П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба, Сопряженный рациональный оператор Фурье–Чебышева и его аппроксимационные свойства, *Изв. вузов. Матем.*, 2022, номер 3, 44–60

DOI: 10.26907/0021-3446-2022-3-44-60

Известия вузов. Математика
2022, № 3, с. 44–60
https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

П.Г. ПОЦЕЙКО, Е.А. РОВБА

СОПРЯЖЕННЫЙ РАЦИОНАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ФУРЬЕ–ЧЕБЫШЕВА И ЕГО АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА

Аннотация. В работе построен сопряженный рациональный интегральный оператор Фурье–Чебышева, ассоциированный с системой алгебраических дробей Чебышева–Маркова. Получены поточечные оценки приближений на отрезке $[-1,\ 1]$ сопряженной функции с плотностью $(1-x)^\gamma, \gamma > 1/2$, и равномерные оценки приближений, выраженные через определенную мажоранту. Найдены асимптотическое выражение этой мажоранты и оптимальные значения параметров, обеспечивающие наибольшую скорость ее убывания. Как следствие, приведены соответствующие оценки приближений на отрезке $[-1,\ 1]$ исследуемой сопряженной функции частичными суммами сопряженных полиномиальных рядов Фурье–Чебышева.

Ключевые слова: сопряженная функция, интегральный оператор, рациональная аппроксимация, поточечная оценка, асимптотическая оценка, наилучшее приближение.

УДК: 517.5

DOI: 10.26907/0021-3446-2022-3-44-60

Введение

Будем рассматривать интеграл с ядром типа Коши (см., например, [1])

$$\hat{f}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int\limits_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in [-1,\ 1]. \tag{1}$$

Этот интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, и для его существования будем полагать, что функция $f(t)$ удовлетворяет на отрезке $[-1,\ 1]$ условию Липшица любого порядка [2], [3]. Преобразование $\hat{f}$ можно также рассматривать как один из вариантов определения сопряженной функции, заданной на отрезке $[-1,\ 1]$ ([4]). Заметим, что суперпозиция $\hat{f}(\cos\theta)$ выражается через функцию, тригонометрически сопряженную с индуцированной функцией $f(\cos\theta)$ с помощью сингулярного интеграла с ядром Гильберта

$$\hat{f}(\cos\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} f(\cos\tau) \mathrm{ctg}\frac{\tau-\theta}{2}\, d\tau, \quad \theta \in [0,\ \pi] \tag{2}$$

(этот результат содержится, например, в [5], [6], см. также лемму 1 из [7]).

Поступила в редакцию 24.06.2021, после доработки 20.07.2021, принята к публикации 29.09.2021.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ (№ 20162269) (Республика Беларусь).

Задачи, связанные с изучением сопряженных тригонометрических функций (2), глубоко исследованы (см., например, работы И.И. Привалова [8], [9], А.Н. Колмогорова [10], М. Рисса [11], [12], Н.К. Бари [13], С.Б. Стечкина [14]). Приближения на различных функциональных классах, задаваемых сингулярными интегралами вида (1) алгебраическими многочленами, достаточно полно изучены В.П. Моторным (см., например, [5], [6]). В.Р. Мисюк и А.А. Пекарский [7] решили классическую задачу Н.К. Бари и С.Б. Стечкина о взаимосвязях между наилучшими приближениями функций и их сопряженных на отрезке.

Изучение рациональных приближений сопряженных функций носит эпизодический характер. В.Н. Русак и И.В. Рыбаченко [15] нашли сравнительные порядковые оценки для рациональных приближений, взаимно сопряженных в смысле Гильберта функций действительной переменной в пространстве непрерывных 2π-периодических функций. А.А. Пекарским и Т.С. Мардвилко [16] установлены тесные взаимосвязи между наилучшими равномерными рациональными и кусочно-полиномиальными аппроксимациями функций и им сопряженных на отрезке.

В рациональной аппроксимации нашли применение операторы, являющиеся аналогами известных полиномиальных периодических операторов Фурье, Фейера, Джексона, Валле Пуссена [17], [18]. В 1979 г. Е.А. Ровба [19] ввел интегральный оператор на отрезке на основании системы рациональных функций Чебышева–Маркова, который является обобщением частичных сумм полиномиальных рядов Фурье–Чебышева.

Пусть задано произвольное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, где a_k либо являются действительными и $|a_k| < 1$, либо попарно комплексно сопряженными. На множестве суммируемых на отрезке $[-1,\ 1]$ с весом $(1-x^2)^{-1/2}$ функций $f(x)$ рассмотрим рациональный интегральный оператор [19]

$$s_n(f,\ x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v)\frac{\sin\lambda_n(v,\ u)}{\sin\dfrac{v-u}{2}}\,dv, \quad x = \cos u, \tag{3}$$

где

$$\lambda_n(v,\ u) = \int\limits_{u}^{v}\left(\frac{1}{2}+\lambda_n(y)\right)dy,\ \lambda_n(y) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1-\alpha_k^2}{1+2\alpha_k\cos y+\alpha_k^2},\ \alpha_k = \frac{a_k}{1+\sqrt{1-a_k^2}}, |\alpha_k| < 1. \tag{4}$$

Оператор $s_n : f \to \mathbb{R}_n(A)$, где $\mathbb{R}_n(A)$ — множество рациональных функций вида

$$\frac{p_n(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k x)},$$

A — множество параметров $(a_1,\ldots,a_n)$, $p_n(x)$ — некоторый многочлен степени не выше n, коэффициенты которого зависят от a_k, является точным на константах. В частности, если положить $a_k = 0,\ k = 1,\ldots,n$, то $s_n(f,\ x)$ — частичная сумма полиномиального ряда Фурье–Чебышева.

Вместе с интегральным представлением (3) в работе [19] получены оценки сверху приближений оператором $s_n(\cdot,\ \cdot)$ на ряде функциональных классов на отрезке. Установлено, что оператор $s_n(\cdot,\ \cdot)$ при специальном выборе параметров $a_k, k = 1,\ldots,n$, совпадает с частичной суммой рядов Фурье функции $f(\cos u)$ по системе рациональных функций, введенных С. Такенакой и Ф. Мальмквистом. Из результатов работы [20] в этом случае следуют признаки сходимости последовательности $\{s_n(f,\ x)\}_{n=0}^{+\infty}$.

Новый метод рациональной аппроксимации на отрезке впоследствии нашел широкое применение в решении практических задач о приближениях функций, дифференцируемых в смысле Римана–Лиувилля [21], о приближениях функций Маркова [22], а также на классах функций, задаваемых интегралами Пуассона [23].

В [24] авторами исследовались аппроксимационные свойства частичных сумм сопряженного ряда Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышева–Маркова с двумя геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости. В частности, были изучены приближения на отрезке $[-1,\ 1]$ сопряженной функции (1) с плотностью $|x|^s,\ s\in(1,\ 2)$.

Настоящая работа является продолжением исследований рациональных аппроксимаций на отрезке $[-1,\ 1]$ сопряженных функций (1). Представляет интерес построить рациональный интегральный оператор, сопряженный к введенному в [19], и изучить его аппроксимационные свойства.

1. Сопряженный рациональный интегральный оператор Фурье–Чебышева

Оператор

$$\hat{s}_n(f,\ x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{s_n(f,\ t)}{t-x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\quad x\in[-1,\ 1], \tag{5}$$

где $s_n(f,\ t)$ из (3), естественно называть сопряженным рациональным интегральным оператором Фурье–Чебышева. Известно (см., например, [15], [16]), что в этом случае образ оператора (5) является рациональной функцией вида

$$\frac{\sqrt{1-x^2}q_{n-1}(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_kx)},\quad x\in[-1,\ 1],\quad q_{n-1}(x)\in\mathbb{P}_{n-1}.$$

Для того, чтобы исследовать аппроксимационные свойства сопряженного оператора (5), получим его явное выражение.

Теорема 1. *Имеет место интегральное представление*

$$\hat{s}_n(f,\ x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\cos v)\frac{\cos\dfrac{v-u}{2}-\cos\lambda_n(v,\ u)}{\sin\dfrac{v-u}{2}}\,dv,\quad x=\cos u, \tag{6}$$

где $\lambda_n(v,\ u)$ *определена в* (4).

Доказательство. Используя известное (см., например, [7], [16]) равенство

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}=0,\quad x\in(-1,\ 1), \tag{7}$$

из (5) получим

$$\hat{s}_n(f,\ x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{s_n(f,\ t)-s_n(f,\ x)}{t-x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\quad x\in[-1,\ 1].$$

Воспользовавшись явным представлением рационального интегрального оператора (3) и применив теорему Фубини, в последнем выражении поменяем порядок интегрирования. После необходимых преобразований будем иметь

$$\hat{s}_n(f,\ x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) I_n(x, v)\, dv, \quad x = \cos u, \tag{8}$$

где

$$I_n(x,\ v) = \int\limits_{-1}^{1} \left[\frac{\sin \lambda_n(v, w)}{\sin \dfrac{v-w}{2}} - \frac{\sin \lambda_n(v, u)}{\sin \dfrac{v-u}{2}} \right] \frac{dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}, \quad t = \cos w.$$

Воспользовавшись результатами из [19], после замены $t = \cos w, x = \cos u$, последнее выражение приведем к виду

$$I_n(x,\ v) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\zeta \dfrac{\omega_n(\zeta)}{\omega_n(\rho)} - \rho \dfrac{\omega_n(\rho)}{\omega_n(\zeta)}}{\zeta - \rho} - \frac{\zeta \dfrac{\omega_n(\zeta)}{\omega_n(\xi)} - \xi \dfrac{\omega_n(\xi)}{\omega_n(\zeta)}}{\zeta - \xi} \right] \frac{dw}{\cos w - \cos u},\ \zeta = \mathrm{e}^{iv}, \rho = \mathrm{e}^{iw},$$

где

$$\omega_n(y) = \prod_{k=1}^{n} \frac{y + \alpha_k}{1 + \alpha_k y}.$$

Выполнив в интеграле справа еще одну замену по формулам $\rho = \mathrm{e}^{iw}, \zeta = \mathrm{e}^{iv}$, получим

$$I_n(x,\ v) = \frac{1}{i} \oint\limits_{|\rho|=1} \left[\frac{\zeta \dfrac{\omega_n(\zeta)}{\omega_n(\rho)} - \rho \dfrac{\omega_n(\rho)}{\omega_n(\zeta)}}{\zeta - \rho} - \frac{\zeta \dfrac{\omega_n(\zeta)}{\omega_n(\xi)} - \xi \dfrac{\omega_n(\xi)}{\omega_n(\zeta)}}{\zeta - \xi} \right] \frac{d\rho}{(\rho - \xi)(\rho - 1/\xi)}.$$

Для дальнейших рассуждений воспользуемся методом, предложенным в ([25], с. 115). Из (3) следует, что $I_n(x,\ v)$ представляет собой рациональную функцию по переменным $\xi = \mathrm{e}^{iu}$ и $\zeta = \mathrm{e}^{iv}$ с полюсами первого порядка в точках α_k и $\overline{\alpha_k},\ k = 1, \ldots, n$, которые определены в (4). Поэтому достаточно вычислить интеграл $I_n(x,\ v)$, когда $\xi = \delta_1 \mathrm{e}^{iu}, \delta_1 < 1, u \in (0, \pi)$, и $\zeta = \delta_2 \mathrm{e}^{iv}, \delta_2 < 1, v \in (0, \pi)$, и воспользоваться предельным переходом при $\delta_1 \to 1,\ \delta_2 \to 1$. Учитывая сказанное, представим интеграл $I_n(x,\ v)$ следующим образом:

$$I_n(x,\ v) = \frac{1}{i} \left[\zeta \omega_n(\zeta) J_1 - \overline{\omega_n(\zeta)} J_2 - \frac{1}{\zeta - \xi} \left(\zeta \frac{\omega_n(\zeta)}{\omega_n(\xi)} - \xi \frac{\omega_n(\xi)}{\omega_n(\zeta)} \right) J_3 \right], \tag{9}$$

где

$$J_1 = \oint\limits_{|\rho|=1} \frac{\overline{\omega_n(\rho)} d\rho}{(\zeta - \rho)(\rho - \xi)(\rho - 1/\xi)},\ J_2 = \oint\limits_{|\rho|=1} \frac{\rho \omega_n(\rho) d\rho}{(\zeta - \rho)(\rho - \xi)(\rho - 1/\xi)},\ J_3 = \oint\limits_{|\rho|=1} \frac{d\rho}{(\rho - \xi)(\rho - 1/\xi)}.$$

Подинтегральная функция интеграла J_1 во внешности единичной окружности имеет в точке $\rho = 1/\xi$ полюс первого порядка, а на бесконечности нуль не ниже второго порядка. Подинтегральная функция интеграла J_2 внутри единичной окружности имеет полюсы первого порядка в точках $\rho = \xi$ и $\rho = \zeta$. Подинтегральная функция интеграла J_3 внутри единичной окружности имеет полюс первого порядка в точке $\rho = \xi$. Применив к каждому из трех интегралов теорему Коши о вычетах, будем иметь

$$J_1 = \frac{-2\pi i \omega_n(\xi)}{(\zeta - 1/\xi)(1/\xi - \xi)}, \quad J_2 = -2\pi i \left[\frac{\zeta\omega_n(\zeta)}{(\zeta - \xi)(\zeta - 1/\xi)} + \frac{\xi\omega_n(\xi)}{(\xi - \zeta)(\xi - 1/\xi)} \right], \quad J_3 = \frac{2\pi i}{\xi - 1/\xi}.$$

Подставив значения интегралов J_1, J_2, J_3 в (9), получим

$$I_n(x,\ v) = -2\pi \left[\frac{\zeta\omega_n(\zeta)\omega_n(\xi)}{(\zeta - 1/\xi)(1/\xi - \xi)} - \frac{\zeta}{(\zeta - \xi)(\zeta - 1/\xi)} + \frac{\zeta\omega_n(\zeta)\overline{\omega_n(\xi)}}{(\zeta - \xi)(\xi - 1/\xi)} \right].$$

Из (8) и последнего выражения находим

$$\hat{s}_n(f,\ x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \frac{\zeta\omega_n(\zeta)\overline{\omega_n(\xi)}}{(\zeta - \xi)(\xi - 1/\xi)} dv + \right.$$

$$\left. + \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \left[\frac{\zeta\omega_n(\zeta)\omega_n(\xi)}{(\zeta - 1/\xi)(1/\xi - \xi)} - \frac{\zeta}{(\zeta - \xi)(\zeta - 1/\xi)} \right] dv \right], \quad x = \cos u,\ \xi = \mathrm{e}^{iu}.$$

Во втором интеграле в квадратной скобке выполним замену переменного $v \mapsto -v$. Тогда

$$\hat{s}_n(f,\ x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \left[\frac{\zeta \dfrac{\omega_n(\zeta)}{\omega_n(\xi)} + \xi \dfrac{\omega_n(\xi)}{\omega_n(\zeta)}}{(\zeta - \xi)(\xi - 1/\xi)} - \frac{\xi\zeta}{(\xi\zeta - 1)(\zeta - \xi)} \right] dv\, \xi = \mathrm{e}^{iu}.$$

Учитывая, что $\xi = \mathrm{e}^{iu}, \zeta = \mathrm{e}^{iv}$, придем к выражению

$$\hat{s}_n(f,\ x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \left[\frac{\sin u}{2 \sin \dfrac{v-u}{2} \sin \dfrac{v+u}{2}} - \frac{\cos \lambda_n(v,\ u)}{\sin \dfrac{v-u}{2}} \right] dv, \quad x = \cos u.$$

Поскольку

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \frac{\sin u}{2 \sin \dfrac{v-u}{2} \sin \dfrac{v+u}{2}}\, dv = \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \frac{\cos \dfrac{v-u}{2}}{\sin \dfrac{v-u}{2}}\, dv,$$

то, чтобы прийти к интегральному представлению (6), достаточно провести некоторые несложные преобразования. $\square$

В формулировке теоремы 1 положим значения параметров $\alpha_k = 0,\ k = 1, \ldots, n$.

Следствие 1. Для частичных сумм сопряженных полиномиальных рядов Фурье–Чебышева имеет место интегральное представление

$$\hat{s}_n(f,\ x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \frac{\cos \dfrac{v-u}{2} - \cos \left(n + \dfrac{1}{2} \right)(v-u)}{\sin \dfrac{v-u}{2}}\, dv, \quad x = \cos u.$$

Другими словами, в полиномиальном случае рациональный интегральный оператор (5) представляет собой частичную сумму сопряженного тригонометрического ряда Фурье для функции $f(\cos u)$ ([26], с. 104).

2. Приближения сопряженных функций с плотностью, имеющей степенную особенность

Введем следующие обозначения:

$$\hat{\varepsilon}_n(f,\ x,\ A) = \hat{f}(x) - \hat{s}_n(f,\ x), \quad x \in [-1,\ 1], \tag{10}$$

где A — множество точек $(a_1, \ldots, a_n)$, определенных в (4). Из (2), (6) находим

$$\hat{\varepsilon}_n(f,\ x,\ A) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \frac{\cos \lambda_n(v,\ u)}{\sin \dfrac{v-u}{2}}\, dv, \quad x = \cos u,\ x \in [-1,\ 1],$$

где $\lambda_n(v,\ u)$ определена в (4).

Изучим приближения сопряженной функции с плотностью $(1-x)^\gamma,\ \gamma > 1/2$, на отрезке $[-1,\ 1]$ рациональным оператором Фурье–Чебышева (5). Пусть параметры $\{a_k\}_{k=1}^n$ удовлетворяют условиям

$$\alpha_k \mapsto -\alpha_k,\ k = 1, \ldots, n,\ \alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0,\ p = [\gamma],\ n > p,$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть от числа.

Теорема 2. *Для приближений сопряженной функции с плотностью $(1-x)^\gamma, \gamma > 1/2$, на отрезке $[-1,\ 1]$ рациональным интегральным оператором Фурье–Чебышева имеют место* 1) *интегральное представление*

$$\hat{\varepsilon}_n((1-x)^\gamma,\ x,\ A) = -\frac{2^{\gamma-1}\sin \pi\gamma}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} \sin \psi_n(x,\ t,\ A)}{t^\gamma \sqrt{1-2t\cos u + t^2}} \omega_n(t)\, dt,\ x = \cos u, \tag{11}$$

где

$$\psi_n(x,\ t,\ A) = \arg \frac{\xi \omega_n(\xi)}{1 - t\xi}, \quad \omega_n(\xi) = \prod_{k=1}^n \frac{\xi - \alpha_k}{1 - \alpha_k \xi},\ \xi = \mathrm{e}^{iu};$$

2) *поточечная оценка приближений*

$$|\hat{\varepsilon}_n((1-x)^\gamma, x,\ A)| \le \frac{2^{1-\gamma} |\sin \pi\gamma| \sqrt{1-x^2}}{\pi} \times$$
$$\times \left[\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} |\omega_n(t)| dt}{t^\gamma (1 - 2t\cos u + t^2)} + \lambda_n(u) \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} |\omega_n(t)| dt}{t^\gamma \sqrt{1-2t\cos u + t^2}} \right], \quad x = \cos u, \tag{12}$$

где $\lambda_n(u)$ из (4);
3) *равномерное относительно всех $x \in [-1,\ 1]$ неравенство*

$$|\hat{\varepsilon}_n((1-x)^\gamma, x,\ A)| \le \sqrt{1-x^2}\, \hat{\varepsilon}_n^*((1-x)^\gamma,\ A), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

где

$$\hat{\varepsilon}_n^*((1-x)^\gamma,\ A) = \frac{2^{1-\gamma} |\sin \pi\gamma|}{\pi} \times$$
$$\times \left[\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma-2}}{t^\gamma} |\omega_n(t)| dt + \sum_{k=1}^n \frac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k} \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma-1}}{t^\gamma} |\omega_n(t)| dt \right]. \tag{14}$$

Оценки (12), (13) *являются точными. Равенство достигается при $x = \pm 1$.*

Доказательство. Из (7), (10) заключаем, что $\hat{\varepsilon}_n(1,\ x,\ A) = 0$. Следовательно,

$$\hat{\varepsilon}_n((1-x)^\gamma,\ x,\ A) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[(1-\cos v)^\gamma - (1-\cos u)^\gamma]\frac{\cos\lambda_n(v,\ u)}{\sin\dfrac{v-u}{2}}\,dv, \quad x=\cos u.$$

В последнем интеграле выполним замену переменных по формулам $\zeta = \mathrm{e}^{iv},\ \xi = \mathrm{e}^{iu}$. Тогда

$$\hat{\varepsilon}_n((1-x)^\gamma, x,\ A) = \frac{(-1)^\gamma}{2^{\gamma+1}\pi\xi^\gamma}\left[\overline{\omega_n(\xi)}I_1(\xi,n) + \xi\omega_n(\xi)I_2(\xi,n)\right], \quad x=\cos u, \tag{15}$$

где

$$I_1(\xi,n) = \oint_\Gamma \frac{(1-\zeta)^{2\gamma}\xi^\gamma\zeta^{-\gamma} - (1-\xi)^{2\gamma}}{\zeta-\xi}\omega_n(\zeta)d\zeta,$$

$$I_2(\xi,n) = \oint_\Gamma \frac{(1-\zeta)^{2\gamma}\xi^\gamma\zeta^{-\gamma} - (1-\xi)^{2\gamma}}{\zeta-\xi}\overline{\zeta\omega_n(\zeta)}d\zeta,$$

$\Gamma = \{\zeta : |\zeta| = 1\}$. Отметим, что точка $\zeta = \xi$ будет устранимой особенностью для подинтегральных функций интегралов $I_1(\xi,n)$ и $I_2(\xi,n)$, поскольку является нулем также и для числителей. Кроме того, подинтегральные функции интегралов $I_1(\xi,n)$, $I_2(\xi,n)$ имеют точки ветвления при $\zeta = 0$, $\zeta = 1$, $\zeta = \infty$. Исследуем каждый из двух интегралов по отдельности. Так, для интеграла $I_1(\xi,n)$ рассмотрим область, ограниченную контуром Γ и верхними и нижними берегами разрезов по действительной оси от точки $\zeta = 0$ до точки $\zeta = 1$. Внутри данной области подинтегральная функция первого интеграла

$$\varphi_1(\zeta,\xi) = \frac{g(\zeta,\gamma)\xi^\gamma - (1-\xi)^{2\gamma}}{\zeta-\xi}\omega_n(\zeta), \quad g(\zeta,\ \gamma) = (1-\zeta)^{2\gamma}\zeta^{-\gamma},$$

распадается на регулярные ветви, определяемые условием $g(-1,\gamma) = 2^{2\gamma}\mathrm{e}^{i\pi(2k+1)\gamma}, k\in\mathbb{Z}$. Выбрав ту ветвь, для которой выполняется условие $g_0(-1,\gamma) = 2^{2\gamma}(-1)^\gamma$, подинтегральная функция

$$\varphi_1(\zeta,\xi) = \frac{g_0(\zeta,\gamma)\xi^\gamma - (1-\xi)^{2\gamma}}{\zeta-\xi}\omega_n(\zeta)$$

регулярна в рассматриваемой области. Применив интегральную теорему Коши, будем иметь

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma}\xi^\gamma t^{-\gamma} - (1-\xi)^{2\gamma}}{t-\xi}\omega_n(t)dt + I_1(\xi,n) + \int_1^0 \frac{(1-t)^{2\gamma}\xi^\gamma(t\mathrm{e}^{2i\pi})^{-\gamma} - (1-\xi)^{2\gamma}}{t-\xi}\omega_n(t)dt = 0.$$

Следовательно,

$$I_1(\xi,n) = \xi^\gamma(1-\mathrm{e}^{-2\pi i\gamma})\int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}}{t-\xi}\omega_n(t)dt. \tag{16}$$

Займемся исследованием интеграла $I_2(\xi,n)$. Рассмотрим область, ограниченную контуром Γ, контуром $C_R = \{\zeta : |\zeta| = R\}$ достаточно большого радиуса R, который огибает точку $\zeta = \infty$ против часовой стрелки и верхним и нижним берегами разреза по действительной оси от точки $\zeta = 1$ до $\zeta = R$. Внутри данной области подинтегральная функция

$$\varphi_2(\zeta,\xi) = \frac{g(\zeta,\gamma)\xi^\gamma - (1-\xi)^{2\gamma}}{\zeta-\xi}\overrightarrow{\zeta\omega_n(\zeta)}$$

допускает выделение регулярных ветвей. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, выделим ее регулярную ветвь

$$\varphi_2(\zeta,\xi)=\frac{g_0(\zeta,\gamma)\xi^{\gamma}-(1-\xi)^{2\gamma}}{\zeta-\xi}\overline{\zeta\omega_n(\zeta)}.$$

В этом случае применив интегральную теорему Коши к области, ограниченной указанным контуром, и учитывая, что при движении по верхнему берегу разреза аргумент подинтегральной функции не меняется, а при движении по нижнему берегу разреза получает приращение, получим

$$-I_2(\xi,n)+\int\limits_1^R\frac{(1-t)^{2\gamma}\xi^{\gamma}t^{-\gamma}-(1-\xi)^{2\gamma}}{(t-\xi)t}\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\alpha_k t}{t-\alpha_k}\;dt+$$
$$+\int\limits_{C_R}\frac{g_0(\zeta,\gamma)\xi^{\gamma}-(1-\xi)^{2\gamma}}{\zeta-\xi}\overline{\zeta\omega_n(\zeta)}\;d\zeta+$$
$$+\int\limits_R^1\frac{\left((1-t)\mathrm{e}^{-2i\pi}\right)^{2\gamma}\xi^{\gamma}\left(t\mathrm{e}^{-2i\pi}\right)^{-\gamma}-(1-\xi)^{2\gamma}}{(t-\xi)t}\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\alpha_k t}{t-\alpha_k}dt=0. \tag{17}$$

Исследуем интеграл по окружности C_R. Положим $\zeta=R\mathrm{e}^{i\varphi}$. Тогда

$$\int\limits_{C_R}\varphi_2(\zeta,\xi)\;d\zeta=\frac{i}{R^{p+1-\gamma}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(1/R\;-\mathrm{e}^{i\varphi})^{2\gamma}\xi^{\gamma}\mathrm{e}^{-i\varphi\gamma}-1/R^{\;\gamma}(1-\xi)^{2\gamma}}{(\mathrm{e}^{i\varphi}-\xi/R)\mathrm{e}^{ip\varphi}}\prod_{k=p+1}^{n}\frac{1/R\;-\alpha_k\mathrm{e}^{i\varphi}}{\mathrm{e}^{i\varphi}-\alpha_k/R}\;d\varphi.$$

Отсюда приходим к асимптотическому равенству

$$\int\limits_{C_R}\varphi_2(\zeta,\xi)\;d\zeta\sim\frac{(-1)^{n+1}2i\xi^{\gamma}\sin\pi\gamma}{R^{p+1-\gamma}(p+1-\gamma)}\prod_{k=p+1}^{n}\alpha_k,\quad R\to\infty.$$

Поскольку $p+1-\gamma>0$, то заключаем, что при $R\to\infty$ интеграл по окружности C_R стремится к нулю. Из сказанного следует, что при $R\to\infty$ из (17) имеем

$$I_2(\xi,n)=\xi^{\gamma}(1-\mathrm{e}^{-2\pi i\gamma})\int\limits_1^{\infty}\frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}}{(t-\xi)t}\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\alpha_k t}{t-\alpha_k}\;dt.$$

Выполнив в интеграле замену переменного по формуле $t\mapsto 1/t$, окончательно будем иметь

$$I_2(\xi,n)=\xi^{\gamma}(1-\mathrm{e}^{-2\pi i\gamma})\int\limits_0^1\frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}}{1-t\xi}\omega_n(t)dt. \tag{18}$$

Подставив (16) и (18) в (15), получим

$$\hat{\varepsilon}_n((1-x)^{\gamma},x,\;A)=\frac{i\sin\pi\gamma}{2^{\gamma}\pi}\int\limits_0^1\frac{(1-t)^{2\gamma}}{t^{\gamma}}\left[\frac{\xi\omega_n(\xi)}{1-t\xi}-\frac{\overline{\omega_n(\xi)}}{\xi-t}\right]\omega_n(t)dt,\quad x=\cos u,\;\xi=\mathrm{e}^{iu}.$$

Заметив, что выражения в квадратных скобках интеграла, стоящего справа, являются взаимно комплексно сопряженными, для того, чтобы прийти к (11), достаточно выполнить необходимые преобразования.

Докажем второе утверждение теоремы 2. Из интегрального представления (11) следует

$$|\hat{\varepsilon}_n((1-x)^\gamma,\ x,\ A)| \leq \frac{2^{\gamma-1}|\sin\pi\gamma|}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma}|\sin\psi_n(x,\ t,\ A)|}{t^\gamma\sqrt{1-2t\cos u+t^2}}|\omega_n(t)|\,dt,\ x=\cos u. \tag{19}$$

Выполним оценку

$$|\sin\psi_n(x,\ t,\ A)| \leq \left|\sin\arg\frac{\xi}{1-\xi t}\right| + \left|\sin\arg\prod_{k=1}^n\frac{\xi-\alpha_k}{1-\alpha_k\xi}\right| = \frac{|\sin u|}{\sqrt{1-2t\cos u+t^2}} + |N_n(x)|,$$

где

$$N_n(x) = \sin\sum_{k=1}^n \arccos\frac{x-a_k}{1-a_k x},\quad x\in[-1,1],\ \ a_k\in[0,1),$$

— рациональная синус-дробь Чебышева–Маркова порядка n. Известно ([25], с. 50), что

$$|N_n(x)| \leq |\sin u|\lambda_n(u),\quad x=\cos u.$$

Отсюда и из неравенства (19) следует (12).

Для доказательства утверждения 3) теоремы 2 в (12) воспользуемся оценкой

$$\sqrt{1-2t\cos u+t^2} \geq 1-t,\quad t\in[-1,1]\,,\ u\in\mathbb{R}.$$

Точность оценок (12), (13) в точках $x=\pm1$ проверяется непосредственно, если учесть, что приближения в этих точках обращаются в нуль. □

В интегральном представлении (11) положим значение параметров $\alpha_k=0, k=1,\dots,n$. Тогда

$$\hat{\varepsilon}_n((1-x)^\gamma, x,\ O) = \hat{\varepsilon}_n^{(0)}((1-x)^\gamma, x)$$

— приближения сопряженной функции с плотностью $(1-t)^\gamma, \gamma>1/2$, на отрезке $[-1,\ 1]$ частичными суммами сопряженных полиномиальных рядов Фурье–Чебышева.

Следствие 2. Для приближений сопряженной функции с плотностью $(1-x)^\gamma, \gamma>1/2$, на отрезке $[-1,\ 1]$ частичными суммами сопряженных рядов Фурье–Чебышева имеют место
1) поточечная оценка

$$|\hat{\varepsilon}_n^{(0)}((1-x)^\gamma, x)| \leq \frac{2^{1-\gamma}|\sin\pi\gamma|\sqrt{1-x^2}}{\pi}\left[\int\limits_0^1\frac{(1-t)^{2\gamma}t^{n-\gamma}dt}{1-2t\cos u+t^2} + n\int\limits_0^1\frac{(1-t)^{2\gamma}t^{n-\gamma}dt}{\sqrt{1-2t\cos u+t^2}}\right];$$

2) равномерное относительно всех $x\in[-1,\ 1]$ неравенство

$$|\hat{\varepsilon}_n^{(0)}((1-x)^\gamma, x)| \leq \frac{2^{1-\gamma}|\sin\pi\gamma|\sqrt{1-x^2}}{\pi}\times$$
$$\times\left[\int\limits_0^1 (1-t)^{2\gamma-2}t^{n-\gamma}dt + n\int\limits_0^1(1-t)^{2\gamma-1}t^{n-\gamma}dt\right],\ n\in\mathbb{N}.$$

Оценки являются точными. Равенство достигается на концах отрезка при $x=\pm1$.

3. Асимптотика мажоранты приближений в случае фиксированного числа полюсов аппроксимирующей функции

Исследуем асимптотическое поведение величины (14) при $n \to \infty$. Для решения поставленной задачи в правой части (14) выполним замену переменного по формуле $t = (1-u)/(1+u)$, $dt = -2du/(1+u)^2$. Тогда

$$\hat{\varepsilon}_n^*((1-x)^\gamma,\ A) = \frac{2^\gamma |\sin \pi\gamma|}{\pi}[I_1(n,\ A) + I_2(n,\ A)], \tag{20}$$

где

$$I_1(n,\ A) = \int\limits_0^1 \frac{u^{2\gamma-2}}{(1-u^2)^\gamma}\left|\prod_{k=1}^n \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}\right| du,$$

$$I_2(n,\ A) = 2\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\beta_k}\right)\int\limits_0^1 \frac{u^{2\gamma-1}}{(1-u^2)^\gamma(1+u)}\left|\prod_{k=1}^n \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}\right| du, \quad \beta_k = \frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}.$$

Пусть $n > p,\ p = [\gamma]$, $n_1 = n-p$ и q — произвольное натуральное число, $0 < q < n_1$, A_q — множество параметров $(0,\ldots,0,\alpha_{p+1},\ldots,\alpha_{p+mq}) \in A$ таких, что среди чисел $\alpha_{p+1},\ldots,\alpha_{p+mq}$ ровно q различных, и кратность каждого параметра равна m, $m = [n_1/q\,]$. Таким образом, будем вести речь об аппроксимации рациональными функциями с полюсом на бесконечности порядка p и q-геометрически различными полюсами в открытой комплексной плоскости кратности m каждый. Заметим, что приближения непрерывных функций с характерными особенностями рациональными функциями с фиксированным числом геометрически различных полюсов впервые рассматривались в работах К.Н. Лунгу [27], [28]. В силу сделанных предположений интегралы $I_1(n,\ A_q)$, $I_2(n,\ A_q)$ примут вид

$$I_1(n,\ A_q) \ = \int\limits_0^1 \frac{u^{2\gamma-2}}{(1-u^2)^\gamma}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p\left|\prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}\right|^m du,$$

$$I_2(n,\ A_q) \ = 2\left(p + m\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}\right)\int\limits_0^1 \frac{u^{2\gamma-1}}{(1-u^2)^\gamma(1+u)}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p\left|\prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}\right|^m du,$$

где $\gamma > 1/2$,$n > p$. Положим, что параметры $\beta_k, k = 1,\ldots,q$, упорядочены следующим образом:

$$0 < \beta_q < \beta_{q-1} < \ldots < \beta_1 < 1.$$

Теорема 3. *Для любых натуральных n и q, $0 < q < n_1$, $m = [n_1/q]$, $n_1 = n-p$, при $m \to \infty$ справедливы асимптотические равенства*

$$\hat{\varepsilon}_n^*((1-x)^\gamma,\ A_q) \sim \frac{2^\gamma |\sin \pi\gamma|}{\pi}\left[S_1(n,\ A_q) + S_2(n,\ A_q) + S_3(n,\ A_q)\right], \tag{21}$$

где

$$S_1(n,\ A_q) = \frac{2\gamma\Gamma(2\gamma-1)}{\left(2m\sum\limits_{k=1}^q \dfrac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma-1}},$$

$$S_2(n,\ A_q)=\sqrt{\frac{\pi}{2m}}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{b_j^{2\gamma-\frac{5}{2}}}{(1-b_j^2)^{\gamma}}\frac{\left(1+\dfrac{2mb_j}{1+b_j}\displaystyle\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)\left(\dfrac{1-b_j}{1+b_j}\right)^p\left|\displaystyle\prod_{k=1}^{q}\frac{\beta_k-b_j}{\beta_k+b_j}\right|^m}{\sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{q}\frac{\beta_k}{(\beta_k^2-b_j^2)^2}}},$$

$$S_3(n,\ A_q)=\frac{\Gamma(1+p-\gamma)}{2^{2p+1}\left(m\displaystyle\sum_{k=1}^{q}\frac{\beta_k}{1-\beta_k^2}\right)^{1+p-\gamma}}\left(1+p+m\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{q}\frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)^m,$$

$b_j\in(\beta_{j+1},\ \beta_j)$ *— единственный корень уравнения*

$$-\sum_{k=1}^{j}\frac{\beta_k}{\beta_k^2-u^2}+\sum_{k=j+1}^{q}\frac{\beta_k}{u^2-\beta_k^2}=0,\quad j=1,\ldots,q-1,$$

$\Gamma(\cdot)$ *— гамма-функция Эйлера.*

Доказательство. Рассмотрим интеграл $I_1(A_q,\ n)$. Представим его в виде

$$I_1(A_q,\ n)=I_3(A_q,\ n)+I_4(A_q,\ n)+I_5(A_q,\ n),\quad n\in\mathbb{N},\tag{22}$$

где

$$I_3(A_q,\ n)=\int_0^{\beta_q}\frac{u^{2\gamma-2}}{(1-u^2)^{\gamma}}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p\left(\prod_{k=1}^{q}\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\right)^m du,$$

$$I_4(A_q,\ n)=\sum_{j=1}^{q-1}\int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j}\frac{u^{2\gamma-2}}{(1-u^2)^{\gamma}}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p\left(\prod_{k=1}^{j}\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\prod_{k=j+1}^{q}\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)^m du,$$

$$I_5(A_q,\ n)=\int_{\beta_1}^{1}\frac{u^{2\gamma-2}}{(1-u^2)^{\gamma}}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p\left(\prod_{k=1}^{q}\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)^m du.$$

Изучим асимптотическое поведение при $m\to\infty$ каждого из $(q+1)$ интегралов по отдельности. Для решения поставленной задачи воспользуемся методом Лапласа [29], [30]. Сформулируем три леммы.

Лемма 1. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$I_3(A_q,\ n)\sim\frac{\Gamma(2\gamma-1)}{\left(2m\displaystyle\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma-1}},\quad m\to\infty,\tag{23}$$

где $\Gamma(\cdot)$ *— гамма-функция Эйлера.*

Лемма 2. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$I_4(A_q,\ n) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{b_j^{2\gamma-\frac{5}{2}}}{(1-b_j^2)^{\gamma}} \left(\frac{1-b_j}{1+b_j}\right)^p \frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{j} \frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j} \prod\limits_{k=j+1}^{q} \frac{b_j - \beta_k}{b_j + \beta_k}\right)^m}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{j} \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2} + \sum\limits_{k=j+1}^{q} \frac{\beta_k}{(b_j^2 - \beta_k^2)^2}}},\ m \to \infty, \quad (24)$$

где $b_j, j = 1, \ldots, q-1$, *определены в формулировке теоремы* 3.

Лемма 3. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$I_5(A_q,\ n) \sim \frac{\Gamma\left(1+p-\gamma\right)}{2^{2p+1}\left(\sum\limits_{k=1}^{p} \frac{\beta_k}{1-\beta_k^2}\right)^{1+p-\gamma}} \left(\prod_{k=1}^{q} \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)^m, \quad m \to \infty, \quad (25)$$

где $\Gamma(\cdot)$ *— гамма-функция Эйлера.*

Доказательства сформулированных лемм подробно изложены в [22], поэтому в настоящей работе их не приводим. Из (23)–(25) в (22) приходим к асимптотическому равенству

$$I_1(A_q, n) \sim \frac{\Gamma(2\gamma-1)}{\left(2m\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma-1}} + \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{b_j^{2\gamma-\frac{5}{2}}}{(1-b_j^2)^{\gamma}} \left(\frac{1-b_j}{1+b_j}\right)^p \frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{j} \frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j} \prod\limits_{k=j+1}^{q} \frac{b_j - \beta_k}{b_j + \beta_k}\right)^m}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{j} \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2} + \sum\limits_{k=j+1}^{q} \frac{\beta_k}{(b_j^2 - \beta_k^2)^2}}} +$$

$$+ \frac{\Gamma\left(1+p-\gamma\right)}{2^{2p+1}\left(m\sum\limits_{k=1}^{q} \frac{\beta_k}{1-\beta_k^2}\right)^{1+p-\gamma}} \left(\prod_{k=1}^{q} \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)^m, \quad m \to \infty. \quad (26)$$

Совершенно аналогичным образом устанавливается справедливость асимптотического равенства

$$I_2(A_q,\ n) \sim \frac{2p\Gamma(2\gamma)}{\left(2m\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}} + \frac{\Gamma(2\gamma)}{\left(2m\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma-1}} +$$

$$+ \left(p + m\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{b_j^{2\gamma-\frac{3}{2}}}{(1-b_j^2)^{\gamma}(1+b_j)} \left(\frac{1-b_j}{1+b_j}\right)^p \frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{j} \frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j} \prod\limits_{k=j+1}^{q} \frac{b_j - \beta_k}{b_j + \beta_k}\right)^m}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{j} \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2} + \sum\limits_{k=j+1}^{q} \frac{\beta_k}{(b_j^2 - \beta_k^2)^2}}} +$$

$$+ \left(p + m\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right) \frac{\Gamma\left(1+p-\gamma\right)}{2^{2p+1}\left(m\sum\limits_{k=1}^{q} \frac{\beta_k}{1-\beta_k^2}\right)^{1+p-\gamma}} \left(\prod_{k=1}^{q} \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)^m, \quad m \to \infty. \quad (27)$$

Чтобы прийти к (21) необходимо подставить (26) и (27) в (20) и выполнить соответствующие алгебраические преобразования. □

В соотношении (21) положим $\alpha_k = 0, k = 1, \ldots, n$. Тогда величина

$$\sqrt{1-x^2}\hat{\varepsilon}_n^*((1-x)^\gamma,\ O) = \sqrt{1-x^2}\hat{\varepsilon}_n^{(0)}((1-x)^\gamma)$$

— мажоранта приближений на отрезке $[-1,\ 1]$ сопряженной функции с плотностью $(1-t)^\gamma$, $\gamma > 1/2$, частичными суммами сопряженных полиномиальных рядов Фурье по системе полиномов Чебышева.

Следствие 3 (полиномиальный случай)**.** Для любого $\gamma > 1/2$ равномерно относительно всех $x \in [-1,\ 1]$ справедливо неравенство

$$|\hat{\varepsilon}_n^{(0)}((1-x)^\gamma, x)| \le \frac{2^{2-\gamma}\gamma\,\Gamma(2\gamma-1)|\sin\pi\gamma|\sqrt{1-x^2}}{\pi n^{2\gamma-1}} + \sqrt{1-x^2}\hat{\delta}_n(\gamma), \quad n\to\infty,$$

где $\hat{\delta}_n(\gamma) = o(1/n^{2\gamma-1}),\ n\to\infty$, $\Gamma[\cdot]$ — гамма-функция Эйлера.

4. Наилучшая мажоранта приближений в случае фиксированного числа полюсов аппроксимирующей функции

Представляет интерес минимизировать правую часть асимптотического равенства (21) посредством выбора оптимального для этой задачи набора параметров из A_q. Другими словами, будем искать наилучшую оценку приближений исследуемой сопряженной функции данным методом. Положим

$$\hat{\varepsilon}_{n,\ q}^*((1-x)^\gamma) = \inf_{A_q}\hat{\varepsilon}_n^*((1-x)^\gamma, A_q).$$

Теорема 4. *Для любого $\gamma > 1/2$ при $n\to\infty$ равномерно относительно всех $x \in [-1,\ 1]$ справедливо неравенство*

$$|\hat{\varepsilon}_{n,\ q}((1-x)^\gamma,\ x,\ A)| \le \sqrt{1-x^2}c(q,\ \gamma)\left(\frac{\ln^{2q-1}n}{n^{2q}}\right)^{2\gamma-1} + \sqrt{1-x^2}\hat{\delta}_{n,\ q}(\gamma), \tag{28}$$

где

$$c(q,\ \gamma) = \frac{2^{\gamma+1}\gamma\,\Gamma(2\gamma-1)\,|\sin\pi\gamma|}{\pi}\left(q^{2q+1}\gamma^{2q-1}[(q-1)!]^2\right)^{2\gamma-1},$$

$$\hat{\delta}_{n,\ q}(\gamma) = o\left(\left(\frac{\ln^{2q-1}n}{n^{2q}}\right)^{2\gamma-1}\right), \quad n\to\infty,$$

$\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера. Неравенство (28) точно. Равенство достигается в точках $x = \pm1$.

Доказательство. Пусть множество A_q задано следующим образом:

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0, \quad \alpha_{p+k} = \sqrt{\frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}}, \quad \beta_k = c_k\left(\frac{\ln m}{m}\right)^{2k-1}, \quad k = 1,\ldots,q,$$

где $c_k, k = 1,\ldots,q,$ — некоторые постоянные величины, не зависящие от m. Известно ([22], лемма 6), что в этом случае параметры b_j, определенные в теореме 3, имеют асимптотическое выражение

$$b_j \sim \sqrt{c_jc_{j+1}}\left(\frac{\ln m}{m}\right)^{2j}, \quad j = 1,\ldots,q-1, \quad m\to\infty.$$

Исследуем асимптотическое поведение каждого из трех слагаемых в (21). Так, для первого слагаемого находим, что

$$S_1(n,\ A_q)=\frac{2\gamma\Gamma(2\gamma-1)}{\left(2m\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1}{c_k}\left(\dfrac{m}{\ln m}\right)^{2k-1}\right)^{2\gamma-1}}\sim\frac{2\gamma\,\Gamma(2\gamma-1)c_q^{2\gamma-1}\ln^{(2q-1)(2\gamma-1)}m}{2^{2\gamma-1}m^{2q(2\gamma-1)}},\quad m\to\infty.$$

Рассуждая аналогичным образом, также получим

$$S_2(n,\ A_q)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{j=1}^{q-1}A_j(\gamma)\frac{\ln^{4j\gamma-2j-\frac12}m}{m^{4j\gamma-2j+4\sqrt{\frac{c_{j+1}}{c_j}}}}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{j=1}^{q-1}B_j(\gamma)\frac{\ln^{4j\gamma-2q+\frac12}m}{m^{4j\gamma-2q+4\sqrt{\frac{c_{j+1}}{c_j}}}},\quad m\to\infty,$$

где $A_j(\gamma),B_j(\gamma)$ — некоторые величины, не зависящие от m. Из последнего равенства очевидно, что асимптотическое поведение выражения $S_2(\ n,A_q)$ определяется второй суммой. Другими словами,

$$S_2(n,\ A_q)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{j=1}^{q-1}B_j(\gamma)\frac{\ln^{4j\gamma-2q+\frac12}m}{m^{4j\gamma-2q+4\sqrt{\frac{c_{j+1}}{c_j}}}}+o\left(\frac{\ln^{4\gamma-2q+\frac12}m}{m^{4\gamma-2q+4\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}}}\right),\quad m\to\infty.$$

Наконец, для третьего слагаемого будем иметь

$$S_3(n,\ A_q)\sim\frac{\Gamma(1+p-\gamma)}{2^{2p}c_1^{1+p-\gamma}m^{2c_1}\ln^{1+p-\gamma}m}+\frac{\Gamma(1+p-\gamma)}{c_q2^{2p}c_1^{1+p-\gamma}m^{2c_1-2q}\ln^{p-\gamma+2q}m},\quad m\to\infty,$$

откуда очевидным образом следует

$$S_3(n,\ A_q)=\frac{\Gamma(1+p-\gamma)}{c_q2^{2p}c_1^{1+p-\gamma}m^{2c_1-2q}\ln^{p-\gamma+2q}m}+o\left(\frac{1}{m^{2c_1-2q}\ln^{p-\gamma+2q}m}\right),\quad m\to\infty.$$

Подберем значения величин $c_k,k=1,\dots,q$, таким образом, чтобы в каждом из выражений $S_1(n,\ A_q)$, $S_2(n,\ A_q)$, $S_3(n,\ A_q)$ были выровнены степени при m. В этом случае величины $c_k,k=1,\dots,q$, очевидно, удовлетворяют условиям

$$2q(2\gamma-1)=2c_1-2q,\quad 2q(2\gamma-1)=4j\gamma-2q+4\sqrt{\frac{c_{j+1}}{c_j}}.\tag{29}$$

При этом из (21) следует асимптотическое равенство

$$\hat\varepsilon_n^*((1-x)^\gamma,\ A_q^*)=\frac{2^\gamma|\sin\pi\gamma|}{\pi}S_1(n,\ A_q)+o\left(S_1(n,\ A_q)\right),\quad n\to\infty.\tag{30}$$

Несложными вычислениями из (29) находим, что $c_q=2q\gamma^{2q-1}[(q-1)!]^2$. Асимптотическое равенство (30) примет вид

$$\hat\varepsilon_{n,q}^*((1-x)^\gamma,A_q^*)\sim\frac{2^{\gamma+1}\gamma\,\Gamma(2\gamma-1)\,|\sin\pi\gamma|}{\pi}\left(q\gamma^{2q-1}[(q-1)!]^2\right)^{2\gamma-1}\left(\frac{\ln^{2q-1}m}{m^{2q}}\right)^{2\gamma-1},$$

где A_q^* — выбранный нами набор параметров. Для того, чтобы доказать, что именно набор A_q^* является оптимальным в том смысле, что величина $\hat\varepsilon_n^*((1-x)^\gamma,A_q^*)$ достигает в этом случае асимптотически минимальное значение, достаточно воспользоваться рассуждениями из [31]. Следовательно,

$$\hat\varepsilon_{n,\ q}^*((1-x)^\gamma)\sim\frac{2^{\gamma+1}\gamma\,\Gamma(2\gamma-1)\,|\sin\pi\gamma|}{\pi}\left(q\gamma^{2q-1}[(q-1)!]^2\right)^{2\gamma-1}\left(\frac{\ln^{2q-1}m}{m^{2q}}\right)^{2\gamma-1}.\tag{31}$$

Заметив, что $m=[n_1/q]$, $n_1=n-p$, из (13) и (31) получим (28). □

Отметив, что оценка (28) является наилучшей среди всех оценок приближений сопряженной функции с плотностью $(1-x)^{\gamma}, \gamma > 1/2$, на отрезке $[-1,\ 1]$ интегральным оператором (5).

В оценке (28) положим $q = 1$. Другими словами, речь идет о приближениях рациональным оператором (5) с одним полюсом в открытой комплексной плоскости.

Следствие 4. Для любого $\gamma > 1/2$ равномерно относительно всех $x \in [-1,\ 1]$ справедлива оценка

$$|\hat{\varepsilon}_{n,1}((1-x)^{\gamma}, x, A_1)| \ \leq \ \frac{2^{\gamma+1}\gamma^{2\gamma}\,\Gamma(2\gamma-1)\,|\sin\pi\gamma|\,\sqrt{1-x^2}}{\pi}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)^{2\gamma-1} + \sqrt{1-x^2}\hat{\delta}_{n,\ 1},\ n\to\infty.$$

Известно ([32], с. 96), что для наилучших равномерных полиномиальных приближений справедливы соотношения

$$E_{2n}(|x|^{2\gamma};[-1,\ 1]) = \frac{1}{2^{\gamma}}E_n((1-x)^{\gamma};[0,\ 1]).$$

Используя аналогичные рассуждения, получим

Следствие 5. При любом $s > 1$ для приближений сопряженной функции с плотностью $|x|^s$ на отрезке $[-1,\ 1]$ рациональным интегральным оператором (5) имеем

$$|\hat{\varepsilon}^*_{2n,\ 2q}(|x|^s, x, A_{2q})| \leq \frac{2|x|\sqrt{1-x^2}s\,\Gamma(s-1)}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \times$$
$$\times\left(\frac{q^{2q+1}s^{2q-1}[(q-1)!]^2}{2^{2q-1}}\right)^{s-1}\left(\frac{\ln^{2q-1}n}{n^{2q}}\right)^{s-1} + \sqrt{1-x^2}\hat{\delta}_{2n,\ 2q}(s), \quad n\to\infty.$$

В частности, при $q = 1$ получим

$$|\hat{\varepsilon}^*_{2n,2}(|x|^s, x, A_2)| \ \leq \frac{4|x|\sqrt{1-x^2}\,\Gamma(s-1)}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\left(\frac{s}{2}\right)^s\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)^{s-1} + \sqrt{1-x^2}\hat{\delta}_{2n,\ 2}(s),\ n\to\infty.$$

Интересно сравнить оценку, полученную в теореме 4 с оценкой в следствии 3 полиномиальных приближений исследуемой сопряженной функции. В то время как частичные суммы полиномиального сопряженного ряда Фурье–Чебышева обеспечивают скорость убывания приближений порядка $O(1/n^{2\gamma-1})$, в случае рациональных приближений с q-геометрически различными полюсами аппроксимирующей функции в открытой комплексной плоскости при специальном выборе параметра скорость убывания приближений можно увеличить до $O((\ln^{2q-1}n/n^{2q}\ )^{2\gamma-1})$. Таким образом, скорость приближений исследуемой сопряженной функции рассматриваемым рациональным интегральным оператором Фурье–Чебышева в значительной степени выше соответствующих полиномиальных аналогов, т. е. изучаемый метод приближений отражает особенности рациональной аппроксимации класса сопряженных функций с плотностью $f(t) = (1-t)^{\gamma}, \gamma > 1/2$.

Заключение

В работе построен сопряженный рациональный интегральный оператор Фурье–Чебышева на отрезке $[-1,\ 1]$, ассоциированный с системой алгебраических дробей Чебышева–Маркова и исследованы его аппроксимационные свойства. Найдено интегральное представление и изучены приближения на отрезке $[-1,\ 1]$ сопряженной функции с плотностью $f(t) = (1-t)^{\gamma}$, $\gamma > 1/2$, исследуемым методом. Получено интегральное представление приближений, точная их оценка в зависимости от положения точки на отрезке, равномерная в некотором смысле оценка и асимптотическое представление ее мажоранты при $n \to \infty$ в случае фиксированного количества геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции. Найдено оптимальное значение параметров аппроксимирующей рациональной функции, обеспечивающее наибольшую скорость убывания мажоранты приближений. Установлено, что построенный метод рациональной аппроксимации сопряженных функций на отрезке $[-1, 1]$ при специальном выборе параметров обеспечивает скорость приближений выше в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

Литература

[1] Пыхтеев Г.Н. *О вычислении некоторых сингулярных интегралов с ядром типа Коши*, Прикл. матем. и механ. **23**, 1074–1082 (1959).

[2] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи* (Гос. изд-во физ.-матем. лит-ры, М., 1958).

[3] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения*, 3-е изд. (Наука, М., 1968).

[4] Butzer P.L, Stens R.L. *The operational properties of Chebyshev transform.* II. *Fractional Derivatives*, Proc. Internat. Conf. on the Theory of Approximation of Functions (Kaluga, 1975), Moscow, 49–61 (1977).

[5] Моторный В.П. *Приближение некоторых классов сингулярных интегралов алгебраическими многочленами*, Укр. матем. журн. **53** (3), 331–345 (2001).

[6] Моторный В.П. *Приближение одного класса сингулярных интегралов алгебраическими многочленами с учетом положения точки на отрезке*, Тр. МИАН **232**, 268–285 (2001).

[7] Мисюк В.Р., Пекарский А.А. *Сопряженные функции на отрезке и соотношения для их наилучших равномерных полиномиальных приближений*, Весцi НАН Беларусi, Сер. Фiз.-матэм. навук **2**, 37–40 (2015).

[8] Priwaloff I. *Sur les fonctions conjuguées*, Bull. de la Soc. Math. de France **44**, 100–103 (1916).

[9] Привалов И.И. *К теории сопряженных тригонометрических рядов*, Матем. сб. **31** (2), 224–228 (1923).

[10] Kolmogorov A.N. *Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier*, Fund. Math. **7**, 24–29 (1925).

[11] Riesz M. *Les fonctions conjuguées et les séries de Fourier*, Compt. rend. de l'Acad. des Sci. **178**, 1464–1467 (1924).

[12] Riesz M. *Sur les fonctions conjuguées*, Math. Zeit. **27**, 218–244 (1927).

[13] Бари Н.К. *О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций*, Изв. АН СССР, Сер. матем. **19** (5), 285–302 (1955).

[14] Стечкин С.Б. *О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами*, Изв. АН СССР, Сер. матем. **20** (2), 197–206 (1956).

[15] Русак В.Н., Рыбаченко И.В. *Равномерная рациональная аппроксимация сопряженных функций*, Вестн. БГУ, Сер. 1. Физ., матем. и информатика **3**, 83–86 (2013).

[16] Mardvilko T.S., Pekarskii A.A. *Conjugate Functions on the Closed Interval and Their Relationship with Uniform Rational and Piecewise Polynomial Approximations*, Math. Notes **99** (3), 272–283 (2016).

[17] Русак В.Н. *Об одном методе приближения рациональными функциями*, Весцi АН БССР. Сер. фiз.-матэм. навук. **3**, 15–20 (1978).

[18] Ровба Е.А. *Рациональные интегральные операторы на отрезке*, Вестн. БГУ, Сер. 1. Матем. и информатика **1** (1), 34–39 (1996).

[19] Ровба Е.А. *Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации*, ДАН БССР **23** (11), 968–971 (1979).

[20] Джрбашян М.М. *К теории рядов Фурье по рациональным функциям*, Изв. АН АрмССР, Сер. физ.-матем. **9** (7), 3–28 (1956).

[21] Смотрицкий К.А. *О приближении дифференцируемых в смысле Римана–Лиувилля функций*, Изв. НАН Беларуси, Сер. физ.-матем. наук **4**, 42–47 (2002).

[22] Potseiko P.G., Rovba Y.A., Smotritskii K.A. *On one rational integral operator of Fourier–Chebyshev type and approximation of Markov functions*, Журн. Белорусск. гос. ун-та. Матем. Информатика **2**, 6–27 (2020).

[23] Поцейко П.Г., Ровба Е.А. *Приближения на классах интегралов Пуассона рациональными интегральными операторами Фурье–Чебышева*, Сиб. матем. журн. **62** (2), 362–386 (2021).

[24] Ровба Е.А., Поцейко П.Г. *Приближения сопряженных функций частичными суммами сопряженных рядов Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышева–Маркова*, Изв. вузов. Матем. (9), 68–84 (2020).

[25] Русак В.Н. *Рациональные функции как аппарат приближения* (Изд.-во БГУ, Минск, 1979).
[26] Бари Н.К. *Тригонометрические ряды* (Физматлит, М., 1961).
[27] Лунгу К.Н. *О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов*, Матем. сб. **86** (128):2(10), 314–324 (1971).
[28] Лунгу К.Н. *О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов*, Сиб. матем. журн. **25** (2), 151–160 (1984).
[29] Евграфов М.А. *Асимптотические оценки и целые функции* (Наука, М., 1979).
[30] Федорюк М.В. *Асимптотика. Интегралы и ряды* (Гл. ред. Физ.-матем. лит-ры, М., 1987).
[31] Rovba E.A., Mikulich E.G. *Constants in rational approximation of Markov–Stieltjes functions with fixed number of poles*, Веснік ГрДу імя Янкі Купалы, Сер. 2. Матэм. Фіз. Інфарм., вылічальн. тэхн. і кіраванне **1** (148), 12–20 (2013).
[32] Бернштейн С.Н. *Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной.* Ч. 1 (Гл. ред. общетехн. лит-ры, М.–Л., 1937).

Павел Геннадьевич Поцейко

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы,
ул. Ожешко, д. 22, г. Гродно, 230023, Республика Беларусь,

e-mail: pahamatby@gmail.com

Евгений Алексеевич Ровба

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы,
ул. Ожешко, д. 22, г. Гродно, 230023, Республика Беларусь,

e-mail: rovba.ea@gmail.com

P.G. Potseiko and Ye.A. Rovba

Conjugate rational Foutier–Chebyshev operator and its approximation properties

Abstract. In this paper, a conjugate rational integral Fourier–Chebyshev operator associated with the system of Chebyshev–Markov algebraic fractions is constructed. Pointwise estimates of approximations on the segment $[-1,\ 1]$ of the conjugate function with density $(1-x)^{\gamma}, \gamma > 1/2$, and uniform estimates of approximations expressed in terms of a certain majorant are obtained. Asymptotic expression for majorants of approximations and optimal values of parameters that provide the highest speed decreasing majorants are found. At the corollary the corresponding estimates of approximations on the segment $[-1,\ 1]$ of the conjugate function under study by partial sums of conjugate polynomial Fourier–Chebyshev series are given.

Keywords: conjugate function, integral operator, rational approximation, pointwise estimate, asymptotic estimate, best approximation.

Pavel Gennadjevich Potseiko

Yanka Kupala State University of Grodno,
22 Ozheshko str., Grodno, 230023 Republic of Belarus,

e-mail: pahamatby@gmail.com

Yevgeniy Alekseevich Rovba

Yanka Kupala State University of Grodno,
22 Ozheshko str., Grodno, 230023 Republic of Belarus,

e-mail: rovba.ea@gmail.com