А. Ю. Трынин, Признак сходимости процессов Лагранжа–Штурма–Лиувилля в терминах одностороннего модуля изменения, *Изв. вузов. Матем.*, 2018, номер 8, 61–74

Известия вузов. Математика
2018, № 8, с. 61–74

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.Ю. ТРЫНИН

ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССОВ ЛАГРАНЖА–ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ В ТЕРМИНАХ ОДНОСТОРОННЕГО МОДУЛЯ ИЗМЕНЕНИЯ

Аннотация. Получен признак равномерной сходимости внутри интервала $(0, \pi)$ интерполяционных процессов, построенных по собственным функциям регулярной задачи Штурма–Лиувилля с непрерывным потенциалом ограниченной вариации. Условие признака формулируется в терминах одностороннего модуля изменения функции.

Ключевые слова: синк-аппроксимации, интерполяция функций, равномерное приближение, процессы Лагранжа–Штурма–Лиувилля.

УДК: 517.518

Введение

Г.И. Натансон в [1] получил признак Дини–Липшица равномерной сходимости внутри интервала $(0, \pi)$, т. е. равномерной на любом компакте, содержащемся в $(0, \pi)$, процессов Лагранжа–Штурма–Лиувилля вида

$$L_n^{SL}(f, x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}) \frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})} = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}) l_{k,n}^{SL}(x), \tag{1}$$

где U_n есть n-я собственная функция регулярной задачи Штурма–Лиувилля

$$U'' + [\lambda - q]U = 0, \quad U'(0) - hU(0) = 0, \quad U'(\pi) + HU(\pi) = 0 \tag{2}$$

с непрерывным потенциалом q ограниченной вариации на $[0, \pi]$ и граничными условиями, гарантирующими, что главный член в асимптотических формулах для U_n будет косинусом, т. е. $h \neq \pm\infty$, $H \neq \pm\infty$. Здесь через $0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n} < \pi$ обозначены нули функции U_n. Изучению аппроксимативных свойств операторов Лагранжа–Штурма–Лиувилля (1) посвящены также работы [2], [3]. В работе [2] устанавливается существование непрерывной на $[0, \pi]$ функции, интерполяционный процесс Лагранжа–Штурма–Лиувилля (1) которой неограниченно расходится п. в. на $[0, \pi]$. Исследования, проведенные в [3], [4], [5], показывают, что при сколь угодно малом изменении параметров задачи Штурма–Лиувилля (2) (потенциала q или констант h, H) аппроксимативные свойства процессов (1) могут сильно измениться.

Свойства операторов интерполирования функций лагранжевого вида (1) тесно связаны с поведением синк-приближений

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right), \tag{3}$$

Поступила 09.06.2017

используемых в теореме отсчетов Уиттекера–Котельникова–Шеннона [6]. Операторы вида (3) являются частным случаем операторов Лагранжа–Штурма–Лиувилля (1) в случае краевых условий первого рода и нулевого потенциала.

Операторы интерполирования функций, аналогичные операторам Лагранжа–Штурма–Лиувилля (1) и синк-приближениям (3), нашли широкое применение при построении различных численных методов математической физики и приближения функций как одной так и нескольких переменных [7]–[11], в теории квадратурных формул и теории вейвлет-преобразований или всплесков [6].

До появления работ [12], [13] приближение такими операторами на отрезке или ограниченном интервале осуществлялось только для некоторых множеств аналитических функций сведением к случаю оси с помощью аналитического отображения.

В [14] предложены различные модификации синк-приближений (3), позволяющие аппроксимировать непрерывные функции на отрезке $[0,\pi]$.

Изучение операторов Лагранжа–Штурма–Лиувилля (1) также тесно связано с исследованием аппроксимативных свойств операторов интерполирования, построенных по решениям задач Коши с дифференциальными выражениями второго порядка [15]. Операторы, предложенные в [15] являются обобщением операторов Лагранжа–Штурма–Лиувилля (1) и классических синк-приближений (3). Таким образом, все утверждения работы [15] справедливы для операторов (1) и синк-аппроксимаций (3).

В данной работе, используя идеи и концепции исследований [16]–[18], получим достаточные условия равномерной внутри интервала $(0,\pi)$ сходимости интерполяционных процессов (1), построенных по решениям задачи Штурма–Лиувилля (2) в терминах односторонних модулей непрерывности и изменения.

1. Основные результаты

На протяжении всей работы будем считать потенциал q задачи Штурма–Лиувилля (2) непрерывной функцией ограниченной вариации на $[0,\pi]$. Договоримся также, что собственная функция будет нормирована условием $U_n(0)=1$. Рассматриваем краевые условия (2) третьего рода, из которых исключены условия типа Дирихле, т.е. $h\neq\pm\infty$, $H\neq\pm\infty$. Для любых $0\le a<b\le\pi$, $0<\varepsilon<(b-a)/2$ индексы p_1, p_2, m_1 и m_2 определим с помощью соотношений

$$\begin{gathered} x_{p_1,n}\le a+\varepsilon<x_{p_1+1,n},\quad x_{p_2,n}\le b-\varepsilon<x_{p_2+1,n},\\ x_{k_1-1,n}<a\le x_{k_1,n},\quad x_{k_2+1,n}\le b<x_{k_2+2,n},\\ m_1=\big[k_1/2\big]+1,\quad m_2=\big[k_2/2\big] \end{gathered}\tag{4}$$

после добавления к множеству нулей $x_{1,n}<x_{2,n}<\dots<x_{n,n}$ n-й собственной функции U_n точек $x_{0,n}=0$ и $x_{n+1,n}=\pi$. Здесь $[z]$ обозначает целую часть числа z. Если не оговорено иное, штрих у суммы в этой работе означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю.

Обозначим через $\mathbf{\Omega}$ множество всех действительнозначных, неубывающих, вогнутых на $[0,b-a]$, исчезающих в нуле функций ω. Пусть $C(\omega^l,[a,b])$ и $C(\omega^r,[a,b])$ есть множества элементов пространства $C[a,b]$ таких, что для произвольных x и $x+h$ $(a\le x<x+h\le b)$ имеют место неравенства

$$f(x+h)-f(x)\ge -K_f\omega(h)\ \text{ или }\ f(x+h)-f(x)\le K_f\omega(h)\tag{5}$$

соответственно, где $\omega\in\mathbf{\Omega}$. Здесь выбор положительной константы K_f зависит только от функции f. В этом случае функцию $\omega(h)$ называют соответственно лево- или правосторонним модулем непрерывности.

Классический модуль непрерывности функции $f \in C[a,b]$ будем обозначать как обычно $\omega(f,\delta) = \sup\limits_{|h|<\delta;\, x,x+h\in[a,b]} |f(x+h)-f(x)|$. Модуль непрерывности $f \in C[0,\pi]$ в случае $a=0$, $b=\pi$ обозначим $\omega_1(f,\delta) = \sup\limits_{|h|<\delta;\, x,x+h\in[0,\pi]} |f(x+h)-f(x)|$.

Модулем изменения функции f на отрезке $[a,b]$ будем называть функцию натурального аргумента

$$v(n,f) = \sup_{T_n} \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|,$$

где $T_n = \{a \le t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n \le b\}$, $n \in \mathbb{N}$. Возьмем неотрицательную неубывающую вогнутую функцию натурального аргумента $v(n)$. Если модуль изменения функции f на интервале $[a,b]$ такой, что $v(n,f) = O(v(n))$ при $n \to \infty$, то будем говорить, что f принадлежит классу $V(v)$. Здесь выбор константы равномерности в o-символике зависит только от функции f.

По аналогии с положительным (отрицательным) изменением функции будем называть положительным (отрицательным) модулем изменения функции f на отрезке $[a,b]$ соответственно функции натурального аргумента

$$v^+(n,f) = \sup_{T_n} \sum_{k=0}^{n-1} \bigl(f(t_{k+1}) - f(t_k)\bigr)_+ \quad \text{и} \quad v^-(n,f) = \inf_{T_n} \sum_{k=0}^{n-1} \bigl(f(t_{k+1}) - f(t_k)\bigr)_-,$$

где $z_+ = \frac{z+|z|}{2}$, $z_- = \frac{z-|z|}{2}$ и $T_n = \{a \le t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n \le b\}$, $n \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что f принадлежит классу $V^+(v)$ или $V^-(v)$, если существует константа M_f такая, что для любого натурального n справедливо неравенство

$$v^+(n,f) \le M_f v(n) \quad \text{или} \quad v^-(n,f) \ge -M_f v(n)$$

соответственно.

Теорема 1. *Пусть* $0 \le a < b \le \pi$, $0 < \varepsilon < (b-a)/2$. *Если неубывающая вогнутая функция натурального аргумента* $v(n)$ *и функция* $\omega \in \mathbf{\Omega}$ *такие, что существует бесконечно малая последовательность неотрицательных чисел* $\alpha_n = o(1)$, *для которой*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=m_n+1}^{k_2-k_1-1} \frac{v(k)}{k^2} = 0, \tag{6}$$

где k_1 *и* k_2+1 *— номера наименьшего и наибольшего из нулей собственной функции* U_n, *попадающих в отрезок* $[a,b]$, *и* $m_n := \left[\exp \frac{\alpha_n}{\omega(\pi/n)}\right]$, *то для любой функции* $f \in C(\omega^l[a,b]) \cap V^-(v)$ $(f \in C(\omega^r[a,b]) \cap V^+(v))$ *выполняется соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n^{SL}(f,\cdot)\|_{C[a+\varepsilon,b-\varepsilon]} = 0, \tag{7}$$

где оператор Лагранжа–Штурма–Лиувилля $L_n^{SL}(f,\cdot)$ *определен в* (1).

Замечание 1. При этом на множестве $[0,\pi] \setminus [a,b]$ соотношение

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - L_n^{SL}(f,x)| = 0$$

может вовсе не выполняться (например, [2], [3]).

Доказательство этого утверждения приведем в разделе 3.

2. Вспомогательные утверждения

Убедимся в справедливости ряда вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть U_n — собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n регулярной задачи Штурма–Лиувилля* (2)*. Через $0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n} < \pi$ обозначим нули функции U_n. Тогда имеют место следующие асимптотические формулы*:

$$U_n(x) = \cos nx + \frac{\beta(x)}{n}\sin nx + O(n^{-2}), \tag{8}$$

$$U_n'(x) = -n\sin nx + \beta(x)\cos nx + O(n^{-1}), \tag{9}$$

$$U_n''(x) = -n^2\cos nx - n\beta(x)\sin nx + O(1), \tag{10}$$

$$U_n'(x_{k,n}) = (-1)^k n + O(n^{-1}), \tag{11}$$

$$x_{k,n} = \frac{2k-1}{2n}\pi + n^{-2}\beta\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) + O(n^{-3}), \tag{12}$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n + O(n^{-1}), \tag{13}$$

где $\beta(x) = -cx + h + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\,d\tau$, $c = \frac{1}{\pi}\Big(h + H + \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(\tau)\,d\tau\Big)$, а оценка остаточного члена во всех формулах (8)*–*(12) *равномерна по $x \in [0,\pi]$, $1 \le k \le n$.*

Доказательство леммы 1. По поводу доказательства формул (8), (9) и (13) смотрите, например, [19] или [20]. Убедимся в справедливости (12). Пусть $x_{k,n}$ — k-й нуль собственной функции U_n. Из асимптотической формулы (8) получаем соотношение $\big|\cos nx_{k,n} + \frac{\beta(x_{k,n})}{n}\sin nx_{k,n}\big| = O(n^{-2})$. Положив $\cos\alpha_{k,n} := \frac{n}{\sqrt{n^2+\beta^2(x_{k,n})}}$, получим асимптотическую формулу $\big|\sin\big(\frac{\pi}{2}+nx_{k,n} - \alpha_{k,n}\big)\big|=O(n^{-2})$. Следовательно, имеем соотношение $\big|\frac{\pi}{2}+nx_{k,n} - \alpha_{k,n} - \pi k\big| = O(n^{-2})$. Но функция β, по крайней мере, один раз непрерывно дифференцируема, поэтому имеет место асимптотическая формула

$$x_{k,n} = \frac{2k-1}{2n}\pi + n^{-2}\beta\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) + O(n^{-3}).$$

Формула (10) следует из (8) и (2), а (11) — из (9) и (12). □

Замечание 2. Из асимптотической формулы (8) видно, что выбранная нормировка собственных функций U_n обеспечивает их ограниченность в совокупности. Обозначим

$$\mathbb{M} = \sup\big\{|U_n(x)|, x \in [0,\pi],\ n \in \mathbb{N}\big\} < \infty. \tag{14}$$

Пусть $\rho_\lambda = o\big(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\big)$ при $\lambda \to +\infty$. Считаем, что значения функции $h(\lambda) \in \mathbb{R}$ для произвольного неотрицательного λ. Обозначим через q_λ произвольную функцию из шара $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ радиуса ρ_λ в пространстве функций ограниченной вариации, исчезающих в нуле (q_λ не обязательно непрерывна), т. е.

$$V_0^\pi[q_\lambda] \le \rho_\lambda, \quad \rho_\lambda = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\right) \text{ при } \lambda \to \infty, \quad q_\lambda(0) = 0. \tag{15}$$

Для произвольного потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ при $\lambda \to +\infty$ нули решения задачи Коши

$$y'' + \big(\lambda - q_\lambda(x)\big)y = 0, \quad y(0,\lambda) = 1, \quad y'(0,\lambda) = h(\lambda) \tag{16}$$

или при дополнительном условии $h(\lambda) \neq 0$

$$V_0^\pi[q_\lambda] \le \rho_\lambda, \quad \rho_\lambda = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\right), \text{ при } \lambda \to \infty, \quad q_\lambda(0) = 0, \quad h(\lambda) \neq 0, \tag{17}$$

задачи Коши

$$y'' + \big(\lambda - q_\lambda(x)\big)y = 0, \quad y(0,\lambda) = 0, \quad y'(0,\lambda) = h(\lambda), \tag{18}$$

попадающих в отрезок $[0,\pi]$, пронумеруем следующим образом:

$$0 \le x_{0,\lambda} < x_{1,\lambda} < \cdots < x_{n(\lambda),\lambda} \le \pi \quad (x_{-1,\lambda} < 0, x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi). \tag{19}$$

(Здесь $x_{-1,\lambda} < 0$ и $x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi$ обозначают нули какого-либо продолжения решения задачи Коши (16) или (18) при сохранении ограниченности вариации потенциала q_λ вне $[0,\pi]$.) В [15] описано множество непрерывных на отрезке $[0,\pi]$ функций f, допускающих равномерную внутри интервала $(0,\pi)$ аппроксимацию значениями операторов следующего вида. Обозначим оператор, построенный по решениям задачи Коши (16) или (18), и ставящий в соответствие каждой конечнозначной функции на множестве $\{x_{k,\lambda}\}_{k=0,n=1}^{n,\infty}$ непрерывную функцию по правилу

$$S_\lambda(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda},\lambda)(x - x_{k,\lambda})} f(x_{k,\lambda}) = \sum_{k=0}^{n} s_{k,\lambda}(x) f(x_{k,\lambda}). \tag{20}$$

Очевидно, что значение оператора (20) интерполирует функцию f в узлах $\{x_{k,\lambda}\}_{k=0}^{n}$.

Обозначим $C_0[0,\pi] = \{f : f \in C[0,\pi],\ f(0) = f(\pi) = 0\}$. При приближении с помощью операторов (1) функций $f \in C[0,\pi] \setminus C_0[0,\pi]$ вблизи концов отрезка $[0,\pi]$ возникает явление Гиббса (например, [21], теорема 2). Эта проблема решается с помощью обобщения оператора (20), предложенного в ([15], формула (1.9)), вида

$$T_\lambda(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda})(x - x_{k,\lambda})} \left\{ f(x_{k,\lambda}) - \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x_{k,\lambda} - f(0) \right\} + \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x + f(0), \tag{21}$$

где $y(x,\lambda)$ — решение задачи Коши (16) или (18) и $x_{k,\lambda}$ — нули этого решения.

Теорема 2 ([15], предложение 9)**.** *Пусть $y(x,\lambda)$ — решение задачи Коши* (16) *или* (18)*, и предположим, что в случае задачи Коши* (16) *выполняются условия* (15)*, а в случае задачи Коши* (18) *— условия* (17)*. Если $f \in C_0[0,\pi]$, то равномерно на $[0,\pi]$ справедливо соотношение*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \left(f(x) - S_\lambda(f,x) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(x_{k+1,\lambda}) - f(x_{k,\lambda})\big) s_{k,\lambda}(x) \right) = 0. \tag{22}$$

Далее потребуется

Лемма 2. *Существуют константа C_1 и номер $n_0 \in \mathbb{N}$, не зависящие от $f \in C[0,\pi]$, $0 \le a < b \le \pi$ и $0 < \varepsilon < (b-a)/2$ такие, что для произвольных $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ и $n > n_0$ справедливо неравенство*

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{k \in [1,n-1] \setminus [k_1,k_2]} \psi_{k,n} l_{k,n}^{SL}(x) \right| \le C_1 \omega_1\big(f, \pi/n\big) \ln \frac{\pi}{\varepsilon}. \tag{23}$$

Доказательство леммы 2. Введем обозначение

$$\psi_{k,n} = f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n}), \quad 1 \le k \le n-1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Учитывая $f \in C[0,\pi]$ и (12), убедимся, что существует константа C_2 такая, что справедлива оценка

$$|\psi_{k,n}| \le C_2 \omega_1\big(f, \pi/n\big) \ \text{ для всех } \ 1 \le k \le n-1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Возьмем произвольное $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. Сумму в (23) представим в виде двух слагаемых, каждое из которых оценим следующим образом:

$$\Big|\sum_{k\in[1,n-1]\setminus[k_1,k_2]} \psi_{k,n} l_{k,n}^{SL}(x)\Big| \le C_2\omega_1\big(f,\pi/n\big)\bigg(\sum_{k=1}^{k_1-1}|l_{k,n}^{SL}(x)| + \sum_{k=k_2+1}^{n-1}|l_{k,n}^{SL}(x)|\bigg).$$

Воспользовавшись (9), (11) и формулой конечных приращений Лагранжа, продолжим оценку суммы в (23) следующим образом:

$$\Big|\sum_{k\in[1,n-1]\setminus[k_1,k_2]} \psi_{k,n} l_{k,n}^{SL}(x)\Big| \le C_2\omega_1\big(f,\pi/n\big)\frac{|U_n(x)|}{n}\bigg(\sum_{k=1}^{k_1-1}\frac{1}{|x-x_{k,n}|} + \sum_{k=k_2+1}^{n}\frac{1}{|x-x_{k,n}|}\bigg)+$$
$$+ C_2 2\omega_1\big(f,\pi/n\big)\bigg(\sum_{k=1}^{k_1-1}\bigg|\frac{|U_n(x)|}{|U_n'(x_{k,n})||x-x_{k,n}|} - \frac{|U_n(x)|}{n|x-x_{k,n}|}\bigg|+$$
$$+\sum_{k=k_2+1}^{n}\bigg|\frac{|U_n(x)|}{|U_n'(x_{k,n})||x-x_{k,n}|} - \frac{|U_n(x)|}{n|x-x_{k,n}|}\bigg|\bigg) \le$$
$$\le C_2\omega_1\big(f,\pi/n\big)\frac{|U_n(x)|}{n}\bigg(\sum_{k=1}^{k_1-1}\frac{1}{|x-x_{k,n}|} + \sum_{k=k_2+1}^{n}\frac{1}{|x-x_{k,n}|}\bigg)+$$
$$+ C_2\omega_1\big(f,\pi/n\big)\sum_{k=1}^{n}\bigg|\frac{U_n(x)}{x-x_{k,n}}\bigg|\bigg|\frac{n-(n+O(n^{-1}))}{n(n+O(n^{-1}))}\bigg| =$$
$$= C_2\omega_1\big(f,\pi/n\big)\frac{|U_n(x)|}{n}\bigg(\sum_{k=1}^{k_1-1}\frac{1}{|x-x_{k,n}|} + \sum_{k=k_2+1}^{n}\frac{1}{|x-x_{k,n}|}\bigg) + \omega_1\big(f,\pi/n\big)O(n^{-1}).$$

Из асимптотической формулы (12) для нулей собственных функций U_n находим такой номер n_0, зависящий только от параметров задачи Штурма–Лиувилля, начиная с которого будет выполняться неравенство

$$\min_{1\le k\le n-1}|x_{k+1,n}-x_{k,n}| \ge \frac{\pi}{2n}, \tag{26}$$

а следовательно, и соотношение

$$|x-x_{k_0\pm2,n}| \ge \min_{1\le k\le n-1}|x_{k+1,n}-x_{k,n}| \ge \frac{\pi}{2n}, \tag{27}$$

где k_0 — номер ближайшего к $x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ узла (если таких узлов окажется два, то номер любого из них). В силу того, что $\max\big(\ln|x(\pi-x)|, x\in(0,\pi)\big) = 2\ln\frac{\pi}{2}$, $\inf\ln\frac{\pi}{\varepsilon}\ge\ln 2$, (14), (26) и (27), сумму в (23) равномерно на всем отрезке $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ можно оценить таким образом:

$$\Big|\sum_{k\in[1,n-1]\setminus[k_1,k_2]} \psi_{k,n} l_{k,n}^{SL}(x)\Big| \le C_2\omega_1\big(f,\pi/n\big)\frac{|U_n(x)|}{n}\bigg(\sum_{k=1}^{k_1-1}\frac{1}{x_{k+1,n}-x_{k,n}}\int_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}}\frac{dt}{x-t}+$$
$$+\sum_{k=k_2+1}^{n-1}\frac{1}{x_{k,n}-x_{k-1,n}}\int_{x_{k-1,n}}^{x_{k,n}}\frac{dt}{t-x}\bigg) + \omega_1\big(f,\pi/n\big)O(n^{-1}) \le$$
$$C_2\omega_1\big(f,\pi/n\big)\frac{2|U_n(x)|}{\pi}\bigg(\int_0^{x-\frac{\varepsilon}{2}}\frac{dt}{x-t} + \int_{x+\frac{\varepsilon}{2}}^{\pi}\frac{dt}{t-x}\bigg) + \omega_1\big(f,\pi/n\big)O(n^{-1}) \le$$

$$\leq C_2\omega_1\big(f,\pi/n\big)\frac{2|U_n(x)|}{\pi}\left(2\ln\frac{\pi}{2}-2\ln\frac{\varepsilon}{2}\right)+\omega_1\big(f,\pi/n\big)O(n^{-1})\leq$$
$$\leq\left(\frac{4C_2\mathbb{M}}{\pi}+\frac{1}{\ln 2}O(n^{-1})\right)\ln\left(\pi/\varepsilon\right)\omega_1\big(f,\pi/n\big).$$

Отсюда следует существование константы C_2, выбор которой зависит только от параметров задачи Штурма–Лиувилля (2). $\square$

Лемма 3. *Пусть U_n — собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n регулярной задачи Штурма–Лиувилля* (2)*. Тогда существует константа C_3, зависящая только от q, h, H, и такая, что для всех $x\in[0,\pi]$ и всех $n=1,2,3,\dots$ справедливо неравенство*

$$|l_{k,n}^{SL}(x)|=\left|\frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x-x_{k,n})}\right|\leq C_3. \tag{28}$$

Доказательство леммы 3. Если для каких либо $1\leq k\leq n$ и $n\in\mathbb{N}$ окажется $x=x_{k,n}$, то $|l_{k,n}^{SL}(x)|=1$. Рассмотрим теперь случай $x\neq x_{k,n}$. Пусть сначала $0<|x-x_{k,n}|\leq n^{-1}$, $x\in[0,\pi]$, тогда по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа из (10) и (11) следует неравенство

$$|l_{k,n}^{SL}(x)|\leq\left|\frac{U_n'(x_{k,n})(x-x_{k,n})+U_n''(\xi_{k,n})(x-x_{k,n})^2/2}{U_n'(x_{k,n})(x-x_{k,n})}\right|=1+\frac{O(n^2)}{n+O(n^{-1})}\frac{1}{n}\leq C_{3,1}$$

для некоторой константы $C_{3,1}$, выбор которой зависит только от параметров задачи Штурма–Лиувилля q, h и H. Осталось рассмотреть случай $|x-x_{k,n}|>n^{-1}$, $x\in[0,\pi]$. В силу асимптотических формул (8) и (11) существует константа $C_{3,2}$, для которой справедливо неравенство

$$|l_{k,n}^{SL}(x)|\leq n\left|\frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})}\right|\leq\left|\frac{\cos nx+\frac{\beta(x)}{n}\sin nx+O(n^{-2})}{n+O(n^{-1})}\right|n\leq C_{3,2}.$$

Положив $C_3=\max(C_{3,1},C_{3,2})$, убедимся в справедливости леммы 3. $\square$

Для любых $0\leq a<b\leq\pi$, $0<\varepsilon<(b-a)/2$ обозначим

$$Q_n(f,[a,b],\varepsilon):=\max_{p_1\leq p\leq p_2}\left|\sum_{m=m_1}^{m_2}{}'\,\frac{f(x_{2m+1,n})-f(x_{2m,n})}{p-2m}\right|. \tag{29}$$

Лемма 4. *Если функция $f\in C[0,\pi]$, то из соотношения*

$$\lim_{\lambda\to\infty}Q_n(f,[a,b],\varepsilon)=0 \tag{30}$$

следует утверждение (7).

Доказательство. Заметим, что из (24), (9) и (11) вытекает равномерная на всем отрезке $[0,\pi]$ оценка

$$\left|\sum_{k=k_1}^{k_2}\big(f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})\big)l_{k,n}^{SL}(x)-\sum_{k=k_1}^{k_2}\psi_{k,n}\frac{(-1)^kU_n(x)}{n(x-x_{k,n})}\right|\leq$$
$$\leq\sum_{k=k_1}^{k_2}|\psi_{k,n}|\left|\frac{U_n(x)}{(x-x_{k,n})}\right|\left|\frac{(-1)^kn-U_n'(x_{k,n})}{nU_n'(x_{k,n})}\right|=\omega\big(f,\pi/n\big)O(n^{-1}). \tag{31}$$

Положив в случае задачи Коши (16) $\lambda = \lambda_n$, где λ_n — собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (2), получим тождество $U_n(x) \equiv y(x, \lambda_n)$. Следовательно, значения операторов (1) и (20) при $\lambda = \lambda_n$ тождественно совпадают. Из (23), теоремы 2 в случае задачи Коши (16) при $\lambda = \lambda_n$ и (31) получаем соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x) - L_n^{SL}(f,x) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})\big)l_{k,n}^{SL}(x)\right) = \\ = \lim_{n\to\infty}\left(f(x) - L_n^{SL}(f,x) - \frac{1}{2}\sum_{k=k_1}^{k_2}\psi_{k,n}\frac{(-1)^k U_n(x)}{n(x - x_{k,n})}\right) = 0. \quad (32)$$

Зафиксируем произвольное $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. Выберем индекс $p = p(x,\lambda)$ такой, что $x \in [x_{p,n}, x_{p+1,n})$. Тогда $x = x_{p,n} + \alpha(x_{p+1,n} - x_{p,n})$, где $\alpha = \alpha(x,\lambda) \in [0,1)$,

$$x - x_{k,n} = \frac{p - k + \alpha + \beta_{k,n}}{n}\pi.$$

В силу (12) равномерно по всем $1 \le k \le n$ и $x \in [0,\pi]$ справедлива оценка $\beta_{k,n} = \beta_{k,n}(x) = O(n^{-1})$.

Из (25) и (12) для всех $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ и настолько больших n, что для всех $1 \le k \le n-1$ имеет место неравенство $|\beta_{k,n}| < 1$, следует оценка

$$\left|\sum_{\substack{k:k_1\le k\le k_2\\ |p-k|\ge 3}}\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k+\alpha+\beta_{k,n}} - \sum_{\substack{k:k_1\le k\le k_2\\ |p-k|\ge 3}}\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\right| \le \\ \le C_2\omega_1\big(f,\pi/n\big)\sum_{\substack{k:k_1\le k\le k_2\\ |p-k|\ge 3}}\frac{\alpha}{|p-k|(|p-k|-2)} \le 3C_2\omega_1\big(f,\pi/n\big). \quad (33)$$

Учитывая обозначение (24), преобразуем сумму в (32) следующим образом:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=k_1}^{k_2}\big(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})\big)l_{k,n}^{SL}(x) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{k:k_1\le k\le k_2\\ |p-k|\ge 3}}\psi_{k,n}l_{k,n}^{SL}(x) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k:k_1\le k\le k_2\\ |p-k|< 3}}\psi_{k,n}l_{k,n}^{SL}(x). \quad (34)$$

Теперь из неравенства треугольника, (24), (28), (33) и (32) равномерно по $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ получаем оценку

$$\left|\frac{1}{2}\sum_{k=k_1}^{k_2}\big(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})\big)l_{k,n}^{SL}(x) - \frac{U_n(x)}{2\pi}{\sum_{k=k_1}^{k_2}}'\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\right| \le \\ \le \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{k:|p-k|\ge 3}\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k+\alpha} - \sum_{k:|p-k|\ge 3}\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\right| + \\ + \frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|<3}\left|\psi_{k,n}l_{k,n}^{SL}(x)\right| + \frac{1}{2\pi}{\sum_{k:|p-k|<3}}'\frac{|\psi_{k,n}|}{|p-k|} = o(1). \quad (35)$$

Из (35) и (32) равномерно по $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ следует соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x) - L_n^{SL}(f,x) - \frac{U_n(x)}{2\pi}{\sum_{k=k_1}^{k_2}}'\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\right) = 0. \quad (36)$$

Оценим последнее слагаемое в (36) с помощью (8), (14), (25) и неравенства треугольника

$$\left|\frac{U_n(x)}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}' \frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\right| \le 2\left|\frac{\mathbb{M}}{2\pi}\sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \frac{\psi_{2m,n}}{p-2m}\right| + \left|\frac{\mathbb{M}}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}' \frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right| + O\left(\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)\right). \tag{37}$$

Так как функция f непрерывна на отрезке $[0,\pi]$, то можно подобрать последовательность натуральных чисел $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что

$$l_n = o(n), \quad \lim_{n\to\infty} l_n = \infty, \quad \lim_{\lambda\to\infty}\omega_1\big(f,\pi/n\big)\sum_{k=1}^{l_n}\frac{1}{k} = 0. \tag{38}$$

Теперь оценим вторую сумму в правой части (37):

$$\left|\frac{1}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}' \frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right| \le \left|\frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|\le l_n}{}' \frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right| + \left|\frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|>l_n}{}' \frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right|. \tag{39}$$

Из неравенства (25) следует

$$\left|\frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|\le l_n}{}' \frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right| \le \frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|\le l_n}{}' \left|\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right| \le \frac{C_2}{\pi}\omega_1\big(f,\pi/n\big)\sum_{k=1}^{l_n}\frac{1}{k}. \tag{40}$$

Вторая сумма в (39) после преобразования Абеля в случае $k\in[k_1,k_2]:|p-k|>l_n$ может быть оценена следующим образом:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|>l_n}{}' \frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right| \le \frac{4\|f\|_{C[a,b]}}{l_n+1} + 4\|f\|_{C[a,b]}\sum_{k=l_n}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}.$$

Следовательно, из (14), (38), (39) и (40) равномерно по $x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ имеем

$$\left|\frac{\mathbb{M}}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}' \frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right| = o(1). \tag{41}$$

Из (36), (37), (41) и неравенства треугольника получаем

$$\big|f(x)-L_n^{SL}(f,x)\big| \le \left|f(x)-L_n^{SL}(f,x)-\frac{U_n(x)}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}' \frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\right| +$$

$$+\left|\frac{\mathbb{M}}{\pi}\sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \frac{\psi_{2m,n}}{p-2m}\right| + \left|\frac{\mathbb{M}}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}' \frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right| + o(1) \le \frac{\mathbb{M}}{\pi}Q_n(f,[a,b],\varepsilon)+o(1).$$

Следовательно, из условия (30) следует равномерная сходимость (7). □

Для произвольных $0\le a<b\le\pi$, $0<\varepsilon<(b-a)/2$ обозначим

$$Q_n^*(f,[a,b],\varepsilon) := \max_{p_1\le p\le p_2}\sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \left|\frac{f(x_{2m+1,n})-f(x_{2m,n})}{p-2m}\right|. \tag{42}$$

Следствие 1. Если $f\in C[0,\pi]$, то из соотношения

$$\lim_{n\to\infty} Q_n^*(f,[a,b],\varepsilon) = 0 \tag{43}$$

вытекает (7).

Доказательство. Действительно, условие (43) обеспечивает выполнение условия (30), которое в силу леммы 4 гарантирует истинность (7). □

Замечание 3. Лемма 4 и следствие 1 являются аналогами известных признаков А.А. Привалова равномерной сходимости тригонометрических интерполяционных полиномов и классических интерполяционных многочленов Лагранжа по матрице узлов интерполирования П.Л. Чебышева [21].

3. Достаточное условие равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа–Штурма–Лиувилля внутри интервала $(0, \pi)$

Доказательство теоремы 1. Пусть функции v и ω удовлетворяют условию (6) и $f \in C(\omega^l[a,b]) \cap V^-(v)$. Покажем, что выполняется соотношение (43). В силу равномерной непрерывности функции f на отрезке $[0,\pi]$ для любого положительного $\widetilde{\varepsilon}$ существуют натуральные числа ν и n_1 такие, что для всех $n \geq n_1$ $(n \in \mathbb{N})$ одновременно справедливы неравенства

$$\omega\big(f, \pi/n\big) \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} < \frac{\widetilde{\varepsilon}}{6} \tag{44}$$

и

$$24\|f\|_{C[a,b]} < \widetilde{\varepsilon}\nu. \tag{45}$$

Пусть $n \geq n_1$. Найдем индекс p_0, зависящий от n, a, b, ε и f, на котором достигается максимум в соотношении (42)

$$Q_n^*(f,[a,b],\varepsilon) = {\sum_{m=m_1}^{m_2}}' \left| \frac{f(x_{2m+1,n}) - f(x_{2m,n})}{p_0 - 2m} \right|.$$

Обозначим

$$Q_n^{**}(f,[a,b],\varepsilon) := {\sum_{k=k_1}^{k_2}}' \left| \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{p_0 - k} \right|.$$

Так как $Q_n^{**}(f,[a,b],\varepsilon)$ получается из $Q_n^*(f,[a,b],\varepsilon)$ добавлением неотрицательных слагаемых, то справедливо неравенство

$$Q_n^*(f,[a,b],\varepsilon) \leq Q_n^{**}(f,[a,b],\varepsilon). \tag{46}$$

Разобьем $Q_n^{**}(f,[a,b],\varepsilon)$ на два слагаемых

$$Q_n^{**}(f,[a,b],\varepsilon) = {\sum_{k=k_1}^{k_2}}' \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{|p_0 - k|} - 2{\sum_{k=k_1}^{k_2}}'' \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{|p_0 - k|} = S_1(p_0) + S_2(p_0), \tag{47}$$

где два штриха означают, отутствие в сумме неотрицательных слагаемых и слагаемого с индексом $k = p_0$.

Сначала займемся оценкой первой суммы, представив ее в виде

$$S_1(p_0) = \sum_{\substack{k:k\in[k_1,k_2]\\ 0<|p_0-k|<\nu}} \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{|p_0 - k|} + \sum_{\substack{k:k\in[k_1,k_2]\\ 0<|p_0-k|\geq\nu}} \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{|p_0 - k|} = S_{1,1}(p_0) + S_{1,2}(p_0). \tag{48}$$

В случае $\{k : k \in [k_1,k_2], 0 < |p_0 - k| \geq \nu\} = \varnothing$ считаем второе слагаемое равным нулю.

Из неравенства (44) для всех $n \geq n_1$ имеем соотношение

$$|S_{1,1}(p_0)| \leq 2\omega\big(f, \pi/n\big) \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} < \frac{\widetilde{\varepsilon}}{3}. \tag{49}$$

Теперь оценим $S_{1,2}(p_0)$. Если p_0 удовлетворяет соотношению $k_1 \leq p_0-\nu < p_0 < p_0+\nu \leq k_2$, то имеют место неравенства $p_0 - k_1 \geq \nu$ и $k_2 - p_0 \geq \nu$. Используем (45) и после преобразования Абеля получим оценку

$$\begin{aligned}|S_{1,2}(p_0)| &\leq \left|\sum_{k=k_1}^{p_0-\nu} \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{p_0 - k}\right| + \left|\sum_{k=p_0+\nu}^{k_2} \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{k - p_0}\right| \leq \\ &\leq \left|\sum_{k=k_1}^{p_0-\nu-1} \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k_1,n})}{(p_0-k)(p_0-k-1)}\right| + \left|\frac{f(x_{p_0-\nu+1,n}) - f(x_{k_1,n})}{p_0 - k_1}\right| + \\ &+ \left|\sum_{k=p_0+\nu}^{k_2-1} \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{p_0+\nu,n})}{(k-p_0)(k+1-p_0)}\right| + \left|\frac{f(x_{k_2,n}) - f(x_{p_0+\nu,n})}{k_2 - p_0}\right| \leq \\ &\leq 4\|f\|_{C[a,b]} \sum_{i=\nu}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{4\|f\|_{C[a,b]}}{\nu} \leq \frac{8\|f\|_{C[a,b]}}{\nu} < \frac{\widetilde{\varepsilon}}{3}. \end{aligned} \tag{50}$$

Точно так же доказывается (50) в ситуации, когда индекс p_0 удовлетворяет одному из соотношений $p_0 - \nu < k_1 \leq p_0 < p_0 + \nu \leq k_2$ или $k_1 \leq p_0 - \nu < p_1 \leq k_2 < p_0 + \nu$. Из возможных вариантов остался случай, когда $p_0 - \nu < k_1 \leq p_1 \leq k_2 < p_0 + \nu$. В этом случае $|S_{1,2}(p_0)| = 0$.

Из (48), (49) и (50) для всех $n \geq n_1$ имеем оценку

$$|S_1(p_0)| \leq \frac{2\widetilde{\varepsilon}}{3}. \tag{51}$$

Перейдем к изучению свойств суммы $S_2(p_0)$. Возьмем произвольное целое $m : 1 \leq m \leq k_2 - k_1 - 2$ и представим $S_2(p_0)$ в виде

$$\begin{aligned}0 \leq S_2(p_0) = -2 \sum_{\substack{k:k\in[k_1,k_2] \\ |p_0-k|\leq m}}'' \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{|p_0 - k|} - \\ -2 \sum_{\substack{k:k\in[k_1,k_2] \\ |p_0-k|> m}}'' \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{|p_0 - k|} = S_{2,1}(p_0) + S_{2,2}(p_0). \end{aligned} \tag{52}$$

Выберем достаточно большой номер $n_2 \geq n_1$, зависящий только от параметров задачи Штурма–Лиувилля, начиная с которого в силу (12) будут выполняться неравенства $\max\limits_{1\leq k\leq n} |x_{k+1,n} - x_{k,n}| \leq \frac{3\pi}{2n}$. Функция $f \in C(\omega^l[a,b])$, следовательно, согласно определению (5), начиная с n_2, будем иметь соотношение

$$f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n}) \geq -10K_f\omega\big(\pi/n\big). \tag{53}$$

Поэтому

$$0 \leq S_{2,1}(p_0) = -2 \sum_{\substack{k:k\in[k_1,k_2] \\ |p_0-k|\leq m}}'' \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{|p_0 - k|} \leq 10K_f\omega\big(\pi/n\big) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}. \tag{54}$$

Далее оценим сумму $S_{2,2}(p_0)$:

$$0 \le S_{2,2}(p_0) = -2 \sum_{\substack{k: k\in[k_1,k_2] \\ |p_0-k|>m}}'' \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{|p_0-k|} \le$$

$$\le 2 \sum_{k=k_1}^{p_0-m-1} \frac{-(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n}))_-}{p_0-k} + 2 \sum_{k=p_0+m+1}^{k_2} \frac{-(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n}))_-}{k-p_0}. \quad (55)$$

Если $p_0 - m \le k_1$ или $p_0 + m \ge k_2$, то в (55) исчезает соответственно первое или второе слагаемое. В случае $p_0 - m < k_1 < k_2 < p_0 + m$ суммы $S_{2,2}(p_0)$ в (52) вообще нет. Принимая во внимание, что $f \in V(v)$, с помощью преобразования Абеля и (53) оценим (55):

$$0 \le S_{2,2}(p_0) \le$$

$$\le 2\left(\frac{\sum\limits_{k=k_1}^{p_0-m-1} -(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n}))_-}{p_0-k_1} + \sum_{k=k_1+1}^{p_0-m-1} \frac{\sum\limits_{j=k}^{p_0-m-1} -(f(x_{j+1,n}) - f(x_{j,n}))_-}{(p_0-k)(p_0-k+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sum\limits_{k=p_0+m+1}^{k_2} -(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n}))_-}{k_2-p_0} + \sum_{k=p_0+m+1}^{k_2-1} \frac{\sum\limits_{j=p_0+m+1}^{k} -(f(x_{j+1,n}) - f(x_{j,n}))_-}{(p_0-k)(p_0-k-1)} \right) \le$$

$$\le 2\left(\frac{\big((p_0-k_1)-m-1\big)2,5K_f\omega\big(\pi/n\big)}{p_0-k_1} + M_f \sum_{k=k_1+1}^{p_0-m-1} \frac{v(p_0-m-k)}{(p_0-k)(p_0-k+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\big((k_2-p_0)-m-1\big)2,5K_f\omega\big(\pi/n\big)}{k_2-p_0} + M_f \sum_{k=p_0+m+1}^{k_2-1} \frac{v(k-p_0-m)}{(p_0-k)(p_0-k-1)} \right) \le$$

$$\le 2M_f \left(\sum_{k=m+1}^{p_0-k_1-1} \frac{v(k-m)}{k(k+1)} + \sum_{k=m+1}^{k_2-p_0-1} \frac{v(k-m)}{k(k+1)} \right) + 10K_f\omega\big(\pi/n\big) \le$$

$$\le 4M_f \sum_{k=m+1}^{k_2-k_1-1} \frac{v(k)}{k^2} + 10K_f\omega\big(\pi/n\big).$$

Тогда из (52), (54) и (55) имеем

$$0 \le S_2(p_0) \le 10K_f\omega\big(f,\pi/n\big) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} + 4M_f \sum_{k=m+1}^{k_2-k_1-1} \frac{v(k)}{k^2} + 10K_f\omega\big(\pi/n\big). \quad (56)$$

При каждом $n \ge n_2$ в качестве m будем брать натуральное $m_n := \left[\exp\frac{\alpha_n}{\omega(\pi/n)}\right]$. Последовательность $\alpha_n = o(1)$. Поэтому существует номер $n_3 \in \mathbb{N}$, $n_3 \ge n_2$, такой, что для произвольного $n \ge n_3$ справедливо неравенство

$$10K_f\omega\big(\pi/n\big) \sum_{k=1}^{m_n} \frac{1}{k} \le \widetilde{\varepsilon}/6. \quad (57)$$

Далее, условие (6) гарантирует существование такого номера $n_4 \in \mathbb{N}$, $n_4 \geq n_3$, что для произвольного $n \geq n_4$ имеет место оценка

$$4M_f \sum_{k=m_n+1}^{k_2-k_1-1} \frac{v(k)}{k^2} \leq \widetilde{\varepsilon}/6. \tag{58}$$

В силу (52), (54), (56)–(58) для любого $n \geq n_4$ справедливо неравенство

$$0 \leq S_2(p_0) \leq \widetilde{\varepsilon}/3. \tag{59}$$

Из (46), (47), (48), (51) и (59) получаем, что для произвольного $\widetilde{\varepsilon} > 0$ существует номер $n_4 \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $n > n_4$

$$Q_n^*(f, [a,b], \varepsilon) \leq Q_n^{**}(f, [a,b], \varepsilon) < \widetilde{\varepsilon}.$$

Теперь утверждение теоремы 1 в случае $f \in C(\omega^l[a,b]) \cap V^-(v)$ следует из следствия 1.

Для доказательства теоремы 1 в случае $f \in C(\omega^r[a,b]) \cap V^+(v)$ достаточно заметить, что если $f \in C(\omega^r[a,b]) \cap V^+(v)$, то $-f \in C(\omega^l[a,b]) \cap V^-(v)$ и оператор $L_n^{SL}(f,\cdot)$ линейный. □

Замечание 4. Из теоремы 1 следует, что если $f_1 \in C(\omega_1^r[a,b]) \cap V^+(v_1)$ и $f_2 \in C(\omega_2^l[a,b]) \cap V^-(v_2)$, а пары функций (v_i, ω_i), $i = 1, 2$, удовлетворяют соотношению (6), то несмотря на то, что линейная комбинация $f = \alpha f_1 + \beta f_2$ может не принадлежать ни одному из этих классов, интерполяционный процесс Лагранжа–Штурма–Лиувилля будет приближать (7) функцию f.

Замечание 5. Если $f \in C[0,\pi]$, то имеют место двусторонние оценки

$$v^+(n,f) \leq v(n,f) \leq 2\left(v^+(n,f) + \|f\|_{C[0,\pi]}\right),$$
$$-v^-(n,f) \leq v(n,f) \leq 2\left(-v^-(n,f) + \|f\|_{C[0,\pi]}\right).$$

Следствие 2. Каждый из классов функций Дини–Липшица $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(f, 1/n)\ln n = 0$ ([1]) и Крылова (непрерывные функции ограниченной вариации) является собственным подмножеством функционального класса (6).

Следствие 3. Из теоремы 1 следует, что любое из условий $\lim\limits_{n\to\infty} \omega^l(f, 1/n)\ln n = 0$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \omega^r(f, 1/n)\ln n = 0$ гарантирует справедливость соотношения (7).

Доказательство следствий 2 и 3. Достаточно заметить, что классические модуль непрерывности и изменения являются частными случаями односторонних, и в качестве α_n в случае класса Дини–Липшица нужно взять $\alpha_n := \omega_1\big(f, \pi/n\big)\ln n$, а для доказательства аналога признака Крылова положить $\alpha_n = \sqrt{\omega_1(f, \frac{\pi}{n})}$.

Литература

[1] Натансон Г.И. *Об одном интерполяционном процессе*, Учен. зап. Ленинградск. пед. ин-та **166**, 213–219 (1958).

[2] Трынин А.Ю. *О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля*, Изв. вузов. Матем., № 11, 74–85 (2010)

[3] Трынин А.Ю. *Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля*, Изв. вузов. Матем., № 9, 60–73 (2000)

[4] Трынин А.Ю. *Дифференциальные свойства нулей собственных функций задачи Штурма–Лиувилля*, Уфимск. матем. журн. **3** (4), 133–143 (2011).

[5] Трынин А.Ю. *Об одной обратной узловой задаче для оператора Штурма–Лиувилля*, Уфимск. матем. журн. **5** (4), 116–129 (2013).

[6] Новиков И.Я., Стечкин С.Б. *Основы теории всплесков*, УМН **53** (6), 53–128 (1998).

[7] Livne Oren E., Brandt Achi E. *The multilevel sync transform*, SIAM J. on Sci. Comp. **33** (4), 1726–1738 (2011).

[8] Coroianu L., Sorin G. *Localization results for the non-truncated max-product sampling operators based on Fejer and sinc-type kernels*, Demonstratio Math. **49** (1), 38–49 (2016).
[9] Richardson M., Trefethen L. *A sinc function analogue of Chebfun*, SIAM J. Sci. Comput. **33** (5) 2519–2535 (2011).
[10] Khosrow M., Yaser R., Hamed S. *Numerical solution for first kind Fredholm integral equations by using sinc collocation method*, International J. Appl. Phys. and Math. **6** (3), 120–128 (2016).
[11] Marwa M. *Sinc approximation of eigenvalues of Sturm–Liouville problems with a Gaussian multiplier*, Calcolo: a quarterly on numerical analysis and theory of computation **51** (3), 465–484 (2014).
[12] Trynin A.Yu., Sklyarov V.P. *Error of sinc approximation of analytic functions on an interval*, Sampling Theory in Signal and Image Processing, **7** (3), 263–270 (2008).
[13] Трынин А.Ю. *Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке*, Матем. сб. **198** (10), 141–158 (2007).
[14] Умаханов А.Я., Шарапудинов И.И. *Интерполяция функций суммами Уиттекера и их модификациями: условия равномерной сходимости*, Владикавказск. матем. журн. **18** (4), 61–70 (2016).
[15] Трынин А.Ю. *Обобщение теоремы отсчетов Уиттекера–Котельникова–Шеннона для непрерывных функций на отрезке*, Матем. сб. **200** (11), 61–108 (2009).
[16] Дьяченко М.И. *Об одном классе методов суммирования кратных рядов Фурье*, Матем. сб. **204** (3), 3–18 (2013).
[17] Скопина М.А., Максименко И.Е. *Многомерные периодические всплески*, Алгебра и анализ **15** (2), 1–39 (2003).
[18] Фарков Ю.А. *О наилучшем линейном приближении голоморфных функций*, Фундамент. и прикл. матем. **19** (5), 185–212 (2014).
[19] Сансоне Дж. *Обыкновенные дифференциальные уравнения* (Ин. лит., М., 1953).
[20] Левитан Б.М. *Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака* (Наука, М., Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988).
[21] Привалов А.А. *Теория интерполирования функций*, Кн. 1 (Изд-во Саратовск. ун-та, Саратов, 1990).
[22] Привалов А.А. *Теория интерполирования функций*, Кн. 2 (Изд-во Саратовск. ун-та, Саратов, 1990).

Александр Юрьевич Трынин

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
ул. Астраханская, д. 83, г. Саратов, 410012, Россия,

e-mail: atrynin@gmail.com

A. Yu. Trynin

A criterion of convergence of Lagrange–Sturm–Liouville processes in terms of one-sided modulus of variation

Abstract. We obtain a criterion of uniform convergence inside the interval $(0, \pi)$ of interpolation processes constructed from eigenfunctions of the regular Sturm–Liouville problem with a continuous potential of bounded variation. The condition of the characteristic is formulated in terms of a one-sided modulus of variations of the function.

Keywords: sinc approximation, interpolation functions, uniform approximation, Lagrange–Sturm–Liouville processes.

Aleksandr Yur'evich Trynin

Saratov State University,
83 Astrakhanskaya str., Saratov, 410012 Russia,

e-mail: atrynin@gmail.com