Е. А. Ровба, П. Г. Поцейко, Приближения сопряженных функций частичными суммами сопряженных рядов Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 9, 68–84

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-9-68-84

Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2020, №9, с. 68–84 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Е.А. РОВБА, П.Г. ПОЦЕЙКО

ПРИБЛИЖЕНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЧАСТИЧНЫМИ СУММАМИ СОПРЯЖЕННЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ОДНОЙ СИСТЕМЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ ЧЕБЫШЕВА – МАРКОВА

Аннотация. Исследуются аппроксимативные свойства частичных сумм сопряженного ряда Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова. Приведены основные результаты ранее известных работ о приближениях сопряженных функций в полиномиальном и рациональном случаях. Вводится в рассмотрение одна система алгебраических дробей Чебышева – Маркова и проводится построение сопряженного рационального ряда Фурье – Чебышева, соответствующего ей. Найдено интегральное представление приближений сопряженной функции частичными суммами построенного сопряженного ряда. Исследуются приближения функции, сопряженной к $|x|^s, 1 < s < 2$, на отрезке $[-1,1]$ частичными суммами сопряженного рационального ряда Фурье – Чебышева. Найдены интегральное представление приближений, оценки приближений изучаемым методом в зависимости от положения точки x на отрезке, и их асимптотические выражения при $n \to \infty$. Установлено оптимальное значение параметра, при котором уклонения частичных сумм сопряженного рационального ряда Фурье – Чебышева от функции, сопряженной к $|x|^s, 1 < s < 2$, на отрезке $[-1,1]$ имеют наиболее высокую скорость стремления к нулю. Как следствие полученных результатов подробно исследована задача о приближениях функции, сопряженной к $|x|^s, s > 1$, частичными суммами сопряженного ряда Фурье по системе многочленов Чебышева первого рода.

Ключевые слова: алгебраическая дробь Чебышева – Маркова, сопряженная функция, частичная сумма ряда Фурье – Чебышева, точная оценка, асимптотические методы.

УДК: 517.5

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-9-68-84

1. Введение

В.П. Моторный (см., например, [1]–[3]) изучал задачу о наилучших приближениях алгебраическими многочленами сингулярных интегралов вида

$$S_f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t-x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in (-1,1), \tag{1}$$

понимаемых в смысле главного значения по Коши, где f принадлежит различным классам непрерывных на отрезке функций. Найденные им и его соавторами результаты были получены с использованием методов промежуточного приближения, предложенных Н.П. Корнейчуком и А.И. Половиной [4]. Между тем преобразование $S_f(x)$ можно рассматривать как один из вариантов определения сопряженной функции с функцией f, заданной на отрезке

Поступила в редакцию 01.10.2019, после доработки 12.12.2019. Принята к публикации 18.12.2019.

$[-1,1]$. При этом суперпозиция $S_f(\cos x)$ определенным образом выражается через функцию, тригонометрически сопряженную с индуцированной функцией $f(\cos x)$ ([3]).

Задача исследования приближений функций, задаваемых рядами, сопряженными к тригонометрическому ряду Фурье, ведет свою историю с начала XX в. и затронула интересы таких математиков, как И.И. Привалов (см., например, [5], [6]), А.Н. Колмогоров [7], М. Рисс (см., например, [8], [9]) и др. В дальнейшем наметилась тенденция поиска взаимосвязей между наилучшими приближениями функций и их сопряженных (см., например, [10], [11]). Отметим, что интерес к этой задаче актуален и среди современных математиков (см., например, [12]).

Актуальным направлением является также и изучение методов приближений. К. Кереши (K. Qureshi) [13] исследовал приближения сопряженной функции средними Норлунда (Nörlund) сопряженного тригонометрического ряда Фурье, когда сама функция принадлежит классу Липшица. Позже изучению как приближений, сопряженных функций из данного класса, так и методов приближений, были посвящены работы многих авторов (см. например, [14]–[16]). Л.П. Фалалеев [17] получил асимптотически точные оценки приближений сопряженных функций на классах $\mathrm{lip}\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, средними Чезаро сопряженного тригонометрического ряда Фурье.

К настоящему времени приближения сопряженных функций в полиномиальном случае достаточно хорошо исследованы, и во многих случаях получены окончательные результаты. Изучение методов рациональной аппроксимации в приближениях сопряженных функций носит эпизодический характер. В. Н. Русак и И. В. Рыбаченко [18] нашли сравнительные порядковые оценки для рациональных приближений взаимно сопряженных в смысле Гильберта функций действительной переменной в пространстве непрерывных 2π-периодических функций. А. А. Пекарским [19] изучены связи между рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями функций в пространствах Лебега L_p при $0 < p < \infty$, $1/p \notin \mathbb{N}$. Аналогичный результат на отрезке был получен в [12].

Алгебраические косинус-дроби Чебышева – Маркова являются естественным обобщением полиномов Чебышева первого рода и обладают рядом замечательных свойств (см., например, [20]). В [21] авторами была построена одна система алгебраических дробей Чебышева – Маркова, являющаяся ортогональной на отрезке $[-1,1]$ по весу, обобщающему классический чебышевский, построен соответствующий ряд Фурье и исследованы его аппроксимативные свойства.

Основной целью настоящей работы является изучение аппроксимативных свойств частичных сумм сопряженного ряда Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова в приближениях сопряженных функций, определяемых классами сингулярных интегралов вида (1), а также исследование приближений некоторых индивидуальных сопряженных функций.

В работе найдено представление сопряженной функции, как суммы сопряженного ряда Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова. Получено интегральное представление приближений сопряженной функции частичными суммами ее сопряженного ряда. Исследованы аппроксимативные свойства частичных сумм сопряженного ряда в приближениях функции, сопряженной к $|x|^s$, $1 < s < 2$, на отрезке $[-1,1]$. Получены оценки приближений сопряженной функции в зависимости от положения точки x на отрезке $[-1,1]$, а также в каком-то смысле равномерная оценка приближений. Найдено оптимальное значение параметра, обеспечивающее наибольшую скорость приближений. Установлено, что при специальном выборе параметра достигается более высокая скорость убывания приближений в сравнении с полиномиальным случаем.

Напомним основные сведения о рядах Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова. Как известно [22], алгебраическая косинус-дробь Чебышева – Маркова на отрезке $[-1,1]$ с двумя комплексно-сопряженными параметрами имеет вид

$$M_n(x)=\cos n\arccos\left(x\sqrt{\frac{1+a^2}{1+a^2x^2}}\right),\quad x\in[-1,1],\quad a\geq 0,\quad n=0,1,\ldots, \tag{2}$$

и при $a=0$ представляет собой классический полином Чебышева первого рода. Система алгебраических дробей $M_n(x)$, $n=0,1,\ldots,$ является ортогональной на отрезке $[-1,1]$ с весом

$$\rho(x,a)=\frac{\sqrt{1+a^2}}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1,1),$$

т. е.

$$\int\limits_{-1}^{1}M_n(t)M_m(t)\rho(t,a)\,dt=\begin{cases}0,\quad m\neq n,\quad m,n=0,1,\ldots\,;\\ \pi/2,\quad m=n,\quad m,n=1,2,\ldots\,;\\ \pi,\quad m=n=0.\end{cases}$$

Функции $f(x)$, четной и абсолютно суммируемой с весом $\rho(x,a)$ на отрезке $[-1,1]$, поставим в соответствие ряд Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова:

$$f(x)\sim\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}c_{2n}M_{2n}(x),\quad c_{2n}=\frac{4}{\pi}\int\limits_0^1 f(t)M_{2n}(t)\rho(t,a)\,dt,\quad n=0,1,\ldots\,. \tag{3}$$

Вместе с тем, сопряженной функцией для функции f будем называть сумму ряда

$$\hat{f}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}c_{2n}N_{2n}(x),\quad N_{2n}(x)=\sin 2n\arccos\left(x\sqrt{\frac{1+a^2}{1+a^2x^2}}\right),\quad n=1,2,\ldots, \tag{4}$$

c_{2n} определена в (3).

Справедлива

Теорема 1. *Для функции $\hat{f}(x)$ имеет место представление*

$$\hat{f}(x)=\frac{2}{\pi}x\sqrt{1-x^2}\int\limits_0^1\frac{f(t)}{t^2-x^2}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\quad x\in(-1,1), \tag{5}$$

где интеграл справа понимается в смысле главного значения по Коши.

Доказательство. Из соотношения (4) с учетом (3) находим

$$\hat{f}(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 f(t)\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\sin 2n(\theta+\tau)+\sin 2n(\theta-\tau)\right]\rho(t,a)\,dt, \tag{6}$$

где для краткости положено

$$x\sqrt{\frac{1+a^2}{1+a^2x^2}}=\cos\theta,\quad t\sqrt{\frac{1+a^2}{1+a^2t^2}}=\cos\tau.$$

Применяя теперь известное тождество

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sin 2n\varphi=\frac{\cos\varphi}{2\sin\varphi},\quad \varphi\neq\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$$

получим

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 f(t)\left[\frac{\cos(\theta+\tau)}{\sin(\theta+\tau)} + \frac{\cos(\theta-\tau)}{\sin(\theta-\tau)}\right]\rho(t,a)\,dt = \frac{4\sin\theta\cos\theta}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{f(t)}{\cos 2\tau - \cos 2\theta}\rho(t,a)\,dt.$$

Возвращаясь к переменным x и t, после некоторых преобразований из последнего соотношения придем к (5). $\square$

Замечание 1. Из теоремы 1 с учетом (3), (4) следует

$$\frac{2}{\pi}x\sqrt{1-x^2}\int\limits_0^1 \frac{1}{t^2-x^2}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0, \quad x\in(-1,1). \tag{7}$$

2. Приближения сопряженных функций частичными суммами рационального сопряженного ряда Фурье – Чебышева

Изучим приближения сопряженной функции (5) частичными суммами порядка $2n$ сопряженного ряда (4):

$$\hat{s}_{2n}(f,x) = \sum_{k=1}^{n} c_{2k}N_{2k}(x), \quad n = 1,2,\ldots . \tag{8}$$

Поскольку для алгебраических дробей Чебышева – Маркова четной степени справедливо представление ([22], лемма 2)

$$M_{2n}(x) = \frac{1}{2}\left(\pi_n(\xi) + \overline{\pi_n(\xi)}\right), \quad \pi_n(\xi) = \left(\frac{\xi^2+\alpha^2}{1+\alpha^2\xi^2}\right)^n, \quad \alpha = \frac{\sqrt{1+a^2}-1}{a}, \quad \alpha\in[0,1), \tag{9}$$

где $\xi = \mathrm{e}^{iu}, x = \cos u$, ввиду (2), (4) нетрудно получить, что

$$N_{2n}(x) = \frac{1}{2i}\left(\pi_n(\xi) - \overline{\pi_n(\xi)}\right), \quad \xi = \mathrm{e}^{iu}, \quad x = \cos u. \tag{10}$$

С учетом сказанного, введем обозначение

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(x,\alpha) = \hat{f}(x) - \hat{s}_{2n}(f,x), \quad x\in[-1,1]. \tag{11}$$

Имеет место

Теорема 2. *Для приближений функции $\hat{f}(x)$ частичными суммами рационального сопряженного ряда Фурье – Чебышева $\hat{s}_{2n}(f,x)$ справедливо интегральное представление*

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(x,\alpha) = \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda(u)}}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos v)\frac{\cos[(2n+1)\varphi(u,v)]}{\sin(v-u)}\sqrt{\lambda(v)}\,dv, \tag{12}$$

где

$$\varphi(u,v) = \int\limits_u^v \lambda(y)\,dy, \quad \lambda(y) = \frac{1-\alpha^4}{1+2\alpha^2\cos 2y+\alpha^4},\ x=\cos u,\ \alpha\in[0,1). \tag{13}$$

Доказательство. С учетом (4), (8) в (11) получим

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(x,\alpha) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 f(t)\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left[\sin 2n(\theta+\tau) + \sin 2n(\theta-\tau)\right]\rho(t,a)\,dt,$$

где, как и прежде, положены соответствующие замены между t и τ, x и θ. Учитывая, что

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \sin 2k\varphi = \frac{\cos(2n+1)\varphi}{2\sin\varphi}, \quad \varphi \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z},$$

в последнем соотношении приходим к выражению

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(x,\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 f(t)\left[\frac{\cos(2n+1)(\theta+\tau)}{\sin(\theta+\tau)} + \frac{\cos(2n+1)(\theta-\tau)}{\sin(\theta-\tau)}\right]\rho(t,a)\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 f(t)\tilde{D}_{2n}(t,x)\rho(t,a)\,dt, \quad (14)$$

где

$$\tilde{D}_{2n}(t,x) = \frac{M_{2n+2}(t)N_{2n}(x) - N_{2n+2}(x)M_{2n}(t)}{M_2(t) - M_2(x)}, \quad n = 1,2,\ldots, \qquad (15)$$

— ядро Дирихле частичной суммы (8) сопряженного ряда, где $N_{2n}(x)$ определена в (4), $M_{2n}(x)$ — алгебраическая косинус-дробь Чебышева – Маркова степени $2n$. Выполнив в (14) замену $t = \cos v$, положив при этом $x = \cos u$, и воспользовавшись соотношениями (9), (10), получим

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(x,\alpha) = \frac{1}{4i\pi}\frac{1+a^2x^2}{\sqrt{1+a^2}}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{f(\cos v)}{\cos^2 v - \cos^2 u}\times$$

$$\times\left[(\pi_{n+1}(\zeta) + \overline{\pi_{n+1}(\zeta)})(\pi_n(\xi) - \overline{\pi_n(\xi)}) - (\pi_{n+1}(\xi) - \overline{\pi_{n+1}(\xi)})(\pi_n(\zeta) + \overline{\pi_n(\zeta)})\right] dv,$$

где $\zeta = \mathrm{e}^{iv}$, $\xi = \mathrm{e}^{iu}$, $x = \cos u$. С учетом четности подинтегрального выражения по переменной интегрирования, последнее соотношение приводится к виду

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(x,\alpha) = -\frac{1}{4i\pi}\frac{(1+\alpha^2\xi^2)(\xi^2+\alpha^2)}{\xi^2(1-\alpha^4)}\times$$

$$\times\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{f(\cos v)}{\cos^2 v - \cos^2 u}\left(1 - \pi_1(\xi)\pi_1(\zeta)\right)\left[\frac{\pi_n(\xi)}{\pi_{n+1}(\zeta)} + \frac{\pi_n(\zeta)}{\pi_{n+1}(\xi)}\right] dv.$$

И, наконец, воспользовавшись формулой Эйлера, связывающей комплексную экспоненту с тригонометрическими функциями, находим

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(x,\alpha) = \frac{1}{i\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos v)\left[\frac{\xi^2+\alpha^2}{\zeta^2+\alpha^2}\frac{\pi_n(\xi)}{\pi_n(\zeta)} + \frac{1+\alpha^2\xi^2}{1+\alpha^2\zeta^2}\frac{\pi_n(\zeta)}{\pi_n(\xi)}\right]\frac{\zeta^2\,dv}{\zeta^2-\xi^2}, \qquad (16)$$

где $\zeta = \mathrm{e}^{iv}, \xi = \mathrm{e}^{iu}$. Теперь, чтобы из (16) прийти к (12) заметим, что из ([22], с. 121) следует

$$\exp[in\varphi(u,v)] = \sqrt{\frac{\pi_n(\zeta)}{\pi_n(\xi)}}.$$

□

3. Приближения функции, сопряженной к $|x|^s$, $s \in (1,2)$, на отрезке $[-1,1]$

Применим теорему 2 для исследования аппроксимативных свойств частичных сумм сопряженного ряда в приближениях индивидуальных сопряженных функций.

Пусть на отрезке $[-1,1]$ задана функция $|x|^s$. Из теоремы 1 следует, что при $x \in [-1,1]$ функция, сопряженная к $|x|^s$, $s>1$, задается соотношением

$$\hat{f}_{|x|^s} = -\frac{2}{\pi} x\sqrt{1-x^2}\int\limits_0^1 \frac{t^s}{t^2-x^2}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad s>1,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Отсюда естественным в оценках является наличие множителя $-(2/\pi)x\sqrt{1-x^2}$.

Замечание 2. Как известно ([23], Т. 5, с. 74) сопряженной к функции одного переменного $f_s(x) = (1/s)|x|^s$, $1<s<\infty$, будет функция $f_p(y) = (1/p)|y|^p$, $1/s+1/p=1$. Отсюда также заключаем, что в нашем случае $s>1$.

Введем обозначение

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s, x, \alpha) = \hat{f}_{|x|^s} - \hat{s}_{2n}(|x|^s, x), \quad x\in[-1,1].$$

Справедлива

Теорема 3. *При* $1<s<2$ *для величины* $\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s,x,\alpha)$, $x\in[-1,1]$, *имеет место представление*

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s,x,\alpha) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{s-2}\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1-\alpha^2t^2}\sqrt{\frac{1+2\alpha^2\cos 2u+\alpha^4}{1+2t^2\cos 2u+t^4}}\chi_n(t)\sin\psi_n(x,t,\alpha)\,dt, \tag{17}$$

где

$$\psi_n(x,t,\alpha) = \arg\frac{(1+\alpha^2\xi^2)\overline{\pi_n(\xi)}}{t^2+\xi^2},\ \chi_n(t) = \left(\frac{t^2-\alpha^2}{1-\alpha^2t^2}\right)^n, \quad x=\cos u, n=1,2,\ldots. \tag{18}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (16). Будем полагать, что $x\in(0,1)$. Учитывая, что

$$\frac{1}{i\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{\xi^2+\alpha^2}{\zeta^2+\alpha^2}\frac{\pi_n(\xi)}{\pi_n(\zeta)} + \frac{1+\alpha^2\xi^2}{1+\alpha^2\zeta^2}\frac{\pi_n(\zeta)}{\pi_n(\xi)}\right]\frac{\zeta^2\,dv}{\zeta^2-\xi^2} = 0,$$

находим

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s,x,\alpha) = \frac{1}{i\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos^s u - \cos^s v)\left[\frac{\xi^2+\alpha^2}{\zeta^2+\alpha^2}\frac{\pi_n(\xi)}{\pi_n(\zeta)} + \frac{1+\alpha^2\xi^2}{1+\alpha^2\zeta^2}\frac{\pi_n(\zeta)}{\pi_n(\xi)}\right]\frac{\zeta^2\,dv}{\zeta^2-\xi^2}.$$

Выполнив замену переменного по формуле $\zeta = \mathrm{e}^{iv}$, положив при этом $\xi = \mathrm{e}^{iu}$, имеем

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s,x,\alpha) = \frac{1}{\pi 2^s\xi^s}\int\limits_C \frac{(\xi^2+1)^s\zeta^s - (\zeta^2+1)^s\xi^s}{\zeta^2-\xi^2}\zeta^{1-s}\left[\frac{1+\alpha^2\xi^2}{1+\alpha^2\zeta^2}\frac{\pi_n(\zeta)}{\pi_n(\xi)} + \frac{\xi^2+\alpha^2}{\zeta^2+\alpha^2}\frac{\pi_n(\xi)}{\pi_n(\zeta)}\right]d\zeta,$$

где $C = \left\{\zeta : \zeta = \mathrm{e}^{iv},\ -\pi/2 \le v \le \pi/2\right\}$. Другими словами, C — правая полуокружность единичной окружности, обходимая в положительном направлении. Отметим также, что подинтегральная функция имеет точку ветвления $\zeta = 0$. Интеграл справа разобьем на два интеграла:

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s, x, \alpha) = \frac{1}{\pi 2^s \xi^s}\left[(1+\alpha^2\xi^2)\overline{\pi_n(\xi)} I_1(u,n) + (\xi^2+\alpha^2)\pi_n(\xi) I_2(u,n)\right], \tag{19}$$

где

$$I_1(u,n) = \int\limits_C \frac{(\xi^2+1)^s\zeta^s - (\zeta^2+1)^s\xi^s}{\zeta^2-\xi^2}\zeta^{1-s}\pi_n(\zeta)\frac{d\zeta}{1+\alpha^2\zeta^2},$$

$$I_2(u,n) = \int\limits_C \frac{(\xi^2+1)^s\zeta^s - (\zeta^2+1)^s\xi^s}{\zeta^2-\xi^2}\zeta^{1-s}\overline{\pi_n(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta^2+\alpha^2}.$$

Отметим, что для интегралов $I_1(u,n)$ и $I_2(u,n)$ точка $\zeta = \xi$ является нулем как числителя, так и знаменателя подинтегральных выражений, следовательно, не будет особой. Чтобы избежать неопределенности положим $\xi = \rho \mathrm{e}^{iu}, \rho < 1$. Другими словами, поместим точку ξ внутрь единичного круга. Очевидно, чтобы впоследствии прийти к окончательному результату следует $\rho \to 1$.

Будем исследовать каждый из интегралов в отдельности. Рассмотрим интеграл $I_1(u,n)$. Учитывая условия на параметр s, его подинтегральная функция

$$\varphi_1(\zeta,\xi) = \frac{(\xi^2+1)^s\zeta^s - (\zeta^2+1)^s\xi^s}{(1+\alpha^2\zeta^2)(\zeta^2-\xi^2)}\zeta^{1-s}\pi_n(\zeta)$$

является аналитической в области $\mathfrak{D} = \{\zeta : |\zeta| < 1, \mathfrak{Re}\zeta > 0\}$. Применяя интегральную теорему Коши к контуру, состоящему из C, $C_\delta = \left\{\zeta : \zeta = \delta \mathrm{e}^{i\varphi}, -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2\right\}$ — полуокружности достаточно малого радиуса δ, огибающей точку $\zeta = 0$ по часовой стрелке и отрезка мнимой оси от точки i до $-i$ с изъятым диаметром полуокружности C_δ, находим

$$I_1(u,n) + \left(\int\limits_{i}^{i\delta} + \int\limits_{C_\delta} + \int\limits_{-i\delta}^{-i}\right)\varphi_1(\zeta,\xi)\,d\zeta = 0,$$

где первый и третий интегралы в скобках берутся по соответствующим отрезкам мнимой оси.

Исследуем интеграл по полуокружности C_δ. Выполнив замену $\zeta = \delta\mathrm{e}^{i\varphi}$, получим

$$\int\limits_{C_\delta}\varphi_1(\zeta,\xi)d\zeta = \int\limits_{\pi/2}^{-\pi/2}\frac{(\xi^2+1)^s(\delta\mathrm{e}^{i\varphi})^s - \left((\delta\mathrm{e}^{i\varphi})^2+1\right)^s\xi^s}{((\delta\mathrm{e}^{i\varphi})^2-\xi^2)(1+\alpha^2(\delta\mathrm{e}^{i\varphi})^2)}(\delta\mathrm{e}^{i\varphi})^{1-s}\pi_n(\delta\mathrm{e}^{i\varphi})i\delta\mathrm{e}^{i\varphi}d\varphi.$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $\delta \to 0$, будем иметь

$$\int\limits_{C_\delta}\varphi_1(\zeta,\xi)d\zeta \sim -\frac{2i\alpha^{2n}}{2-s}\left(\frac{\delta}{\xi}\right)^{2-s}\sin\frac{\pi s}{2}, \quad \delta \to 0.$$

Последнее означает, что при $1 < s < 2$ интеграл по полуокружности C_δ при стягивании радиуса δ в точку стремится к нулю. Таким образом, при $1 < s < 2$ и $\delta \to 0$ находим

$$I_1(u,n) = \left(\int\limits_{-i}^{0} + \int\limits_{0}^{i}\right)\frac{(\xi^2+1)^s\zeta^s - (\zeta^2+1)^s\xi^s}{(1+\alpha^2\zeta^2)(\zeta^2-\xi^2)}\zeta^{1-s}\pi_n(\zeta)\,d\zeta.$$

В интегралах справа положим $\zeta = it$. Тогда

$$I_1(u,n) = (-1)^{n+1} i^{2-s} \left(\int\limits_{-1}^{0} + \int\limits_{0}^{1} \right) \frac{(\xi^2+1)^s i^s t^s - (1-t^2)^s \xi^s}{(1-\alpha^2 t^2)(t^2+\xi^2)} t^{1-s} \chi_n(t)\, dt,$$

где $\chi_n(t)$ определена в формулировке теоремы.

Выполнив в первом интеграле справа замену $t \sim -t$ и произведя необходимые преобразования, окончательно получим

$$I_1(u,n) = (-1)^n 2i\xi^s \cos\frac{\pi(1-s)}{2} \int\limits_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{(1-\alpha^2 t^2)(t^2+\xi^2)} \chi_n(t)\, dt. \tag{20}$$

Рассмотрим теперь интеграл $I_2(u,n)$. Его подинтегральная функция

$$\varphi_2(\zeta,\xi) = \frac{(\xi^2+1)^s \zeta^s - (\zeta^2+1)^s \xi^s}{(\zeta^2+\alpha^2)(\zeta^2-\xi^2)} \zeta^{1-s} \overline{\pi_n(\zeta)}$$

в условиях на параметр s является аналитической в области $\mathfrak{D} = \{\zeta : |\zeta| > 1, \mathfrak{Re}\,\zeta > 0\}$, а на бесконечности имеет нуль порядка выше единицы. Применяя рассуждения, аналогичные исследуемому выше случаю, находим

$$\left(\int\limits_{+i\infty}^{i} + \int\limits_{-i}^{-i\infty} \right) \varphi_2(\zeta,\xi)\, d\zeta - I_2(u,n) = 0,$$

где первый и третий интегралы взяты вдоль соответствующих лучей мнимой оси. Следовательно,

$$I_2(u,n) = \left(\int\limits_{+i\infty}^{i} + \int\limits_{-i}^{-i\infty} \right) \frac{(\xi^2+1)^s \zeta^s - (\zeta^2+1)^s \xi^s}{(\zeta^2+\alpha^2)(\zeta^2-\xi^2)} \zeta^{1-s} \overline{\pi_n(\zeta)}\, d\zeta.$$

В интегралах справа выполним замену $\zeta \sim \zeta^{-1}$. Тогда

$$I_2(u,n) = \left(\int\limits_{-i}^{0} + \int\limits_{0}^{i} \right) \frac{(\xi^2+1)^s \zeta^s - (\zeta^2+1)^s \xi^s}{(1+\alpha^2\zeta^2)(1-\xi^2\zeta^2)} \zeta^{1-s} \pi_n(\zeta)\, d\zeta.$$

Выполнив в первом интеграле еще одну замену $\zeta \sim -\zeta$, а затем положив $\zeta = it$, получим

$$I_2(u,n) = (-1)^{n+1} 2i\xi^s \cos\frac{\pi(1-s)}{2} \int\limits_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{(1-\alpha^2 t^2)(1+t^2\xi^2)} \chi_n(t)\, dt. \tag{21}$$

Из (20), (21) в (19) приходим к соотношению

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s, x, \alpha) = \frac{(-1)^n i}{2^{s-1}\pi} \sin\frac{\pi s}{2} \int\limits_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1-\alpha^2 t^2} \left[\frac{1+\xi^2\alpha^2}{\xi^2+t^2} \overline{\pi_n(\xi)} - \frac{\xi^2+\alpha^2}{1+t^2\xi^2} \pi_n(\xi) \right] \chi_n(t)\, dt. \tag{22}$$

Заметим теперь, что выражения, стоящие в квадратных скобках являются взаимно комплексно сопряженными, а значит, их разность является мнимой частью соответствующего слагаемого. Например,

$$\frac{1+\xi^2\alpha^2}{t^2+\xi^2} \overline{\pi_n(\xi)} = \sqrt{\frac{1+2\alpha^2\cos 2u + \alpha^4}{1+2t^2\cos 2u + t^4}} \exp\left[i \left(\arg\frac{1+\xi^2\alpha^2}{t^2+\xi^2} - n\arg\frac{\xi^2+\alpha^2}{1+\alpha^2\xi^2} \right) \right].$$

Отсюда из (22) приходим к (17). Для исследования выражения (16) мы полагали, что $x \in (0,1)$. Из свойств четности функции $|x|^s$ и выражения $\hat{\varepsilon}_{2n}(x,\alpha)$ следует, что представление (17) справедливо также и при $x \in (-1,0)$. Справедливость выражения (17) в точке $x=0$, а также на концах отрезка очевидна. □

4. Оценки приближений функции, сопряженной к $|x|^s, 1<s<2$

Поточечную оценку приближений функции, сопряженной к $|x|^s, 1<s<2$, а также в некотором смысле равномерную по $x,\ x\in[-1,1]$, описывает

Теорема 4. *При $1<s<2$ для величины $\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s,x,\alpha),\ x\in[-1,1]$, справедливы оценки*

$$|\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s,x,\alpha)| \le \frac{|x|\sqrt{1-x^2}}{2^{s-3}\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{(1-\alpha^2t^2)\sqrt{1+2t^2\cos 2u+t^4}}\times$$

$$\times\left[\frac{1-\alpha^2t^2}{\sqrt{1+2t^2\cos 2u+t^4}}+\frac{n(1-\alpha^4)}{\sqrt{1+2\alpha^2\cos 2u+\alpha^4}}\right]|\chi_n(t)|\,dt, \tag{23}$$

$$|\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s,x,\alpha)| \le \hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s,\alpha), \tag{24}$$

где

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s,\alpha) = \frac{|x|\sqrt{1-x^2}}{2^{s-3}\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\left[I_3(n,s,\alpha)+I_4(n,s,\alpha)\right], \tag{25}$$

$$I_3(n,s,\alpha)=\int\limits_0^1(1-t^2)^{s-2}t^{1-s}|\chi_n(t)|\,dt,$$

$$I_4(n,s,\alpha)=(1+\alpha^2)n\int\limits_0^1\frac{(1-t^2)^{s-1}t^{1-s}}{1-\alpha^2t^2}|\chi_n(t)|\,dt,$$

$\chi_n(t)$ из (18). Оценки (23) и (24) точны, равенство достигается при $x=0$, а также на концах отрезка.

Доказательство. Рассмотрим представление (17). Очевидно,

$$|\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s,x,\alpha)| \le \frac{1}{2^{s-2}\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^1\frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1-\alpha^2t^2}\sqrt{\frac{1+2\alpha^2\cos 2u+\alpha^4}{1+2t^2\cos 2u+t^4}}|\sin\psi_n(x,t,\alpha)||\chi_n(t)|\,dt, \tag{26}$$

где $\psi_n(x,t,\alpha)$ из (18). Оценим величину $|\sin\psi_n(x,t,\alpha)|:$

$$\left|\sin\left(\arg\frac{1+\alpha^2\xi^2}{t^2+\xi^2}-n\arg\frac{\xi^2+\alpha^2}{1+\alpha^2\xi^2}\right)\right|=$$

$$=\left|\sin\arg\frac{1+\alpha^2\xi^2}{t^2+\xi^2}\cos n\arg\frac{\xi^2+\alpha^2}{1+\alpha^2\xi^2}-\cos\arg\frac{1+\alpha^2\xi^2}{t^2+\xi^2}\sin n\arg\frac{\xi^2+\alpha^2}{1+\alpha^2\xi^2}\right|.$$

Применяя к последнему соотношению хорошо известные формулы

$$\cos\arg z=\frac{1}{2|z|}(z+\overline{z}),\quad \sin\arg z=\frac{1}{2i|z|}(z-\overline{z}),$$

а также известное неравенство $|\sin nt| \le n|\sin t|$, нетрудно получить, что

$$|\sin\psi_n(x,t,\alpha)| \le \frac{|\sin 2u|}{\sqrt{1+2\alpha^2\cos 2u+\alpha^4}}\left(\frac{1-\alpha^2t^2}{\sqrt{1+2t^2\cos 2u+t^4}}+\frac{n(1-\alpha^4)}{\sqrt{1+2\alpha^2\cos 2u+\alpha^4}}\right).$$

Подставив найденную оценку в (26), докажем первое утверждение теоремы 4.

Для доказательства второго утверждения достаточно заметить, что подинтегральное выражение в (23) достигает своего максимального значения при $u=\pi/2$, что соответствует значению $x=0$, откуда немедленно следует оценка (24).

Точность оценок (23) и (24) при $x=0$, а также на концах отрезка проверяется непосредственно, если учесть, что приближения $\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s,x,\alpha)$ в этих точках обращаются в нуль. □

Замечание 3. Ограничения на параметр $s,\ 1<s<2$, следуют из условий существования интегралов, находящихся в правой части оценки (25). Действительно, при $1<s<2$ интегралы $I_3(n,s,\alpha)$ и $I_4(n,s,\alpha)$ существуют, хоть как и несобственные. При $s\ge 2$ указанные интегралы расходятся.

Рассмотрим теперь полиномиальный случай. В соотношении (17) положим $\alpha=0$ и обозначим через $\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s,x,0)=\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s,x)$ приближения функции, сопряженной к $|x|^s$ на отрезке $[-1,1]$ частичными суммами сопряженного ряда Фурье по системе многочленов Чебышева первого рода. Тогда из теоремы 3 находим

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s,x)=\frac{(-1)^n}{2^{s-2}\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^1\frac{(1-t^2)^st^{2n+1-s}}{\sqrt{1+2t^2\cos 2u+t^4}}\sin\big(\arg(\mathrm{t}^2+\xi^2)+2nu\big)\,dt,\ x=\cos u,$$

— интегральное представление приближений. Интеграл справа, очевидно, существует для любого $s>1$ при выполнении условия $n+1>s/2$. Другими словами, в полиномиальном случае, ограничения на параметр $s,\ 1<s<2$, могут быть сняты в предположении достаточно большого значениия n.

Следствие 1 (полиномиальный случай)**.** При $s>1$ для приближений $\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s,x)$ справедливы оценки

$$|\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s,x)| \le \frac{|x|\sqrt{1-x^2}}{2^{s-3}\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\int\limits_0^1\frac{(1-t^2)^st^{2n+1-s}\left[1+n\sqrt{1+2t^2\cos 2u+t^4}\right]}{1+2t^2\cos 2u+t^4}\,dt, \qquad (27)$$

$$|\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s,x)| \le \frac{|x|\sqrt{1-x^2}}{2^{s-3}\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\left[I_1(n,s)+I_2(n,s)\right], \quad n+1>\frac{s}{2}, \qquad (28)$$

где

$$I_1(n,s)=\int\limits_0^1(1-t^2)^{s-2}t^{2n+1-s}\,dt, \quad I_2(n,s)=n\int\limits_0^1(1-t^2)^{s-1}t^{2n+1-s}\,dt.$$

Оценки (27), (28) точны. Равенство достигается при $x=0$, а также на концах отрезка.

Доказательство. Для получения оценок (27), (28) и доказательства их точности достаточно повторить рассуждения, используемые в теореме 4 при $\alpha=0$. □

5. Асимптотика мажоранты равномерных приближений

Исследуем асимптотическое поведение величины (25) при $n \to \infty$. С этой целью в интегралах $I_3(n,s,\alpha)$, $I_4(n,s,\alpha)$ выполним замену переменного интегрирования по формуле $t^2 = (1-u)/(1+u)$, $dt = -du/((1+u)\sqrt{1-u^2})$. Тогда

$$I_3(n,s,\alpha) = 2^{s-2}\int\limits_0^1 \frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{s/2}}\left|\frac{\beta-u}{\beta+u}\right|^n du,$$

$$I_4(n,s,\alpha) = n2^{s-1}\int\limits_0^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2}}\left|\frac{u-\beta}{\beta+u}\right|^n \frac{du}{\beta+u}, \quad \beta = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}.$$

Справедлива

Теорема 5. *При $1<s<2$ и $n\to\infty$ для величины $\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s,\alpha)$ имеет место асимптотическое равенство*

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s,\alpha) \sim \frac{2}{\pi}|x|\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi s}{2}\left[s\Gamma(s-1)\left(\frac{\beta}{2n}\right)^{s-1} + \frac{C(s,\beta)(\beta n)^{s/2}}{\beta}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n\right], \tag{29}$$

где

$$C(s,\beta) = \Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\frac{(1-\beta^2)^{1-s/2}}{1+\beta}, \quad 1<s<2,$$

— некоторая константа, зависящая от s, β и не зависящая от n, $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.

Доказательство. Изучим асимптотическое поведение при $n\to\infty$ каждого из интегралов из правой части (25) по отдельности. С этой целью воспользуемся методом Лапласа [24] – [26]. Доказательству теоремы предпошлем две леммы. Так для интеграла $I_3(n,s,\alpha)$ имеет место

Лемма 1. *При $n\to\infty$ справедливо асимптотическое равенство*

$$I_3(n,s,\alpha) \sim 2^{s-2}\left[\left(\frac{\beta}{2n}\right)^{s-1}\Gamma(s-1) + \frac{1}{2}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\left(\frac{1-\beta^2}{\beta n}\right)^{1-s/2}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n\right]. \tag{30}$$

Доказательство. Интеграл $I_3(n,s,\alpha)$ разобьем на два интеграла по промежуткам $[0,\beta]$ и $[\beta,1]$:

$$I_5(n,s,\alpha) = \int\limits_0^\beta \frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{s/2}}\left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^n du,$$

$$I_6(n,s,\alpha) = \int\limits_\beta^1 \frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{s/2}}\left(\frac{u-\beta}{\beta+u}\right)^n du.$$

Перепишем интеграл $I_5(n,s,\alpha)$ в виде

$$I_5(n,s,\alpha) = \int\limits_0^\beta \frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{s/2}}\mathrm{e}^{S(u)}\,du, \quad S(u) = \ln\frac{\beta-u}{\beta+u}.$$

Функция $S(u)$ монотонно убывает при $0 < u < \beta$, поскольку $S^{'}(u) < 0$ и, значит, достигает своего максимального значения при $u = 0$. Используя разложения $S(u) = -2u/\beta + o(u)$ и

$$\frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{s/2}} \sim u^{s-2},$$

справедливые при $u \to 0$, при произвольно малом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$ находим

$$I_5(n,s,\alpha) \sim \int\limits_0^{\varepsilon} u^{s-2} \mathrm{e}^{-2un/\beta}\, du, \quad n \to \infty.$$

В последнем интеграле выполним замену переменного по формуле $2un/\beta \sim u$:

$$I_5(n,s,\alpha) \sim \left(\frac{\beta}{2n}\right)^{s-1} \int\limits_0^{2n\varepsilon/\beta} u^{s-2} \mathrm{e}^{-u}\, du, \quad n \to \infty.$$

Переходя теперь в интеграле к пределу при $n \to \infty$, и учитывая при этом, что

$$\Gamma(s-1) = \int\limits_0^{+\infty} u^{s-2} \mathrm{e}^{-u}\, du, \quad s > 1,$$

приходим к асимптотическому равенству

$$I_5(n,s,\alpha) \sim \left(\frac{\beta}{2n}\right)^{s-1} \Gamma(s-1), \quad n \to \infty. \tag{31}$$

Займемся интегралом $I_6(n,s,\alpha)$. Выполнив замену переменного по формуле $u = \cos\theta$, получим

$$I_6(n,s,\alpha) = \int\limits_0^{\arccos\beta} \cos^{s-2}\theta \sin^{1-s}\theta \exp[nS(\theta)]\, d\theta, \quad S(\theta) = \ln\frac{\cos\theta - \beta}{\cos\theta + \beta}.$$

Функция $S(\theta)$ убывает на промежутке $0 < u < \arccos\beta$, поскольку $S^{'}(\theta) < 0$, а значит, достигает максимального значения при $\theta = 0$. Учитывая разложения

$$S(\theta) = \ln\frac{1-\beta}{1+\beta} - \frac{\beta}{1-\beta^2}\theta^2 + o(\theta^2), \quad \theta \to 0,$$

а также $\cos^{s-2}\theta \sin^{1-s}\theta \sim \theta^{1-s}$, справедливые при $\theta \to 0$, при произвольно малом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$ находим

$$I_6(n,s,\alpha) \sim \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n \int\limits_0^{\varepsilon} \theta^{1-s} \exp\left(-\frac{\beta n\theta^2}{1-\beta^2}\right) d\theta, \quad n \to \infty.$$

В последнем интеграле выполним замену переменного $\beta n\theta^2/(1-\beta^2) \sim \theta^2$:

$$I_6(n,s,\alpha) \sim \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n \left(\frac{1-\beta^2}{\beta n}\right)^{1-s/2} \int\limits_0^{\varphi(n,\varepsilon)} \theta^{1-s} \mathrm{e}^{-\theta^2}\, d\theta, \quad n \to \infty,$$

где $\varphi(n,\varepsilon) = \sqrt{n\beta/(1-\beta^2)}\varepsilon \to +\infty$ при $n \to \infty$. Учитывая, что

$$\int_0^{+\infty} \theta^{1-s} \mathrm{e}^{-\theta^2}\, d\theta = -\frac{s}{4}\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right),$$

из последнего асимптотического равенства находим

$$I_6(n,s,\alpha) \sim \frac{1}{2}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\left(\frac{1-\beta^2}{\beta n}\right)^{1-s/2}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n, \quad n \to \infty. \tag{32}$$

Объединяя (31), (32), получим соотношение (30). □

Для интеграла $I_4(n,s,\alpha)$ имеет место

Лемма 2. *При $n \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство*

$$I_4(n,s,\alpha) \sim n2^{s-1}\left[\frac{1}{\beta}\left(\frac{\beta}{2n}\right)^s \Gamma(s) + \frac{1}{2(1+\beta)}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\left(\frac{1-\beta^2}{\beta n}\right)^{1-s/2}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n\right]. \tag{33}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству асимптотического равенства (30) в лемме 1. □

Объединяя (30) и (33), получим

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s,\alpha) \sim \frac{2}{\pi}|x|\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi s}{2}\times \\ \times\Bigg(\left[\left(\frac{\beta}{2n}\right)^{s-1}\Gamma(s-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\beta^2}{\beta n}\right)^{1-s/2}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n\right] + \\ + 2n\left[\frac{1}{\beta}\left(\frac{\beta}{2n}\right)^s\Gamma(s) + \frac{1}{2(1+\beta)}\left(\frac{1-\beta^2}{\beta n}\right)^{1-s/2}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n\right]\Bigg).\end{aligned}$$

Применяя к последнему соотношению известное тождество $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$, $s > 1$, придем к (29). □

Следствие 2 (полиномиальный случай)**.** При $s > 1$ и $n \to \infty$ для приближений функции, сопряженной к $|x|^s$ на отрезке $[-1,1]$ частичными суммами полиномиального сопряженного ряда Фурье – Чебышева, справедлива оценка

$$|\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s,x)| \le \frac{2}{\pi}|x|\sqrt{1-x^2}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\frac{s\Gamma(s-1)}{(2n)^{s-1}}, \quad x = \cos u,\ s > 1,\ n \to \infty, \tag{34}$$

где $\Gamma(s-1)$ — гамма-функция Эйлера.

Доказательство следует непосредственно из оценки (29) при $\beta = 1$, что соответствует значению $\alpha = 0$, с учетом выполнения условия $n+1 > s/2$, отмеченного в следствии 1. □

6. Порядковая оценка уклонений

В предыдущем разделе было найдено асимптотическое выражение для мажоранты уклонений частичных сумм сопряженного ряда от функции, сопряженной к $|x|^s$, $1 < s < 2$, $x \in [-1,1]$. Представляет интерес минимизировать правую часть соотношения (29) посредством выбора оптимального для этой задачи параметра $\beta = \beta^*$, другими словами, искать оценку наилучшего равномерного приближения функции, сопряженной к $|x|^s$, $1 < s < 2$.

Положим

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s) = \inf_{0\le\alpha<1} \hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s, \alpha).$$

Для реализации поставленной задачи воспользуемся методом, предложенным в [27].

Теорема 6. *Справедливо соотношение*

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s) \sim \frac{2}{\pi}|x|\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi s}{2} s\Gamma(s-1)\left(s-\frac{1}{2}\right)^{s-1}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)^{s-1}, \quad n\to\infty. \tag{35}$$

Доказательство. Прежде всего покажем, что при заданном $1 < s < 2$ существует такое значение α, что для приближений $\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s, \alpha)$ функции, сопряженной к $|x|^s$ на отрезке $[-1, 1]$ частичными суммами сопряженного ряда (8), асимптотика в соотношении (35) достижима. Для этого при известном s, $1 < s < 2$, положим

$$\beta^* = \frac{(s-1/2)\ln n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{36}$$

При $\beta = \beta^*$ и $n \to \infty$ в (29) находим

$$C(s, \beta^*) \to \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right), \quad n \to \infty.$$

Тогда при $n \to \infty$

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s, \alpha^*) = \frac{2}{\pi}|x|\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi s}{2} s\Gamma(s-1)\left(s-\frac{1}{2}\right)^{s-1}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)^{s-1} + o\left(\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)^{s-1}\right),$$

где $\alpha^* = \sqrt{(1-\beta^*)/(1+\beta^*)}$.

Покажем, что найденное значение β^* действительно доставляет инфинимум функции $\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s, \alpha)$ при $n \to \infty$. Зафиксируем $\delta > 0$. С одной стороны, при

$$\beta^+ = \frac{(1+\delta)(s-1/2)\ln n}{n}$$

и достаточно больших n имеем

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s, \alpha^+) = (1+\delta)\frac{2}{\pi}|x|\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi s}{2} s\Gamma(s-1)\left(s-\frac{1}{2}\right)^{s-1}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)^{s-1} + \\ + O\left(\frac{1}{n^{2(s-1)+\delta(2s-1)}\ln^{1-s/2} n}\right) > \hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s, \alpha^*). \tag{37}$$

С другой стороны, при

$$\beta^- = \frac{(1-\delta)(s-1/2)\ln n}{n}$$

оценим второе слагаемое в соотношении для $\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s, \alpha)$. Получим

$$\frac{C(s)}{((1-\delta)(s-1/2)\ln n)^{1-s/2} n^{2(s-1)-\delta(2s-1)}} \ge n^{\delta(2s-1)} \frac{C(s)}{((s-1/2)\ln n)^{1-s/2} n^{2(s-1)}}$$

при достаточно большом n. Однако,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s, \alpha^*)}{n^{\delta(2s-1)}\dfrac{C(s)}{((s-1/2)\ln n)^{1-s/2} n^{2(s-1)}}} = \\ = \frac{2}{\pi}|x|\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi s}{2}\left[C_1(s)\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^{s/2} n}{n^{\delta(2s-1)}} + C_2(s)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\delta(2s-1)}}\right] = 0,$$

где $C_1(s)$, $C_2(s)$ — некоторые величины, зависящие от s при $n \to \infty$. На этом основании заключаем

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s, \alpha^*) = o\left(n^{\delta(2s-1)} \frac{C(s)}{((s-1/2)\ln n)^{1-s/2} n^{2(s-1)}}\right), \quad n \to \infty.$$

Это, в свою очередь, означает, что при достаточно больших n

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s, \alpha^-) > \hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s, \alpha^*). \tag{38}$$

Таким образом, второе слагаемое в $\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s, \alpha^-)$ достаточно велико при $n \to \infty$. Из неравенств (37), (38) имеем

$$\inf_{0 \le \alpha < 1} \hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s, \alpha) = \hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s, \alpha^*) =$$
$$= \frac{2}{\pi}|x|\sqrt{1-x^2} \sin\frac{\pi s}{2} s\Gamma(s-1)\left(s - \frac{1}{2}\right)^{s-1} \left(\frac{\ln n}{n^2}\right)^{s-1}, \quad n \to \infty,$$

откуда следует (35). □

Из теоремы 6 следует, что для заданного $1 < s < 2$ можно подобрать такое значение параметра α^*, что для приближений функции, сопряженной к функции $|x|^s$, $1 < s < 2$, на отрезке $[-1, 1]$ частичными суммами сопряженного рационального ряда Фурье – Чебышева, справедлива оценка

$$|\hat{\varepsilon}_{2n}(|x|^s, \alpha^*, x)| \le \frac{2}{\pi}|x|\sqrt{1-x^2} \sin\frac{\pi s}{2} s\Gamma(s-1)\left(s - \frac{1}{2}\right)^{s-1} \left(\frac{\ln n}{n^2}\right)^{s-1}, \quad n \to \infty.$$

Причем значение параметра, обеспечивающего наибольшую скорость приближений определяется соотношением (36).

Интересно сравнить последнюю оценку с оценкой (34). В то время, как частичные суммы полиномиального сопряженного ряда Фурье – Чебышева обеспечивают скорость убывания приближений исследуемой функции порядка $O(1/n^{s-1})$, в рациональном случае при специальном выборе параметра скорость можно увеличить до $O((\ln n/n^2)^{s-1})$. Таким образом, рациональные сопряженные ряды Фурье – Чебышева приближают функцию, сопряженную к $|x|^s$, $1 < s < 2$, значительно лучше, чем полиномиальные.

Заключение

Исследованы аппроксимативные свойства частичных сумм сопряженного ряда Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова (8) в приближениях сопряженных функций (4) (см., также (5)) на отрезке [–1,1]. Найдено интегральное представление приближений (см. (12)). Изучены приближения функции, сопряженной к $|x|^s$, $1 < s < 2$, на отрезке $[-1, 1]$ исследуемым методом. Получено интегральное представление приближений (см. (17)), точная их оценка в зависимости от положения точки на отрезке (см. (23)), равномерная в некотором смысле оценка (см. (24)) и асимптотическое представление ее мажоранты при $n \to \infty$ (см. (29)). Установлено оптимальное значение параметра (см. (36)), обеспечивающее наибольшую скорость убывания мажоранты равномерной оценки приближений частичными суммами сопряженного рационального ряда Фурье – Чебышева исследуемой функции (теорема 6). Показано, что в данном случае скорость приближений является значительно выше в сравнении с полиномиальным случаем, что отражает особенности рациональной аппроксимации.

Литература

[1] Моторный В.П. *Об асимптотически точных оценках поточечного приближения алгебраическими многочленами некоторых классов функций*, Докл. РАН. **370** (3), 313–315 (2000).

[2] Моторный В.П. *Об асимптотически точных оценках приближения алгебраическими многочленами некоторых классов функций*, Укр. матем. журн. **52** (1), 85–99 (2000).

[3] Моторный В.П. *Приближение одного класса сингулярных интегралов алгебраическими многочленами с учетом положения точки на отрезке*, Тр. МИАН. **232**, 268–285 (2001).

[4] Корнейчук Н.П., Половина А.И. *О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, алгебраическими многочленами*, Матем. заметки. **9** (4), 441–447 (1971).

[5] Привалов И.И. *Sur les fonctions conjuguees*, Bull, de la Soc. Math, de France. **44**, 100–103 (1916).

[6] Привалов И.И. *К теории сопряженных тригонометрических рядов*, Матем. сб. **31** (2), 224–228 (1923).

[7] Колмогоров А.Н. *Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier*, Fund. Math. **7**, 24–29 (1925).

[8] Riesz M. *Les fonctions conjuguées et les séries de Fourier*, C. R. Acad. Sci Paris, **178**, 1464–1467 (1924).

[9] Riesz M. *Sur les fonctions conjuguées*, Math. Z., **27**, 218–244 (1927).

[10] Бари Н.К. *О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **19** (5), 285–302 (1955).

[11] Стечкин С.Б. *О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **20** (2), 197–206 (1956).

[12] Mardvilko T.S., Pekarskii A.A. *Conjugate Functions on the Closed Interval and Their Relationship with Uniform Rational and Piecewise Polynomial Approximations*, Math. Notes. **99** (2), 272–283 (2016).

[13] Qureshi K. *On the degree of approximation of function belonging to the Lipschitz class by means of a conjugate series*, Indian J. Pure Appl. Math. **12** (9), 1120–1123 (1981).

[14] Singh U. *Approximation of conjugate of functions belonging to weighted Lipschitz class $W(L^p, \xi(t))$ by Hausdorff means of conjugate Fourier series*, J. Comput. Appl. Math. **259** 633–640 (2014).

[15] Rhoades B.E. *The degree of approximation of functions, and their conjugates, belonging to several general Lipschitz classes by Hausdorff matrix means of Fourier series and conjugate series OF A Fourier series*, Tamkang of math. **45** (4), 389–395 (2014).

[16] Nigam H.K., Sharma A. *On approximation of conjugate of functions belonging to different classes by product means*, International J. Pure and Appl. Math. **76** (2), 303–316 (2012).

[17] Фалалеев Л.П. *Приближение сопряженных функций суммами Чезаро*, Матем. заметки. **28** (3), 451–458 (1980).

[18] Русак В.Н., Рыбаченко, И.В. *Равномерная рациональная аппроксимация сопряженных функций*, Вестн. БГУ. Сер. 1. Матем. и информатика. **3**, 83–86 (2013).

[19] Пекарский А.А. *Сопряженные функции и их связь с равномерными рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями*, Матем. сб. **206** (2), 175–182 (2015).

[20] Лукашов А.Л. *Алгебраические дроби Чебышева – Маркова на нескольких отрезках*, Anal. Math. **24** (1), 111–130 (1998).

[21] Ровба Е.А., Поцейко П.Г. *Об одной системе рациональных дробей Чебышева – Маркова*, Докл. НАН Беларуси. **61** (1), 24–29 (2017).

[22] Rouba Y., Patseika P., Smatrytski K. *On one system of rational Chebyshev – Markov fractions*, Anal. Math. **44** (1), 115–140 (2018).

[23] Виноградов И.М. *Математическая энциклопедия в 5 томах* (Изд-во: Советская энциклопедия, 1977).

[24] Евграфов М.А. *Асимптотические оценки и целые функции* (Наука, М., 1979).

[25] Федорюк М.В. *Асимптотика. Интегралы и ряды* (Гл. ред. Физ-матем. лит-ры, М., 1987).

[26] Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. *Лекции по теории функций комплексного переменного* (гл. ред. Физ-матем. лит., М., 1989).

[27] Ровба Е.А., Микулич Е.Г. *Константы в приближении функции $|x|$ интерполяционными рациональными процессами*, Докл. НАН. Беларуси. **53** (6), 11–15 (2009).

Евгений Алексеевич Ровба

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы,
ул. Ожешко, д. 22, г. Гродно, 230023, Республика Беларусь,

e-mail: rovba.ea@gmail.com

Павел Геннадьевич Поцейко

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы,
ул. Ожешко, д. 22, г. Гродно, 230023, Республика Беларусь,

e-mail: pahamatby@gmail.com

Y.A. Rovba and P.G. Patseika

Approximations of conjugate functions by partial sums of conjugate Fourier series with respect to a certain system of Chebyshev-Markov algebraic fractions

Abstract. We investigate approximative properties of partial sums of conjugate Fourier series with respect to one system of Chebyshev – Markov algebraic fractions. The main results of previously known works on approximations of conjugate functions in polynomial and rational cases are presented. One system of algebraic fractions Chebyshev – Markov is introduced and the construction of the conjugate rational Fourier – Chebyshev series corresponding to it is carried out. An integral representation of the conjugate function approximations by partial sums of the constructed conjugate series is found. The approximation of functions conjugate to $|x|^s, 1 < s < 2$, on the interval $[-1, 1]$ by partial sums of conjugate rational Fourier – Chebyshev series is studied. The integral representation of approximations, estimates of approximations by the studied method depending on the position of the point x on the interval, and their asymptotic expressions for $n \to \infty$ are found. The optimal value of the parameter at which the deviation of partial sums of the conjugate rational Fourier – Chebyshev series from the conjugate function $|x|^s, 1 < s < 2$, on the interval $[-1, 1]$ have the highest rate of tendency to zero is established. As a consequence of the results obtained, the problem of approximations of a function conjugate to $|x|^s, s > 1$, by partial sums of the conjugate Fourier series on the Chebyshev polynomial system of the first kind is studied in detail.

Keywords: Chebyshev – Markov algebraic fraction, conjugate function, partial sum of the Fourier – Chebyshev series, exact estimate, asymptotic method.

Yevgeniy Alekseevich Rovba

Yanka Kupala State University of Grodno,
22 Ozheshko str., Grodno, 230023 Republic of Belarus,

e-mail: rovba.ea@gmail.com

Pavel Gennad'evich Patseika

Yanka Kupala State University of Grodno,
22 Ozheshko str., Grodno, 230023 Republic of Belarus,

e-mail: pahamatby@gmail.com