В. И. Филиппов, Ряды типа Фурье с целыми коэффициентами по системам из сжатий и сдвигов одной функции в пространствах L_p, $p \geq 1$, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 6, 58–64

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-6-58-64

Известия вузов. Математика
2019, № 6, с. 58–64
https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

В.И. ФИЛИППОВ

РЯДЫ ТИПА ФУРЬЕ С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПО СИСТЕМАМ ИЗ СЖАТИЙ И СДВИГОВ ОДНОЙ ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ L_p, $p \geq 1$

Аннотация. Рассматриваются системы функций, полученные из сжатий и сдвигов одной функции, в пространствах $L_p(0,1)$, $1 \leq p < \infty$. Получены результаты о разложении по этим системам рядов типа Фурье с целыми коэффициентами. Приближение элементов пространств $L_p(0,1)$, $1 \leq p < \infty$, обладает свойством сжатия образов, т. е. имеется много коэффициентов, равных нулю. Эти исследования могут вызвать интерес также у специалистов по передаче и обработке цифровой информации.

Ключевые слова: функциональные системы из сжатий и сдвигов одной функции, ряды типа Фурье с целыми коэффициентами, цифровая обработка информации, цифровая передача информации.

УДК: 517.518

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-6-58-64

Данная работа обобщает и продолжает исследования автора в статьях [1]–[5]. Интерес к системам, состоящим из сжатий и сдвигов одной функции в пространствах L_p, $1 \leq p \leq \infty$, возник в связи с результатами по всплескам (wavlets) и фреймам. Строим не ортонормированную систему, а разложение элементов пространств L_p непосредственно по сжатиям и сдвигам одной функции. Построенная система, конечно, переполненная [1], [5], но предложенный алгоритм позволяет получить разложения с большим числом нулевых коэффициентов. Полученное разложение является в какой-то мере оптимальным при приближении с фиксированной точностью, поскольку малые промежуточные коэффициенты зануляются в предложенном методе. При этом допускается значительная неточность вычисления промежуточных коэффициентов, а алгоритм корректирует погрешности вычисления коэффициентов.

Имеется определенный интерес к разложениям в ряд с целыми коэффициентами. Например, в [6] приводится результат о существовании последовательности тригонометрических многочленов с целыми положительными коэффициентами, которая сходится к нулю почти всюду.

В [7], [8] также рассмотрены системы из сжатий и сдвигов одной функции, но коэффициенты разложения находятся почти как коэффициенты Фурье и несколько по-другому, чем в предложенной работе.

Очевидна связь этих разложений с разложениями по системе Хаара. В работах [9], [10] исследуется поведение ряда из коэффициетов Фурье–Хаара. В данной работе речь идет об ограниченности коэффициентов разложения, если это возможно.

Поступила в редакцию 25.04.2018, после доработки 25.04.2018. Принята к публикации 26.09.2018

Будем рассматривать функциональные системы вида

$$\{\psi_{k,j}\} = \frac{1}{2^k}\{\psi(2^k t - j)\} = \{\psi_l\}, \tag{1}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = 0, 1, \ldots, 2^k - 1, \quad l = 2^k + j - 1,$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция из $L_p(0,1)$, $1 \le p < \infty$, продолженная значением 0 вне $[0,1]$. В теореме 2 применяется предположение $\psi_{k,0}(0) = 1/2^k$, $k \ge 0$.

Пусть для теорем 1 и 2

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, \text{если } t \in (0,1]; \\ 0, \text{если } t \notin (0,1]. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} d_l^* \psi_l = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^i-1} d_{i,j}^* \psi_{i,j}, \tag{3}$$

где $f_{k+1} = f_k - \sum\limits_{j=0}^{2^k-1} d_{k,j}^* \psi_{k,j}, \quad f_0 = f, \quad k \ge 0,$

$$d_l^* = d_{2^k+j}^* = d_{k,j}^* = \begin{cases} \left[\frac{2^k}{|\Delta_{k,j}|} \int\limits_{\Delta_{k,j}} f_k dt\right], \text{если } \int\limits_{\Delta_{k,j}} f_k dt \ge 0; \\ \left[\frac{2^k}{|\Delta_{k,j}|} \int\limits_{\Delta_{k,j}} f_k dt\right] + 1, \text{если } \int\limits_{\Delta_{k,j}} f_k dt < 0, \end{cases}$$

$\Delta_{k,j} = \left(\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right)$, $k \ge 0$, $j = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$, и $[a]$ — целая часть числа a.

Теорема 1. *Пусть задана произвольная функция $f \in L_p(0,1)$, $1 \le p < \infty$. Тогда ряд* (3) *по системе* (1) *с образующей функцией ψ как в* (2) *сходится по норме пространства $L_p(0,1)$, $1 \le p < \infty$, к $f(t)$, т. е. $\left\| f - \sum\limits_{l=0}^{m} d_l^* \psi_l \right\|_p \to 0$, $m \to \infty$.*

Пусть $\chi_\Delta(t)$ — характеристическая функция множества Δ.

Лемма 1. *Для любой ступенчатой функции вида $R(t) = \sum\limits_{j=0}^{2^k-1} d_{k,j} \cdot \chi_{\Delta_{k,j}}(t)$, где $d_{k,j} \in R$, $\Delta_{k,j} = \left(\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$, сумма вида $P(t) = \sum\limits_{j=0}^{2^k-1} d_{k,j}^* \psi_{k,j}$, где ψ как в* (2) *и*

$$d_{k,j}^* = \begin{cases} \left[2^k d_{k,j}\right], \textit{если } d_{k,j} \ge 0; \\ \left[2^k d_{k,j}\right] + 1, \textit{если } d_{k,j} < 0, \end{cases}$$

удовлетворяет условиям $\|R(t) - P(t)\|_p \le \frac{1}{2^k}$, $\quad 1 \le p < \infty$,

$$\left\| \sum_{j=0}^{m} d_{k,j}^* \psi_{k,j}(t) \right\|_p \le \|R(t)\|_p + \frac{1}{2^k}, \quad 0 \le m \le 2^k - 1.$$

Доказательство. Действительно,

$$\left\|\sum_{j=0}^{2^k-1} d_{k,j}\chi_{\Delta_{k,j}}(t)-\sum_{j=0}^{2^k-1} d^*_{k,j}\psi_{k,j}(t)\right\|_p \le \left\|\sum_{j=0}^{2^k-1}\left(d_{k,j}-\frac{1}{2^k}d^*_{k,j}\right)\chi_{\Delta_{k,j}}(t)\right\|_p =$$

$$=\left\|\sum_{j=0}^{2^k-1}\frac{1}{2^k}\left(2^k d_{k,j}-d^*_{k,j}\right)\chi_{\Delta_{k,j}}(t)\right\|_p \le \frac{1}{2^k}.$$

Поэтому $\left\|\sum\limits_{j=0}^{m} d^*_{k,j}\psi_{k,j}(t)\right\|_p \le \left\|\sum\limits_{j=0}^{2^k-1} d^*_{k,j}\psi_{k,j}(t)\right\|_p \le \|R(t)-P(t)\|_p+\|R(t)\|_p \le \|R(t)\|_p +$ $+1/2^k,\quad 0\le m\le 2^k-1.$ □

Доказательство теоремы 1. Пусть $f_0=f$. Тогда построим по индукции последовательность ступенчатых функций $S_k(t)$, $k\ge 0$, функций f_k, $k\ge 0$, и линейных комбинаций $\sum\limits_{j=0}^{2^k-1} d^*_{k,j}\psi_{k,j}(t)$, $k\ge 0$, так, что справедливы соотношения $f_{k+1}=f_k-\sum\limits_{l=0}^{2^k-1} d^*_{k,l}\psi_{k,l}(t)$, где $d_{k,l}=\frac{1}{|\Delta_{k,l}|}\int_{\Delta_{k,l}} f_k\cdot\chi_{\Delta_{k,l}}(t)dt,\quad k\ge 0,\quad l=0,1,\dots,2^k-1,$

$$d^*_{k,l}=\begin{cases}\left[2^k d_{k,l}\right], \text{если } d_{k,l}\ge 0;\\ \left[2^k d_{k,l}\right]+1, \text{если } d_{k,l}<0.\end{cases}$$

Пусть $S_k(g)=\sum\limits_{l=0}^{2^k-1} p_{k,l}\cdot\psi_{k,l}(t),\quad p_{k,l}=\frac{2^k}{|\Delta_{k.l}|}\int_{\Delta_{k,l}} g(t)dt$, $g(t)\in L_p(0,1)$, $1\le p<\infty$, $k\ge 0$, $l=0,1,\dots,2^k-1$.

Тогда $S_k(f_k)=\sum\limits_{l=0}^{2^k-1} d_{k,l}\cdot\chi_{\Delta_{k,l}}(t)=\sum\limits_{l=0}^{2^k-1} 2^k d_{k,l}\cdot\psi_{k,l}(t)$, $S^*_k(f_k)=\sum\limits_{l=0}^{2^k-1} d^*_{k,l}\cdot\psi_{k,l}(t)$.

Используя лемму 1, получим

$$\|S_k(f_k)-S^*_k(f_k)\|_p=\left\|\sum_{l=0}^{2^k-1}\left(2^k d_{k,l}-d^*_{k,l}\right)\psi_{k,l}(t)\right\|_p\le 1/2^k.$$

Поэтому

$$\begin{gathered}\|f_{k+1}\|_p\le\|f_k-S_k(f_k)\|_p+\left\|S_k(f_k)-\sum_{l=0}^{2^k-1} d^*_{k,l}\psi_{k,l}(t)\right\|_p\le\|f_k-S_k(f_k)\|_p+1/2^k,\\ S_k(f_k)=S_k\left(f-\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{2^i-1} d^*_{i,j}\psi_{i,j}(t)\right)=S_k(f)-S_k\left(\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{2^i-1} d^*_{i,j}\psi_{i,j}(t)\right).\end{gathered}\tag{4}$$

Так как $\sum\limits_{i=0}^{k-1}\sum\limits_{j=0}^{2^i-1} d^*_{i,j}\psi_{i,j}(t)=\sum\limits_{l=0}^{2^k-1} c_{k,l}\psi_{k,l}(t)$, то

$$S_k\left(\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{2^i-1} d^*_{i,j}\psi_{i,j}(t)\right)=S_k\left(\sum_{l=0}^{2^k-1} c_{k,l}\psi_{k,l}(t)\right)=\sum_{l=0}^{2^k-1} c_{k,l}\psi_{k,l}(t)=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{2^i-1} d^*_{i,j}\psi_{i,j}(t).$$

Таким образом, используя (4) и ([11], с. 74–75), получим

$$\|f_{k-1}-S_{k-1}(f_{k-1})\|_p=\left\|f-\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{2^i-1}d^*_{i,j}\psi_{i,j}(t)-S_{k-1}\left(f-\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{2^i-1}d^*_{i,j}\psi_{i,j}(t)\right)\right\|_p\le$$

$$\le\left\|f-S_{k-1}(f)-S_{k-1}\left(\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{2^i-1}d^*_{i,j}\psi_{i,j}(t)\right)-\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{2^i-1}d^*_{i,j}\psi_{i,j}(t)\right\|_p=$$

$$=\|f-S_{k-1}(f)\|_p\le c_p\omega_p\left(1/2^{k-1},f\right),\quad (5)$$

где $\omega_p\left(1/2^{k-1},f\right)$ — интегральный модуль непрерывности функции $f\in L_p(0,1)$, $1\le p<\infty$, с шагом $1/2^{k-1}$. Следовательно, из (4) и (5) имеем

$$\|f_k\|_p\le 1/2^{k-1}+c_p\omega_p\left(1/2^{k-1},f\right)\to 0,\quad k\to\infty.\quad (6)$$

Покажем, что построенный ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty}d^*_l\cdot\psi_l(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2^i-1}d^*_{i,j}\cdot\psi_{i,j}(t)$$

сходится к f в L_p. Пусть $n>0$ — какой-либо большой номер и определим индекс $k\ge 2$ так, что $0\le j_0\le 2^k$, $k\ge 2$, и

$$\sum_{l=0}^{n}d^*_l\cdot\psi_l(t)=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{2^i-1}d^*_{i,j}\cdot\psi_{i,j}(t)+\sum_{j=0}^{j_0}d^*_{k,j}\cdot\psi_{k,j}(t).$$

Тогда, используя лемму 1, (5) и (6), получим

$$\left\|f-\left(\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{2^i-1}d^*_{i,j}\cdot\psi_{i,j}(t)+\sum_{j=0}^{j_0}d^*_{k,j}\cdot\psi_{k,j}(t)\right)\right\|_p\le\|f_k\|_p+\left\|\sum_{j=0}^{j_0}d^*_{k,j}\cdot\psi_{k,j}(t)\right\|_p\le$$

$$\le\|f_k\|_p+1/2^k+\|S_k(f_k)\|_p\le 2\|f_k\|_p+1/2^k+\|f_k-S_k(f_k)\|_p\le$$

$$2c_p\omega_p\left(1/2^{k-1},f\right)+c_p\omega_p\left(1/2^k,f\right)+1/2^k+1/2^{k-2}\to 0,\ n\to\infty.\qquad\square$$

Теорема 2. *Пусть $f\in C[0,1]$. Ряд (3) по системе (1) с образующей функцией ψ как в (2) сходится по норме пространства $C[0,1]$ к $f(t)$, т. е. $\left\|f-\sum\limits_{l=0}^{m}d^*_l\psi_l\right\|_{C[0,1]}\to 0$, $m\to\infty$.*

Доказательство. Повторяя рассуждения леммы 1 и теоремы 1, получим доказательство теоремы 2, где в (5) и (6) вместо $c_p\omega_p\left(1/2^k,f\right)$ используем оценку $3\omega\left(1/2^k,f\right)$ ([11], с. 74). $\square$

Рассмотрим более общий случай для функции ψ. Приведем леммы, которые понадобятся в дальнейшем.

Лемма 2 ([1]). *Пусть $\psi\in L_p(0,1)$, $1\le p<\infty$, $\int\limits_0^1\psi(t)dt=\delta\ne 0$. Тогда существует константа $\lambda_0\ne 0$ такая, что*

$$\|1-\lambda_0\psi(t)\|_p=\sigma_0<1.\quad (7)$$

Лемма 3 ([1]). *Пусть функция* $\psi \in L_p(0,1)$, $1 \le p < \infty$, *удовлетворяет условию* (7). *Зафиксируем* $\sigma \in (\max\{1/2, \sigma_0\}; 1)$. *Тогда для любой ступенчатой функции* $S(t) = \sum\limits_{l=0}^{2^k-1} d_{k,l} \cdot \chi_{\Delta_{k,l}}(t)$ *существует конечная сумма* $h(t) = \sum\limits_{l=0}^{2^k-1} d_{k,l} \cdot 2^k \lambda_0 \cdot \psi_{k,l}(t)$ (*заметим, что* $\psi_{k,l}(t)$ *как в* (1)) *такая, что*

$$\|S(t) - h(t)\|_p \le \sigma \|S(t)\|_p$$

и

$$\left\| \sum_{l=0}^{m} d_{k,l} \cdot 2^k \lambda_0 \cdot \psi_{k,l}(t) \right\|_p \le (1+\sigma) \|S(t)\|_p,\ 0 \le m \le 2^k - 1.$$

Пусть $\psi \in L_p(0,1)$, $1 \le p < \infty$, $\int\limits_0^1 \psi(t)dt = \delta \ne 0$,

$$\{\psi_{n,k}\} = \frac{\lambda_0}{2^n}\{\psi(2^n t - k)\} = \{\psi_l\}, \tag{8}$$
$$n = 0,1,2,\dots,\quad k = 0,1,\dots,2^n - 1,\quad l = 2^n + k - 1.$$

Теорема 3. *Для любой функции* $f \in L_p(0,1)$, $1 \le p < \infty$, *существует ряд* $\sum\limits_{l=0}^{\infty} d_l^* \cdot \psi_l(t)$ *по системе* (8), *где* $d_l^* \in Z$, *который сходится по норме пространства* $L_p(0,1)$, $1 \le p < \infty$, *к* $f(t)$, *т. е.*

$$\left\| f - \sum_{l=0}^{m} d_l^* \cdot \psi_l(t) \right\|_p \to 0,\ m \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $f_0 = f$. Тогда, воспользовавшись леммой 3, построим по индукции последовательность ступенчатых функций $R_k(t)$, $k \ge 1$, номеров n_k ($n_1 \ge 4$), функций f_k, $k \ge 1$, и линейных комбинаций $\sum\limits_{j=0}^{2^{n_k}-1} d^*_{n_k,j} \cdot \psi_{n_k,j}(t)$, $k \ge 1$, таких, что

$$f_k = f_{k-1} - \sum_{j=0}^{2^{n_k}-1} d^*_{n_k,j} \cdot \psi_{n_k,j}(t),$$
$$\|f_{k-1} - R_k(t)\|_p < 1/2^{k+2}, \tag{9}$$

где

$$R_k(t) = \sum_{l=0}^{2^{n_k}-1} d_{n_k,l} \cdot \chi_{\Delta_{n_k,l}}(t),\ \Delta_{n_k,l} = \left(\frac{l}{2^{n_k}}, \frac{l+1}{2^{n_k}}\right),\quad k \ge 1,$$
$$d_{n_k,l} = \frac{1}{|\Delta_{n_k,l}|} \int_{\Delta_{n_k,l}} f_{k-1} \cdot \chi_{\Delta_{n_k,l}}(t)dt,\quad l = 0,1,\dots,2^{n_k}-1,$$
$$d^*_{n_k,l} = \begin{cases} [2^{n_k} d_{n_k,l}], & \text{если } d_{n_k,l} \ge 0; \\ [2^{n_k} d_{n_k,l}] + 1, & \text{если } d_{n_k,l} < 0. \end{cases}$$

Заметим, что n_k определяем так, чтобы выполнялось соотношение (9).

Пусть

$$S_k(f_{k-1}) = R_k(t) = \sum_{l=0}^{2^{n_k}-1} d_{n_k,l} \cdot \chi_{\Delta_{n_k,l}}(t),$$

$$S_k^*\left(f_{k-1}\right)=\sum_{l=0}^{2^{n_k}-1} d_{n_k,l}^* \cdot \psi_{n_k,l}(t),$$

$$R_k^*(t)=\sum_{l=0}^{2^{n_k}-1} \frac{1}{2^{n_k}} d_{n_k,l}^* \cdot \chi_{\Delta_{n_k,l}}(t).$$

Тогда, используя лемму 3, получим

$$\left\|R_k^*(t)-S_k^*(f_{k-1})\right\|_p<\sigma\left\|R_k^*(t)\right\|_p \tag{10}$$

и

$$\left\|\sum_{l=0}^{m} d_{n_k,l}^* \cdot \psi_{n_k,l}(t)\right\|_p \leq(1+\sigma)\left\|R_k^*(t)\right\|_p, \quad 0 \leq m \leq 2^{n_k}-1.$$

Проверим, что полученный ряд $\sum\limits_{l=0}^{\infty} d_l^* \cdot \psi_l(t)=\sum\limits_{i=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{2^{n_i}-1} d_{n_i,j}^* \cdot \psi_{n_i,j}(t)$ сходится к функции f в метрике пространства L_p. При большом $n>0$ определим индекс $k \geq 2$ так, что $0 \leq j_0 \leq 2^{n_k}-1$, $k \geq 2$, и

$$\sum_{l=0}^{n} d_l^* \cdot \psi_l(t)=\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{2^{n_i}-1} d_{n_i,j}^* \cdot \psi_{n_i,j}(t)+\sum_{j=0}^{j_0} d_{n_k,j}^* \cdot \psi_{n_k,j}(t).$$

Тогда из леммы 1 и (9) получим

$$\begin{aligned}
&\left\|f-\left(\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{2^{n_i}-1} d_{n_i,j}^* \cdot \psi_{n_i,j}(t)+\sum_{j=0}^{j_0} d_{n_k,j}^* \cdot \psi_{n_k,j}(t)\right)\right\|_p \leq\left\|f_{k-1}\right\|_p+\left\|\sum_{j=0}^{j_0} d_{n_k,j}^* \cdot \psi_{n_k,j}(t)\right\|_p \leq \\
&\leq\left\|f_{k-1}\right\|_p+2\left\|R_k^*(t)\right\|_p \leq\left\|f_{k-1}\right\|_p+2\left\|R_k^*(t)-R_k(t)\right\|_p+2\left\|R_k(t)\right\|_p \leq\left\|f_{k-1}\right\|_p+2/2^{n_k}+ \\
&\quad+2\left\|f_{k-1}-R_k(t)\right\|_p+2\left\|f_{k-1}\right\|_p \leq 3\left\|f_{k-1}\right\|_p+2/2^k+2/2^{k+2} \leq 3\left\|f_{k-1}\right\|_p+1/2^{k-2}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, используя леммы 1, 3, (9) и (10), получим

$$\begin{aligned}
&\left\|f_{k-1}\right\|_p \leq\left\|f_{k-2}-R_{k-1}^*(t)\right\|_p+\left\|R_{k-1}^*(t)-S_{k-1}^*(f_{k-2})\right\|_p \leq\left\|f_{k-2}-R_{k-1}(t)\right\|_p+ \\
&+\left\|R_{k-1}^*(t)-R_{k-1}(t)\right\|_p+\sigma\left\|R_{k-1}^*(t)\right\|_p \leq 1/2^k+\sigma\left\|R_{k-1}^*(t)-R_{k-1}(t)\right\|_p+\sigma\left\|R_{k-1}(t)\right\|_p \leq \\
&\leq 1/2^k+\sigma/2^{k+1}+\sigma\left(1/2^{k+1}+\left\|f_{k-2}\right\|_p\right) \leq 1/2^{k-1}+\sigma\left\|f_{k-2}\right\|_p.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left\|f_k\right\|_p \leq 1/2^k+\sigma/2^{k-1}+\ldots+\sigma^{k-1}/2+\sigma^k\|f\|_p \leq k\sigma^k+\sigma^k\|f\|_p \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\left\|f-\sum_{l=0}^{n} d_l^* \psi_l\right\|_p \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Разложение функций в теоремах 1–3 назовем *целочисленным разложением* функций из соответствующих пространств.

Литература

[1] Filippov V., Oswald P. *Representation in L^p by series of translates and dilates of one function*, J. App. Theory, **82** (1), 15–29 (1995).

[2] Филиппов В.И. *О подсистемах системы Фабера–Шаудера в функциональных пространствах*, Изв. вузов. Матем., № 2, 78–85 (1991).

[3] Филиппов В.И. *Системы функций, получающиеся сжатиями и сдвигами одной функции, в пространствах E_φ с $\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$*, Изв. РАН, сер. матем. **65** (2), 187–200 (2001).

[4] Филиппов В.И. *Системы представления, полученные из сжатий и сдвигов одной функции в многомерных пространствах E_φ*, Изв. РАН, сер. матем. **76** (6), 193–206 (2012).

[5] Филиппов В.И. *Об обобщениях системы Хаара и других систем функций в пространствах E_φ*, Изв. вузов. Матем., № 1, 87–92 (2018).

[6] Borodin P.A., Konyagin S.V. *Convergence to zero of exponential sums with positive integer coefficients and approximation by sums of shifts of single function on the line*, Anal. Math. **44** (2), 163–183 (2018).

[7] Кудрявцев А.Ю. *О сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам*, Матем. заметки **92** (5), 707–720 (2012).

[8] Политов А.В. *Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ., № 3, 3–7 (2010).

[9] Голубов Б. И. *Абсолютная сходимость двойных рядов из коэффициентов Фурье–Хаара функций ограниченной p–вариации*, Изв. вузов. Матем., № 6, 3–13 (2012).

[10] Волосивец С.С., Голубов Б.И. *Обобщенная абсолютная сходимость рядов из коэффициентов Фурье по системам типа Хаара*, Изв. вузов. Матем., № 1, 10–20 (2018).

[11] Кашин Б.С., Саакян А.А. *Ортогональные ряды*, 2-е изд., доп. (Изд-во АФЦ, М., 1999).

Вадим Иванович Филиппов

Саратовский социально-экономический институт (филиал) Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова,
ул. Радищева, д. 89, г. Саратов, 410003, Россия,

e-mail: 888vadim@mail.ru

V.I. Filippov

Series of Fourier type with integer coefficients by systems of dilates and translates of one function in L_p, $p \geq 1$

Abstract. We consider systems of functions obtained from dilates and translations of one function in the spaces $L_p(0,1)$, $1 \leq p < \infty$. We obtain results on the representation with respect to these systems with integer coefficients of the Fourier type series. The approximation of the elements of the spaces $L_p(0,1)$, $1 \leq p < \infty$, according to the proposed methods has the property of image compression, that is, many coefficients are zero in this case. These studies may be of interest to specialists in the transfer and processing of digital information.

Keywords: Functional systems of translates and dilates of one function, Fourier type series with integer coefficients, digital information processing, digital information transmission.

Vadim Ivanovich Filippov

Saratov Social-Economic Institute of Plekhanov Russian University of Economics,
89 Radishcheva str., Saratov, 410003 Russia,

e-mail: 888vadim@mail.ru