД должен достигаться при условии  $\alpha \simeq \mu_1$ , когда  $\xi_{гр} \simeq \xi_{ср}$ . Эти оценки подтверждаются приведенными ниже результатами численного решения уравнений движения.

4. Численное моделирование нелинейной стадии процесса вынужденного рассеяния осуществлялось решением уравнений (12) с помощью метода крупных

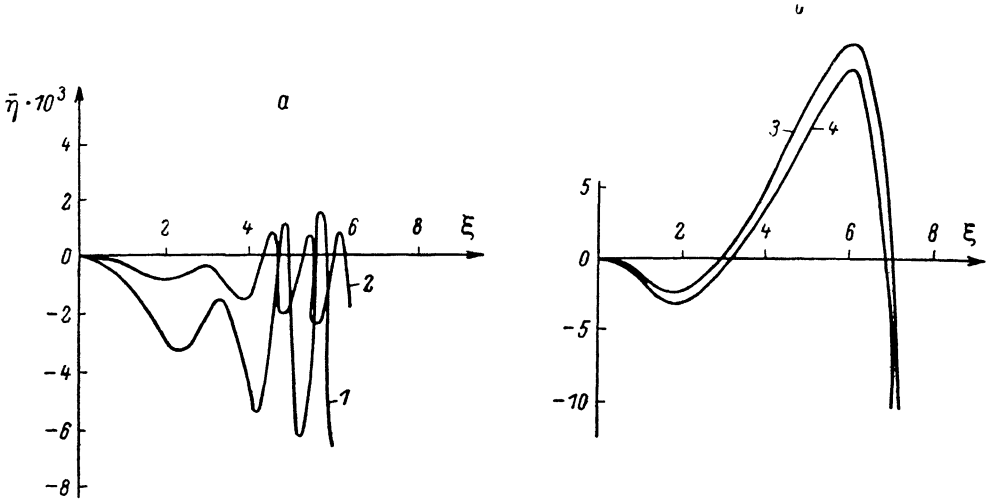
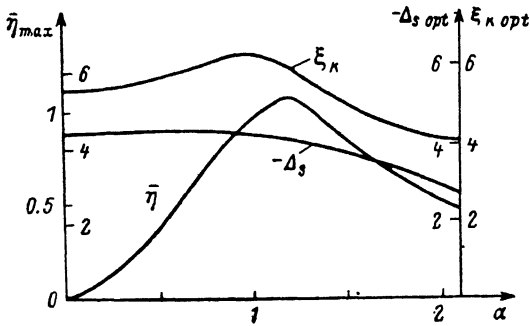


Рис. 1. Зависимости приведенного КПД  $\bar{\eta}$  от длины пространства взаимодействия  $\xi$  в режиме слабого сигнала ( $\alpha=0.1$ ,  $\Delta_s=0$ ) при различных расстройках циклотронного резонанса электронов с сигнальной волной  $\Delta_s$ : 1 — 2, 2 — 4, 3 — 4.4, 4 — 4.5.

частиц. Разностная начальная фаза  $\varphi_0$  выбиралась равномерно в интервале  $(0, 2\pi)$ :  $\varphi_k = 2\pi(k-1)/N$ ,  $k=1, 2, \dots, N$ . При расчетах число крупных частиц  $N$  обычно равнялось 20.<sup>2</sup> Далее кроме п. 5 рассматривается случай точного циклотронного резонанса электронов с волной накачки:  $\Delta_s=0$ , когда раскачка поперечных осцилляций электронов наиболее сильна.



Сравнение результатов линейной теории [6] с результатами, полученными численным интегри-

Рис. 2. Максимальное значение приведенного КПД  $\bar{\eta}$ , оптимальная длина  $\xi_{k,opt}$  и расстройка  $\Delta_{s,opt}$  в зависимости от амплитуды сигнала  $\alpha$  в первой зоне усиления ( $n=1$ ).

рованием уравнений (12) в режиме малого сигнала ( $\alpha \ll \alpha_c$ ), показало их совпадение. Проведенные расчеты подтверждают вывод о существовании чередующихся зон усиления и поглощения в зависимости от параметра начальной расстройки  $\Delta_s$  циклотронного резонанса электронов с сигнальной волной. Характерные зависимости приведенного КПД  $\bar{\eta}$  от длины  $\xi$  существенно отличаются в случае положительных и отрицательных расстроек (рис. 1). Это связано с тем, что при  $\Delta_s < 0$  по мере раскачки поперечных осцилляций электроны попадают в синхронизм с сигнальной волной (см. п. 3). В случае  $\Delta_s > 0$  синхронизм не достигается ни при каких значениях длины. В результате «ширина» зон усиления по длине  $\xi$  и максимальный КПД больше при отрицательных значениях расстроек, чем при положительных.

<sup>2</sup> Для контроля точности вычислений решения приближенных асимптотических уравнений (12) сравнивались с решением полных уравнений (4). В соответствии с (6) эти решения совпадали при достаточно малых амплитудах обеих волн:  $\alpha_{s,i} \ll 10^{-2}$ .

При увеличении амплитуды сигнала КПД увеличивается, достигает максимума и затем падает (рис. 2). Нелинейные эффекты начинают проявляться при значениях параметра  $\alpha \geq 0.1$ . Насыщение роста КПД в основном определяется смещением средней фазы сгустка в ускоряющую фазу поля сигнальной волны (рис. 3). При чрезмерной амплитуде сигнала наблюдается поглощение.

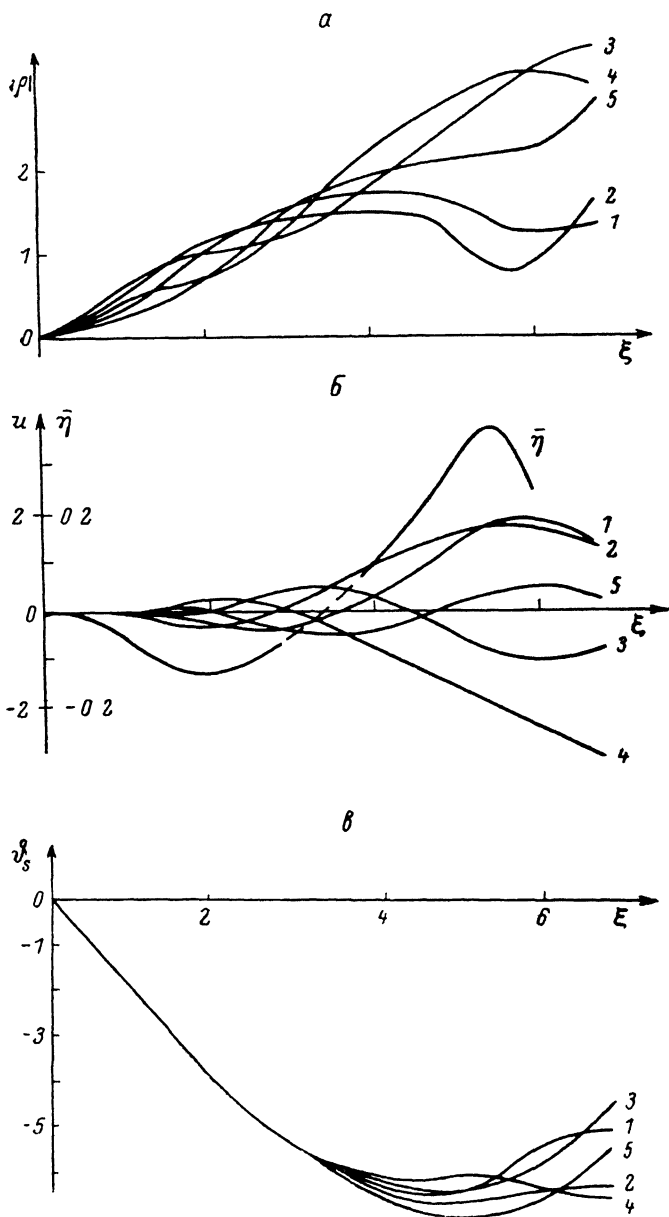


Рис. 3. Зависимости поперечных импульсов (а), энергий (б) и фаз частиц относительно сигнальной волны (в) от длины пространства взаимодействия.  $\alpha=0.5$ ,  $\Delta_s=-4.4$ ,  $\Delta_s=0$ ,  $N=5$ .

Следует отметить, что при достаточно больших амплитудах сигнала ( $\alpha \sim 1$ ) его влияние на раскачку поперечных осцилляций электронов становится соизмеримым с действием волны накачки. Это приводит к изменению картины зон усиления по сравнению с имеющей место в режиме малого сигнала. Происходит сдвиг зон (рис. 4), следствием которого является возникновение режимов жесткой генерации. В таких режимах на фиксированной частоте сигнал малой ам-

плитуды поглощается, а при превышении амплитуды сигнала некоторого порогового значения — усиливается.

Результаты линейной и нелинейной теории показывают возможность получения генерации и при положительных значениях расстройки  $\Delta_s$ . Отношение частот сигнала и накачки в этом случае определяется выражением

$$\omega_s/\omega_i \simeq 4\gamma_0^2/(1 - \alpha_i^{2/3}\Delta_s) \quad (18)$$

и может превышать кинематическое значение  $4\gamma_0^2$ . Однако подобный режим генерации характеризуется низким приведенным КПД, а также сильной чувствительностью к разбросу параметров электронного пучка вследствие малой ширины зон усиления (рис. 1, а).

5. Приведенные выше результаты получены в предположении точного циклотронного резо-

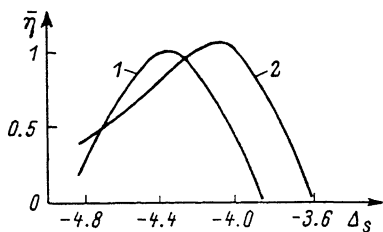


Рис. 4. Сдвиг первой зоны усиления при больших амплитудах сигнала:  $\alpha=1$  (1) и  $1.5$  (2).

нанса электронов с волной накачки. Этот случай оптимален для раскачки поперечных осцилляций электронов, но неоптимален для получения комплексных электронных сгустков, длительное время живущих в тормозящей фазе поля волны. Как видно из рис. 5, КПД может быть значительно увеличен

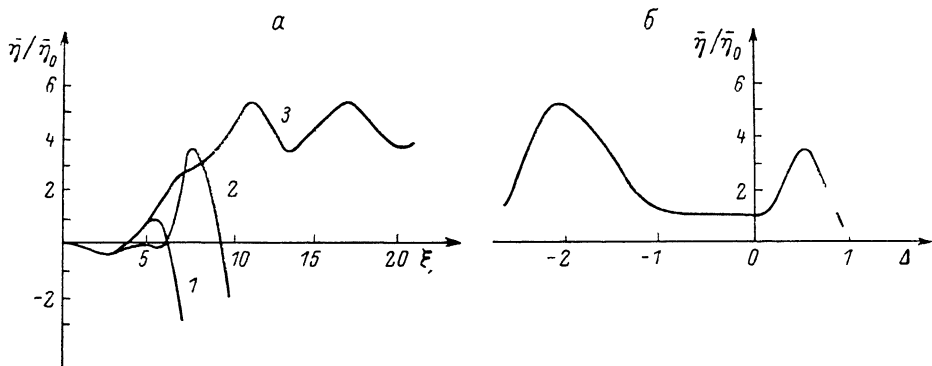


Рис. 5. Влияние расстройки циклотронного резонанса электронов с полем накачки  $\Delta_i$  на эффективность энергообмена.

$\alpha=0.5$ ,  $\Delta_s=-4.4$ . а — зависимости КПД от длины при  $\Delta_i=0$  (1),  $0.5$  (2) и  $-2$  (3); б — зависимость максимального КПД от расстройки  $\Delta_i$  ( $\eta_0$  — КПД при  $\Delta_i=0$ ).

при наличии начальной расстройки циклотронного резонанса электронов с волной накачки, удовлетворяющей условию  $|\Delta_i \xi_k| \leq 2\pi$ .

6. Сопоставим теперь максимальные значения КПД и оптимальные напряженности полей сигнала и накачки в режиме двойного циклотронного резонанса и в режимах с нерезонансным магнитным полем. Согласно рис. 2, максимальное значение приведенного КПД  $\eta$  близко к единице и достигается при значении приведенной длины  $\xi_k \sim 2\pi$  и напряженности поля сигнала  $\alpha_s \sim \alpha_i$ . С учетом формулы (9) это позволяет оценить полный КПД как (см. также [2])

$$\eta \sim \alpha_i^{2/3} \sim N^{-1}, \quad (19)$$

где  $N = \omega_{s,i} (1 \mp \beta_{\parallel 0}) L / 2\pi v_{\parallel 0}$  — число осцилляций, совершаемых электроном в полях сигнала и накачки.<sup>3</sup>

<sup>3</sup> В условиях двойного циклотронного резонанса (1)  $N$  также равно числу циклотронных вращений электрона в магнитном поле на длине пространства взаимодействия:  $N = \omega_0 L / 2\pi v_{\parallel 0}$ .

В режимах, далеких от циклотронного резонанса, КПД  $|\xi_k \Delta_i| \gg 2\pi$  и оптимальные напряженности ВЧ полей при постоянных фазовых скоростях волн оцениваются следующим образом [9]:

$$\eta \sim \sqrt{\alpha_s \alpha_i} / |\Delta| \sim N^{-1}, \quad (20)$$

где  $\Delta = 1 - \omega_{H0}/\omega_i (1 + \beta_{\parallel 0})$ .

Сравнение (19) и (20) показывает, что в наиболее интересном с практической точки зрения случае  $N \gg 1$  КПД в обоих режимах мал:  $\eta \ll 1$ . Однако при одинаковой эффективности оптимальная напряженность полей сигнала и накачки в режиме двойного циклотронного резонанса в  $\sqrt{N}$  раз ниже, чем в отсутствие однородного магнитного поля.<sup>4</sup>

Эффективность энергообмена электронов с сигнальной волной в обоих режимах может быть значительно увеличена при использовании систем с переменной фазовой скоростью волн. Для режима двойного циклотронного резонанса существует дополнительная возможность повышения КПД путем варьирования по длине напряженности однородного магнитного поля.

#### Литература

- [1] Канавец В. И., Кубарев В. А., Черепенин В. А. Рассеяние электромагнитной волны на релятивистском электронном потоке. — ЖТФ, 1977, т. 47, № 12, с. 2472—2477.
- [2] Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И. и др. Убитроны и скаттроны. — В кн.: Релятивистская высокочастотная электроника. Горький, 1979, в. 1, с. 217—248.
- [3] Мирошниченко В. И. Вынужденное когерентное рассеяние электромагнитных волн релятивистским пучком осцилляторов. — Изв. вузов. Радиофизика, 1980, т. 23, № 3, с. 353—362.
- [4] Белов Н. Г., Карбушев Н. И., Рухадзе А. А. Вынужденное рассеяние электромагнитных волн замагниченным пучком релятивистских осцилляторов. — ЖТФ, 1982, т. 52, № 9, с. 1741—1747.
- [5] Григорьев В. П. Вынужденное излучение замагниченного интенсивного электронного пучка в условиях циклотронного резонанса волны накачки. — РиЭ, 1983, т. 28, № 5, с. 960—963.
- [6] Гинзбург Н. С., Кубарев В. А., Черепенин В. А. Вынужденное рассеяние волн на релятивистском электронном пучке в присутствии однородного магнитного поля: линейная теория. — ЖТФ, 1983, т. 53, № 5, с. 824—829.
- [7] Bernstein I. B., Freidland L. Theory of free electron laser in combined helical pump and axial guide field. — Phys. Rev. A, 1981, v. 23, № 2, p. 816—823.
- [8] Grossman A. A., Marshall T. T. A free electron laser oscillator based on cyclotron—undulator interaction. — IEEE J. Quant. Electr., 1983, v. QE-19, № 3, p. 334—339.
- [9] Гинзбург Н. С. Нелинейная теория вынужденного ондуляторного излучения и вынужденного рассеяния волн на магнитонаправляемых релятивистских электронных пучках в поперечно-ограниченных электродинамических системах. — В кн.: Релятивистская высокочастотная электроника. Горький, 1983, в. 3, с. 26—96.

Институт прикладной физики АН СССР  
Горький

Поступило в Редакцию  
29 марта 1984 г.

<sup>4</sup> В экспериментальных условиях приближение к режиму двойного циклотронного резонанса может давать видимое увеличение КПД в тех случаях, когда при заданной добротности резонатора и напряженности поля накачки в режимах, далеких от резонанса, величина гока пучка недостаточна для генерации полей сигнала, удовлетворяющих условию (20).