Н. В. Бурмашева, Е. Ю. Просвиряков, Точные решения для установившихся конвективных слоистых течений с пространственным ускорением, *Изв. вузов. Матем.*, 2021, номер 7, 12–22

DOI: 10.26907/0021-3446-2021-7-12-22

Известия вузов. Математика
2021, № 7, с. 12–22

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Н.В. БУРМАШЕВА, Е.Ю. ПРОСВИРЯКОВ

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УСТАНОВИВШИХСЯ КОНВЕКТИВНЫХ СЛОИСТЫХ ТЕЧЕНИЙ С ПРОСТРАНСТВЕННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Аннотация. В статье рассматриваются неодномерные конвективные слоистые течения вязкой несжимаемой жидкости с пространственным ускорением. Моделирование производится на основе уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска. Решение этих уравнений ищется в обобщенном классе точных решений, в котором все компоненты вектора скорости, давление и температура представлены в виде полных линейных форм по двум декартовым координатам с нелинейными (относительно третьей декартовой координаты) коэффициентами. Показано, что для слоистых течений система определяющих соотношений сводится к переопределенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Сформулированы и доказаны две теоремы, обосновывающие существование (при выполнении специального алгебраического условия) и единственность решения получившейся переопределенной системы.

Ключевые слова: точное решение, слоистое течение, переопределенная система, условие совместности.

УДК: 517.958

DOI: 10.26907/0021-3446-2021-7-12-22

Введение

Известно, что внешнее поле силы тяжести в неизотермической жидкости генерирует конвективные течения. Для описания таких движений жидкости в большинстве случаев используется приближение Буссинеска [1], [2]. В этом случае уравнения движения связаны с уравнением теплопроводности, что существенно усложняет получение точных решений [3]–[7]. Несмотря на развитие методов вычислительной гидродинамики, не теряет актуальности задача точного интегрирования системы уравнений Навье–Стокса, дополненной уравнением несжимаемости и калорическим уравнением. Этот факт можно объяснить тем, что даже для самых сложных численных методов необходимо разрабатывать тестовые примеры, которые могут помочь в верификации и апробации вычислительных экспериментов [8]–[13]. Точные решения незаменимы при построении физических теорий [1], [14]–[16] и создании технических устройств [17]–[22].

Не вызывает сомнений, что течение жидкостей является трехмерным как по скоростям, так и по координатам. К настоящему времени имеется несколько классов точных решений уравнений Навье–Стокса, позволяющих исследовать трехмерные движения жидкости в различных силовых полях [5], [23]–[25]. В приложениях, например, в геофизической гидродинамике или в гидродинамике щелевых систем, можно пренебречь одной компонентой

Поступила в редакцию 24.06.2020, после доработки 12.11.2020. Принята к публикации 24.12.2020.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00571).

вектора скорости. Получившееся после редукции двумерное поле скоростей (слоистое или сдвиговое течение) может зависеть от трех координат — это так называемые течения размерности «два с половиной» [26]–[28]. Основная сложность исследования системы уравнений Навье–Стокса, описывающих слоистые или сдвиговые течения жидкости, заключается в переопределенности уравнений движений [26]–[31].

Исследование переопределенной системы уравнений Навье–Стокса и уравнения несжимаемости было начато Беркером [32]. Он построил много точных решений для плоских изобарических течений вязкой несжимаемой жидкости. В статьях Шмыглевского был проведен полный анализ плоских течений жидкости при постоянном давлении и получено условие разрешимости. В статьях [30], [32]–[37] были предложены точные решения и новые классы точных решений для описания изобарических течений размерности «два с половиной». Вид точного решения $V_x = U(z,t) + u(z,t)\,y, V_y = V(z), V_z = 0$ был использован для описания конвективных течений завихренной жидкости. Поле скоростей $V_x = U(z,t) + u(z,t)\,y, V_y = V(z), V_z = 0$ является частным случаем семейства точных решений Линя–Сидорова–Аристова. В недавних статьях [26], [27] исследовалась разрешимость уравнений Навье–Стокса в классе Линя–Сидорова–Аристова для изотермических течений вращающейся жидкости. В этих статьях рассматривались случаи, когда вектор угловой скорости содержал один (ось вращения параллельна направлению ускорения свободного падения) [26] или два параметра Кориолиса [27]. Изучение условий существования точных решений размерности «два с половиной» для слоистых и сдвиговых течений в классе Линя–Сидорова–Аристова до настоящего времени не проводилось. Таким образом, данная задача нуждается в решении для использования полученных результатов в геофизической гидродинамике и других разделах гидродинамики, где применимо приближение тонкого слоя (пренебрежение вертикальной скоростью в потоке жидкости).

В данной статье получено условие разрешимости переопределенной системы уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска [1], [2] для класса установившихся слоистых течений вязкой несжимаемой жидкости, описываемых полными линейными формами по части пространственных переменных. Построены точные (аналитические) решения для кинематико-динамических характеристик, определяющих выбранный класс течений вязкой жидкости.

1. Постановка задачи

Уравнения движения вязкой сплошной среды (жидкости или газа) являются, как известно, квадратично нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных [1], [2]:

$$(\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{V} = -\nabla P + \nu\triangle\mathbf{V} + \mathbf{F}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{V}(t,x,y,z) = (V_x, V_y, V_z)$ — скорость жидкости, $\mathbf{F}$ — вектор объемных (массовых) сил. Согласно гипотезе Буссинеска для конвективных течений [1], [2] $\mathbf{F} = (0, 0, g\beta T)$, где g — ускорение свободного падения, β — коэффициент объемного расширения, $T(t,x,y,z)$ — отклонение температуры от равновесного состояния, $P(t,x,y,z)$ — отклонение давления от гидростатического, нормированное на среднюю постоянную плотность жидкости ρ, ν — кинематическая (молекулярная) вязкость, $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ — оператор Гамильтона, $(\mathbf{V}\cdot\nabla) = V_x\dfrac{\partial}{\partial x} + V_y\dfrac{\partial}{\partial y} + V_z\dfrac{\partial}{\partial z}$ — конвективная производная, $\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

При использовании приближения Буссинеска для описания тепловой конвекции можно считать эффекты сжимаемости пренебрежимо малыми [1], [2]. В этом случае жидкость можно рассматривать несжимаемой, т. е. скорости ее движения должны удовлетворять дополнительно следующему уравнению, являющемуся следствием закона сохранения масс:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \tag{2}$$

Для замыкания системы уравнений (1), (2) необходимо дополнительно рассматривать закон изменения температуры (уравнение теплопроводности)

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\, T = \chi \triangle T, \tag{3}$$

где χ — коэффициент температуропроводности.

Будем далее рассматривать слоистые конвективные установившиеся течения ($V_z = 0$). В этом случае система уравнений (1)–(3) с учетом принятых выше допущений примет вид

$$\begin{gathered}
V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V_x, \\
V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V_y, \\
\frac{\partial P}{\partial z} = g\beta T, \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \\
V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).
\end{gathered} \tag{4}$$

Система (4) является нелинейной (за счет наличия конвективной производной) системой дифференциальных уравнений в частных производных. Число уравнений в ней превышает число неизвестных функций (скорости V_x, V_y, давление P, температура T). При этом ни одно уравнение системы (4) не является изолированным, т. е. ни одна из искомых неизвестных не может быть найдена независимо от других неизвестных функций, подлежащих определению. Точное решение системы (4), отличное от тривиального (нулевого), будем определять в классе Линя–Сидорова–Аристова, линейно зависящем от части координат [23], [26]–[29], [38]–[40]:

$$\begin{aligned}
V_x &= U(z) + u_1(z)\, x + u_2(z)\, y, \\
V_y &= V(z) + v_1(z)\, x + v_2(z)\, y, \\
T &= T_0(z) + T_1(z)\, x + T_2(z)\, y, \\
P &= P_0(z) + P_1(z)\, x + P_2(z)\, y.
\end{aligned} \tag{5}$$

Отметим, что коэффициенты линейных форм (5) относительно координат x и y зависят от поперечной координаты z.

Подставляя выражения (5) в систему уравнений (4) с учетом принципа неопределенных коэффициентов относительно независимых переменных x, y, приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которую разобьем на подсистемы:

$$\begin{gathered}
u_1^2 + u_2 v_1 = \nu u_1'', \quad u_1 u_2 + u_2 v_2 = \nu u_2'', \quad u_1 v_1 + v_1 v_2 = \nu v_1'', \\
u_2 v_1 + v_2^2 = \nu v_2'', \quad u_1 + v_2 = 0;
\end{gathered} \tag{6}$$

$$u_1 T_1 + v_1 T_2 = \chi T_1'', \quad u_2 T_1 + v_2 T_2 = \chi T_2''; \tag{7}$$

$$P_1' = g\beta T_1, \quad P_2' = g\beta T_2; \tag{8}$$

$$U u_1 + V u_2 = -P_1 + \nu U'', \quad U v_1 + V v_2 = -P_2 + \nu V''; \tag{9}$$

$$U T_1 + V T_2 = \chi T_0'', \quad P_0' = g\beta T_0. \tag{10}$$

Дифференцирование в системе (6)–(10) ведется по горизонтальной координате z. При переходе от системы (4) уравнений в частных производных к редуцированной системе (6)–(10) обыкновенных дифференциальных уравнений наследуется свойство переопределенности. Для нахождения двенадцати неизвестных функций, являющихся коэффициентами линейных форм (5), имеются тринадцать уравнений. Заметим, что в подсистемах (7)–(10) число неизвестных функций совпадает с числом дифференциальных уравнений относительно них. Только система (6) является переопределенной. Другими словами, если удастся получить нетривиальное решение дифференциальных уравнений, входящих в (6), удовлетворяющих алгебраическому условию из этой системы, то последовательным интегрированием будет найдено совместное решение переопределенной системы (6)–(10).

2. Анализ разрешимости системы

Теорема 1. *Переопределенная система* (6)–(10) *имеет нетривиальное точное решение в классе* (5)*, являющееся точным решением системы* (1),(2)*, тогда и только тогда, когда функции* u_1*,* u_2*,* v_1 *удовлетворяют соотношениям*

$$u_1 = u\cos\vartheta\sin\vartheta, \quad u_2 = u\cos^2\vartheta, \quad v_1 = -u\sin^2\vartheta,$$

где u *— функция, удовлетворяющая уравнению* $u'' = 0$*, а* ϑ *— некоторое число.*

Доказательство. Рассмотрим отдельно дифференциальные уравнения системы (6). С учетом условия $u_1 + v_2 = 0$ они примут вид

$$\begin{gathered} \nu u_1'' = u_1^2 + u_2 v_1, \quad \nu u_1'' = -u_2 v_1 - u_1^2, \\ u_2'' = 0, \quad v_1'' = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Складывая и вычитая попарно первое уравнение системы (11) со вторым, получим, что пространственные ускорения u_1, u_2, v_1 являются решениями следующих дифференциальных уравнений:

$$u_1'' = 0, \quad u_2'' = 0, \quad v_1'' = 0. \tag{12}$$

При этом общее решение системы (12) должно удовлетворять алгебраическому условию совместности

$$u_1^2 + u_2 v_1 = 0. \tag{13}$$

Условие (13) следует из того, что левые части первых двух уравнений системы (11) совпадают, а правые части отличаются знаком.

Общее решение системы дифференциальных уравнений (12) имеет вид

$$u_1 = \psi_1 z + \psi_2, \quad u_2 = \psi_3 z + \psi_4, \quad v_1 = \psi_5 z + \psi_6. \tag{14}$$

Параметры ψ_i $(i = 1, \ldots, 6)$ в решении (14) — постоянные интегрирования.

Соотношение (13) позволяет определить постоянные интегрирования в общем решении (14) изолированных (независимых) дифференциальных уравнений (12) таким образом, что переопределенная система (11) будет совместна. После небольших алгебраических преобразований условие (13) в силу выражений (14) примет вид

$$\left(\psi_1^2 + \psi_3\psi_5\right) z^2 + \left(2\psi_1\psi_2 + \psi_3\psi_6 + \psi_4\psi_5\right) z + \psi_2^2 + \psi_4\psi_6 = 0.$$

Применяя к получившемуся соотношению принцип неопределенных коэффициентов, приходим к системе алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования ψ_i:

$$\psi_1^2 + \psi_3\psi_5 = 0, \quad 2\psi_1\psi_2 + \psi_3\psi_6 + \psi_4\psi_5 = 0, \quad \psi_2^2 + \psi_4\psi_6 = 0. \tag{15}$$

Система (15) имеет несколько нетривиальных решений:

(a) $\psi_4 = \dfrac{\psi_2\psi_3}{\psi_1}, \psi_5 = -\dfrac{\psi_1^2}{\psi_3}, \psi_6 = -\dfrac{\psi_1\psi_2}{\psi_3}$
$\Big($его частный случай $\psi_2 = \psi_4 = 0, \psi_5 = -\dfrac{\psi_1^2}{\psi_3}, \psi_6 = 0\Big)$,

(b) $\psi_1 = \psi_3 = \psi_5 = 0, \psi_6 = -\dfrac{\psi_2^2}{\psi_4}$
(его частный случай $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_5 = \psi_6 = 0$),

(c) $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 0$,

(d) $\psi_1 = \psi_2 = \psi_5 = \psi_6 = 0$
(его частный случай $\psi_1 = \psi_2 = \psi_4 = \psi_5 = \psi_6 = 0$).

Не ограничивая общности рассуждений, запишем решение (14) с учетом соотношения (a):

$$u_1 = \psi_1 z + \psi_2, \quad u_2 = \psi_3 z + \frac{\psi_2\psi_3}{\psi_1} = \frac{\psi_3}{\psi_1}\left(\psi_1 z + \psi_2\right),$$

$$v_1 = \psi_5 z + \psi_6 = -\frac{\psi_1^2}{\psi_3} z - \frac{\psi_1\psi_2}{\psi_3} = -\frac{\psi_1}{\psi_3}\left(\psi_1 z + \psi_2\right). \tag{16}$$

Решение (16) системы (12), (13) компактно можно записать, используя набор функций

$$u_1 = u\cos\vartheta\sin\vartheta = -v_2, \quad u_2 = u\cos^2\vartheta, \quad v_1 = -u\sin^2\vartheta. \tag{17}$$

Здесь $u = c_1 z + c_2$ — функция, удовлетворяющая уравнению $u'' = 0$, а ϑ — произвольное число.

В случаях (b)–(d) решение (14) принимает соответственно вид

$$u_1 = \psi_2, u_2 = \psi_4, v_1 = -\frac{\psi_2^2}{\psi_4}, \quad u_1 = 0, u_2 = 0, v_1 = \psi_5 z + \psi_6, \quad u_1 = 0, u_2 = \psi_3 z + \psi_4, v_1 = 0.$$

Очевидно, полученные выражения являются частными случаями формы записи (17). □

3. Построение точного решения в замкнутой форме

После того, как найдено нетривиальное решение переопределенной системы (6), уравнения (7)–(10) образуют замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, число уравнений совпадает с числом неизвестных функций. Докажем разрешимость этой системы конструктивно, т.е. явно построим ее решение.

Теорема 2. *При любых значениях параметров ϑ, c_1, c_2, определяющих набор функций* (17), *система дифференциальных уравнений* (7)–(10) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Подставим решение (17) в уравнения системы (7), позволяющие определить продольные (горизонтальные) градиенты T_1, T_2 поля температуры T, получим

$$\chi T_1'' = u\cos\vartheta\sin\vartheta T_1 - u\sin^2\vartheta T_2,$$

$$\chi T_2'' = u\cos^2\vartheta T_1 - u\cos\vartheta\sin\vartheta T_2. \tag{18}$$

Поведение и структура решений системы (18) зависит от значения параметра ϑ. Начнем с частного случая, когда $\sin\vartheta = 0$. Тогда система (18) значительно упрощается:

$$T_1'' = 0, \quad \chi T_2'' = uT_1, \tag{19}$$

т. е. получаем обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами относительно функций T_1, T_2. Решение системы (19) легко находится путем последовательного интегрирования сначала первого, а потом и второго ее уравнений:

$$T_1 = \alpha_1 z + \alpha_2,$$
$$T_2 = \frac{1}{\chi}\left(\frac{c_1\alpha_1}{12}z^4 + \frac{(c_1\alpha_2 + c_2\alpha_1)}{6}z^3 + \frac{c_2\alpha_2}{2}z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2\right), \tag{20}$$

здесь $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2$ — постоянные интегрирования. Решение вида (20) было исследовано в [41].

Заметим, что при формальной симметрии уравнений системы (7) относительно неизвестных функций T_1, T_2 в рассматриваемом частном случае она имеет несимметричное решение (20): компонента T_1 поля температуры описывается полиномом второй степени, а компонента T_2 — полиномом четвертой степени.

Точные решения для продольных градиентов P_1, P_2 поля давления P определяются путем интегрирования уравнения (8), т. е. фактически (с точностью до постоянного множителя $g\beta$) нахождением первообразных от полиномов T_1, T_2. Выражения для градиентов давления имеют вид

$$P_1 = g\beta\left(\frac{\alpha_1}{2}z^2 + \alpha_2 z + \xi_1\right),$$
$$P_2 = \frac{g\beta}{\chi}\left(\frac{c_1\alpha_1}{60}z^5 + \frac{(c_1\alpha_2 c_2\alpha_1)}{24}z^4 + \frac{c_2\alpha_2}{6}z^3 + \frac{\gamma_1}{2}z^2 + \gamma_2 z + \xi_2\right), \tag{21}$$

где ξ_1, ξ_2 — постоянные интегрирования.

Система (9) при $\sin\vartheta = 0$ примет более простой вид:

$$\nu U'' = Vu + P_1, \quad \nu V'' = P_2. \tag{22}$$

Проинтегрируем сначала второе уравнение системы (22), используя выражения (21), получим

$$V = \frac{g\beta}{\nu\chi}\left(\frac{c_1\alpha_1}{2520}z^7 + \frac{(c_1\alpha_2 + c_2\alpha_1)}{720}z^6 + \frac{c_2\alpha_2}{120}z^5 + \frac{\gamma_1}{24}z^4 + \frac{\gamma_2}{6}z^3 + \frac{\xi_2}{2}z^2 + \lambda_1 z + \lambda_2\right).$$

Здесь λ_1, λ_2 — постоянные интегрирования. Подставляя это решение в первое уравнение системы (22), дважды интегрируя получившееся соотношение, находим вид точного решения для однородной скорости U:

$$U = \frac{f}{\nu} + \lambda_3 z + \lambda_4.$$

Здесь $f(z)$ — полином десятой степени, являющийся результатом двукратного интегрирования суммы $Vu + P_1$, а λ_3, λ_4 — постоянные интегрирования.

Далее, интегрируя уравнения системы (10), получаем решения для фоновых компонент поля давления и поля температуры. Правые части обоих указанных уравнений являются полиномиальными функциями переменной z, поэтому данная операция сложности не представляет и производится однозначным образом.

Рассмотрим теперь общий случай ($\sin\vartheta \neq 0$). Умножим первое уравнение системы (18) на $\cos\vartheta$, а второе на $\sin\vartheta$ и вычтем друг из друга. В результате элементарных алгебраических преобразований придем к следующему уравнению:

$$T_1'' \cos\vartheta - T_2'' \sin\vartheta = 0. \tag{23}$$

Дважды интегрируя соотношение (23), разрешаем его относительно функции T_2:

$$T_2 = \frac{T_1\cos\vartheta - \alpha_1 z - \alpha_2}{\sin\vartheta}. \tag{24}$$

Далее подставляем полученное выражение (24) в первое уравнение системы (18) и преобразовываем его к виду

$$T_1'' = \frac{\sin\vartheta}{\chi}\left(\alpha_1 z + \alpha_2\right)\left(c_1 z + c_2\right). \tag{25}$$

Заметим, что уравнение (25) справедливо при любом значении параметра ϑ, а в частном случае $\sin\vartheta = 0$ условие (25) эквивалентно первому уравнению приведенной выше системы (19). Решение уравнения (25) находится двукратным последовательным интегрированием:

$$T_1 = \frac{\sin\vartheta}{12\chi}\left(\alpha_1 c_1 z^4 + 2\left(\alpha_1 c_2 + \alpha_2 c_1\right) z^3 + 6\alpha_2 c_2 z^2 + 12\gamma_1 z + 12\gamma_2\right). \tag{26}$$

Подставляя решение (26) в соотношение (24) определяем точное решение для второго продольного градиента поля температуры:

$$T_2 = \frac{\cos\vartheta}{12\chi}\left(\alpha_1 c_1 z^4 + 2\left(\alpha_1 c_2 + \alpha_2 c_1\right) z^3 + 6\alpha_2 c_2 z^2 + 12\gamma_1 z + 12\gamma_2\right) - \frac{\alpha_1 z + \alpha_2}{\sin\vartheta}. \tag{27}$$

Таким образом, согласно выражениям (26), (27), общее решение для продольных градиентов температуры представляет собой набор полиномиальных функций, чей порядок не превосходит четырех.

Далее путем интегрирования уравнений (8) определяются точные решения для продольных градиентов P_1, P_2 поля давления P:

$$P_1 = g\beta\frac{\sin\vartheta}{240\chi}\left(4\alpha_1 c_1 z^5 + 5\left(\alpha_1 c_2 + \alpha_2 c_1\right) z^4 + 40\alpha_2 c_2 z^3 + 120\gamma_1 z^2 + 240\gamma_2 z + 20\xi_1\right),$$

$$P_2 = g\beta\left[\frac{\cos\vartheta}{120\chi}\left(2\alpha_1 c_1 z^5 + 5(\alpha_1 c_2 + \alpha_2 c_1) z^4 + 20\alpha_2 c_2 z^3 + 60\gamma_1 z^2 + 120\gamma_2 z\right) - \frac{\alpha_1 z^2 + 2\alpha_2 z + \xi_2}{2\sin\vartheta}\right]. \tag{28}$$

После того, как найдены точные решения для продольных градиентов давления P_1, P_2, подставим в систему (9) решение (17) для пространственных ускорений u_1, u_2, v_1, v_2 и выражения (28) для компонент P_1, P_2. В результате получим систему

$$\begin{gathered} Uu\cos\vartheta\sin\vartheta + Vu\cos^2\vartheta = -P_1 + \nu U'', \\ U\left(-u\sin^2\vartheta\right) + V\left(-u\cos\vartheta\sin\vartheta\right) = -P_2 + \nu V''. \end{gathered} \tag{29}$$

Умножим первое уравнение системы (29) на $\sin\vartheta$, второе на $\cos\vartheta$ и сложим их. После алгебраических преобразований получим

$$U'' = -\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}V'' + \frac{P_1\sin\vartheta + P_2\cos\vartheta}{\nu\sin\vartheta}. \tag{30}$$

В качестве неоднородного слагаемого в правой части выражения (30) выступает полином пятой степени. Вследствие чего, данное соотношение может быть легко дважды проинтегрировано:

$$U = -\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}V + \frac{q + \lambda_1 z + \lambda_2}{\nu\sin\vartheta}. \tag{31}$$

Здесь $q\left(z\right)$ — полином седьмой степени, полученный в результате двукратного интегрирования суммы $P_1\sin\vartheta + P_2\cos\vartheta$. Подставим зависимость (31) во второе уравнение системы (29). После элементарных преобразований, придем к следующему уравнению:

$$\nu V'' = P_2 - \frac{u\sin\vartheta}{\nu}\left(q + \lambda_1 z + \lambda_2\right). \tag{32}$$

В правой части линейного неоднородного уравнения (32) стоит известный полином седьмой степени. Таким образом, скорость V, удовлетворяющая уравнению (32), есть полином седьмой степени. Заметим также, что подставив в правую часть уравнения (32) значение $\sin\vartheta = 0$, получим второе соотношение системы (22).

После того, как будет найдено решение уравнения (32), находим общее решение для скорости U, пользуясь зависимостью (31). Решения для однородных компонент U, V поля скорости (5) здесь не приводятся ввиду их громоздкости. А также потому, что конкретный вид полиномов U, V не влияет на разрешимость и интегрирование переопределенной системы (6)–(10). По аналогичным соображениям не будут приведены точные решения и для пока что ненайденных коэффициентов линейных форм (5).

Точные решения для скоростей U, V позволяют определить однородную составляющую температурного поля T — фоновую температуру T_0. Согласно первому уравнению системы (10) вторая производная фоновой температуры T_0 есть полином с известными постоянными коэффициентами, полученный подстановкой точных решений для скоростей U, V и продольных градиентов температуры T_1, T_2 в левую часть первого уравнения системы (10). Следовательно, после двукратного интегрирования этого уравнения получим, что точное решение для фоновой температуры T_0 также является полиномом высокого порядка.

В результате подстановки выражения для компоненты T_0 во второе уравнение системы (10) приходим к дифференциальному уравнению для фонового давления P_0 с известной неоднородной правой частью. Общее решение данного уравнения получаем непосредственным интегрированием. Таким образом, и фоновое давление P_0 будет описываться многочленом с постоянными коэффициентами. Получившееся выражение здесь не приводится ввиду его крайней громоздкости, но при необходимости оно может быть легко получено согласно изложенному выше алгоритму поэтапного интегрирования уравнений переопределенной системы (7)–(10).

При этом единственность построенного решения непосредственно следует из приведенного алгоритма интегрирования рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. $\square$

Заключение

В статье исследована разрешимость определяющей системы уравнений Обербека–Буссинеска, используемой для описания установившихся конвективных слоистых течений вязкой несжимаемой жидкости с пространственным ускорением. Было показано, что переопределенная система Обербека–Буссинеска в рамках класса Линя–Сидорова–Аристова сводится к переопределенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Было получено условие совместности уравнений этой переопределенной системы. Доказана соответствующая теорема. Кроме того, конструктивным образом было доказано существование и единственность решения рассматриваемой переопределенной системы. Точное решение, описывающее установившиеся конвективные слоистые течения с пространственным ускорением, представляет собой набор полиномиальных функций высоких порядков.

Литература

[1] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. *Устойчивость конвективных течений* (Наука, М., 1989).

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*, 6-е изд. (Физматлит, М., 2006).

[3] Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. *Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование поля скоростей*, Вестн. Самарск. гос. тех. ун-та, Сер. физ.-матем. науки **21** (1), 180–196 (2017).

[4] Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. *Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование*

полей температуры и давления, Вестн. Самарск. гос. тех. ун-та, Сер. физ.-матем. науки **21** (4), 736–751 (2017).

[5] Prosviryakov E.Yu. *Non-helical exact solutions to the Euler equations for swirling axisymmetric fluid flows*, Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki **23** (4), 764–770 (2019).

[6] Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. *Термокапиллярная конвекция вертикально завихренной жидкости*, Теор. осн. хим. техн. **54** (1), 114–124 (2020).

[7] Пухначёв В.В. *Иерархия моделей в теории конвекции*, в сб.: *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 152–177 (С.-Петербург, 2002).

[8] Hillebrandt W., Müller E., Springel V. *Numerical fluid dynamics in astrophysics*, in: *Notes on numerical fluid mechanics and multidisciplinary design*, Vol. 100, 409–420 (Springer, Berlin, Heidelberg, 2009).

[9] Wölbing R., Baschung B. *Three-dimensional numerical fluid flow simulation of the interior and transitional ballistics process*, in: *Proceedings of* 31 *International Symposium on Ballistics* (*edited by Dr. V.K. Saraswat*), *Hyderabad, India, November* 4–8, 2019 (The Aeronautical Society of India (Hyderabad Branch), The International Ballistics Society, Hyderabad, 2019).

[10] Childs E. *The sonification of numerical fluid flow simulations*, in: *Proceedings of the* 7*th International Conference on Auditory Display* (*ICAD*2001) (*edited by J. Hiipakka, N. Zacharov and T. Takala*), *Espoo, Finland, July* 29*–August* 1, 2001 (International Community for Auditory Display, Espoo, 2001).

[11] Severin T., Brück T., Weuster-Botz D. *Validated numerical fluid simulation of a thin-layer cascade photobioreactor in OpenFOAM*, Engineer. in life sci. **19** (2), 97–103 (2019).

[12] Abe H., Kawamura H., Matsuo Yu. *Direct numerical simulation of a fully developed turbulent channel flow with respect to the Reynolds number dependence*, Trans. of the ASME **123**, 382–393 (2001).

[13] Wang X., Wache P., Navidbakhsh M., Lucius M., Stoltz J.F. *Three-dimensional numerical simulation of blood flow through a modeled aneurysm*, Rus. J. of Biomech. **1**, 26–36 (1999).

[14] Joseph D.D. *Stability of fluid motions* (Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976).

[15] Монин А.С. *Теоретические основы геофизической гидродинамики* (Гидрометеоиздат, Л., 1988).

[16] Педлоски Дж. *Геофизическая гидродинамика* (Мир, М., 1984).

[17] Reinhart W., Häusler K., Schaller P., Erhart S., Stetter M., Dual J., Sayir M. *Rheological properties of blood as assessed with a newly designed oscillating viscometer*, Clinic. hemorheol. and microcircul. **18**, 59–65 (1998).

[18] Skadsem H., Saasen A. *Concentric cylinder viscometer flows of Herschel-Bulkley fluid*, Appl. rheol. **29**, 173–181 (2019).

[19] Scherson D.A., Tolmachev Yu., Wang Zh., Wang J., Palencsar A. *Extensions of the Koutecky–Levich equation to channel electrodes*, Electrochem. and solid state lett. **11** (2) (2007).

[20] Kanzaki Ya., Tokuda K., Bruckenstein S. *Dissociation rates of weak acids using sinusoidal hydrodynamic modulated rotating disk electrode employing Koutecky–Levich equation*, J. of the Electrochem. Soc. **161** (12), H770–H779 (2014).

[21] Treimer S., Tang A., Johnson D.C. *A Consideration of the application of Koutecky–Levich plots in the diagnoses of charge-transfer mechanisms at rotated disk electrodes*, Electroanalysis **14** (3), 165–171 (2002).

[22] Miranda D., Knook M., Paalvast F., Rossi A., Hop W., Oei F., van Bommel J., Gommers D. *Experimental validation of frequent used echocardiographic right ventricular impedance parameters*, Minerva anestesiologica **80** (11), 1169–1177 (2014).

[23] Lin C.C. *Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics*, Arch. for Rational Mech. and Anal. **1**, 391–395 (1958).

[24] Frolovskaya O.A., Pukhnachev V.V. *Analysis of the models of motion of aqueous solutions of polymers on the basis of their exact solutions*, Polymers **10** (6), 684-1–684-13 (2018).

[25] Desale B., Vivek Sharma *Exact solutions superimposed with nonlinear plane waves*, Int. J. of Different. Equat. **2016**, 1846341-1–1846341-7 (2016).

[26] Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. *Точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости*, Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН **26** (2), 79–87 (2020).

[27] Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. *Класс точных решений для двумерных уравнений геофизической гидродинамики с двумя параметрами Кориолиса*, Изв. Иркутск. гос. ун-та, Сер. Матем. **32**, 33–48 (2020).

[28] Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. *Крупномасштабные течения завихренной вязкой несжимаемой жидкости*, Изв. вузов. Авиационная техн. (4), 50–54 (2015).

[29] Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. *Неоднородные течения Куэтта*, Нелин. динам. **10** (2), 177–182 (2014).

[30] Зубарев Н.М., Просвиряков Е.Ю. *О точных решениях для слоистых трехмерных нестационарных изобарических течений вязкой несжимаемой жидкости*, Прикл. механ. и техн. физ. **60** (6), 65–71 (2019).

[31] Varsakelis Ch., Papalexandris M. *Existence of solutions to a continuum model for hydrostatics of fluid-saturated granular materials*, Appl. Math. Lett. **35**, 77–81 (2014).

[32] Berker R. *Sur quelques cas d'integration des equations du movement d'un fluide visqueux incompressible* (Lille, Parois, 1936).

[33] Шмыглевский Ю.Д. *Об изобарических плоских течениях вязкой несжимаемой жидкости*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики **25** (12), 1895–1898 (1985).

[34] Привалова В.В., Просвиряков Е.Ю. *Нелинейное изобарическое течение вязкой несжимаемой жидкости в тонком слое с проницаемыми границами*, Вычисл. мех. сплошных сред **12** (2), 230–242 (2019).

[35] Troncoso J. *Isobaric heat capacity of ionic liquids in aqueous solutions. A review*, J. Chem. Eng. Data **64** (11), 4611–4618 (2019).

[36] Gorshkov A., Prosviryakov E. *Isobaric vortex flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition*, AIP Conf. Proc. **2053**, 040030-1–040030-5 (2018).

[37] Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. *An inhomogeneous Couette-type flow with a perfect slip condition at the lower boundary of an infinite fluid layer*, AIP Conf. Proc. **2176**, 030012-1–030012-4 (2019).

[38] Сидоров А.Ф. *О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн*, Прикл. механ. и техн. физ. **2**, 34–40 (1989).

[39] Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. *Новый класс точных решений трехмерных уравнений термодиффузии*, Теор. осн. хим. техн. **50** (3), 294–301 (2016).

[40] Просвиряков Е.Ю. *Новый класс точных решений уравнений Навье–Стокса со степенной зависимостью скоростей от двух пространственных координат*, Теор. осн. хим. техн. **53** (1), 112–120 (2019).

[41] Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. *Неоднородное конвективное течение Куэтта*, Изв. РАН. МЖГ (5), 3–9 (2016).

Наталья Владимировна Бурмашева

Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, д. 34, г. Екатеринбург, 620049, Россия;
Уральский федеральный университет,
ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия,

e-mail: nat_burm@mail.ru

Евгений Юрьевич Просвиряков

Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, д. 34, г. Екатеринбург, 620049, Россия;
Уральский федеральный университет,
ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия,

e-mail: evgen_pros@mail.ru

N.V. Burmasheva and E.Yu. Prosviryakov

Exact solutions for steady convective layered flows with a spatial acceleration

Abstract. The article considers non-one-dimensional convective layered flows of a viscous incompressible fluid with a spatial acceleration. The simulation is based on the equations of thermal convection in the Boussinesq approximation. The solution to these equations is sought in a generalized class of exact solutions in which all components of the velocity vector, pressure and temperature are presented in the form of complete linear forms along two Cartesian coordinates with non-linear (relative to the third Cartesian coordinate) coefficients. It is shown that for layered flows the system of defining relations reduces to an overdetermined system of ordinary differential equations. Two theorems, that justify the existence (under a special algebraic condition) and the uniqueness of the solution of the resulting overdetermined system, are formulated and proved.

Keywords: exact solution, layered flow, overdetermined system, compatibility condition.

Natalya Vladimirovna Burmasheva

Institute of Engineering Science Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya str., Ekaterinburg, 620049 Russia;
Ural Federal University,
19 Mira str., Ekaterinburg, 620002 Russia,

e-mail: nat_burm@mail.ru

Evgeniy Yur'evich Prosviryakov

Institute of Engineering Science Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya str., Ekaterinburg, 620049 Russia;
Ural Federal University,
19 Mira str., Ekaterinburg, 620002 Russia,

e-mail: evgen_pros@mail.ru