А. Н. Абызов, $I_0^*$-модули, *Изв. вузов. Матем.*, 2014, номер 8, 3–17

*Известия вузов. Математика* *http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/*
*2014, №8, с. 3–17* *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

*А.Н. АБЫЗОВ*

# $I_0^*$-МОДУЛИ

*Аннотация.* Исследуются кольца, над которыми каждый модуль является $I_0^*$-модулем, двойственным к $I_0$-модулю. Описываются полурегулярные кольца, над которыми каждый модуль является одновременно $I_0^*$-модулем и $I_0$-модулем. Дано описание колец, над которыми каждый модуль является прямой суммой инъективного модуля и $SV$-модуля. Изучены связи между слабо бэровскимим модулями и $I_0^*$-модулями.

*Ключевые слова*: полуартиновы кольца, $SV$-кольца, $I_0$-модули, $I_0^*$-модули, слабо бэровские модули.

*УДК*: 512.553

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, а модули — унитарными.

Модуль $M$ называется $I_0$*-модулем*, если каждый его немалый подмодуль содержит в себе ненулевое прямое слагаемое модуля $M$. Полуартиновый $V$-модуль называется $SV$-модулем. Кольцо $R$ называется *обобщенным справа $SV$-кольцом,* если каждый правый $R$-модуль является $I_0$-модулем. Обобщенные $SV$-кольца изучались в работах [1]–[9]. Ряд свойств обобщенных $SV$-колец были отражены в монографиях [10],[11].

Модуль $M$ назовем $I_0^*$*-модулем*, если каждый несущественный подмодуль модуля $M$ содержится в прямом слагаемом модуля $M$, который отличен от $M$. Несложно заметить, что понятие $I_0^*$-модуля двойственно понятию $I_0$-модуля. Ясно, что каждый $CS$-модуль является $I_0^*$-модулем. Таким образом, примерами $I_0^*$-модулей являются инъективные, квазиинъективные, непрерывные и квазинепрерывные модули.

Хорошо известна

**Теорема** ([12], 13.5)**.** *Для кольца $R$ равносильны следующие условия*:
*над кольцом $R$ каждый правый модуль является*

1) *модулем со свойством подъема,*
2) *$CS$-модулем,*
3) *прямой суммой инъективного модуля и полупростого модуля,*
4) *прямой суммой проективного модуля и полупростого модуля;*
5) *$R$ — артиново полуцепное кольцо и $J^2(R) = 0$.*

Различные обобщения этой теоремы можно найти в работах [13]–[15]. В данной работе изучаются кольца, удовлетворяющие условиям, которые являются широкими обобщениями условий 2) и 3) из предыдущей теоремы. В первом разделе статьи изучаются кольца, над которыми каждый правый модуль является $I_0^*$-модулем. Во втором разделе статьи описываются кольца, над которыми каждый правый модуль является прямой суммой инъективного модуля и обобщенного $SV$-модуля. Здесь же описываются полурегулярные кольца,

Поступила 04.02.2013

над которыми каждый модуль является одновременно $I_0$-модулем и $I_0^*$-модулем. В третьем разделе изучаются связи между слабо бэровскимим модулями и $I_0^*$-модулями.

В данной статье будем придерживаться тех же обозначений, что и в работах [1], [4].

## 1. Кольца, над которыми каждый модуль является $I_0^*$-модулем

**Лемма 1.1.** *Прямое слагаемое $I_0^*$-модуля является $I_0^*$-модулем.*

*Доказательство.* Пусть $M = M_1 \oplus M_2$ — $I_0^*$-модуль и $M_1$, $M_2$ — его подмодули. Покажем, что $M_1$ является $I_0^*$-модулем. Пусть $N$ — несущественный подмодуль модуля $M_1$. Тогда для некоторого собственного подмодуля $N_1$ модуля $M$ имеет место равенство $M = N_1 \oplus N_2$, где $N_2$ — подмодуль модуля $M$ и $N \oplus M_2 \subset N_1$. Тогда $N_1 \cap M_1$ – собственное прямое слагаемое модуля $M_1$, которое содержит подмодуль $N$. □

Из леммы 1.1 непосредственно следует

**Лемма 1.2.** *Каждый $I_0^*$-модуль, имеющий конечную размерность Голди, является $CS$-модулем.*

**Лемма 1.3.** *Пусть $M$ — правый полуартиновый $R$-модуль. Если в категории $\sigma(M)$ инъективная оболочка каждого простого модуля является либо простой, либо локальным $M$-проективным модулем длины два, то в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является $I_0^*$-модулем.*

*Доказательство.* Пусть $N_0$ — несущественный подмодуль модуля $N \in \sigma(M)$ и $S$ — такой простой подмодуль модуля $N$, что $N_0 \cap S = 0$. Рассмотрим дополнение по пересечению $N'$ подмодуля $S$ в модуле $N$, которое содержит подмодуль $N_0$. Тогда $E(N) = E(N') \oplus E(S)$. Если $E(S) = S$, то $N = N \cap E(N) = E(N') \cap N \oplus S$ и $N_0 \subset E(N') \cap N$. Предположим, что $E(S)$ — локальный проективный модуль длины два. Обозначим через $\pi$ проекцию на модуль $E(S)$ относительно разложения $E(N) = E(N') \oplus E(S)$. Если $\pi_{|N}(N) = S$, то $N \subset E(N') \oplus S$ и, следовательно, $N = E(N') \cap N \oplus S$ и $N_0 \subset E(N') \cap N$. Если $\pi_{|N}(N) = E(S)$, то $\pi_{|N}$ — эпиморфизм. Тогда для некоторого ненулевого подмодуля $S'$ модуля $N$ имеем $N = \mathrm{Ker}(\pi_{|N}) \oplus S'$ и $N_0 \subset \mathrm{Ker}(\pi_{|N})$. □

**Лемма 1.4.** *Пусть $M$ — $I_0^*$-модуль. Тогда*

1) *если $M$ несингулярный и $J(M) = 0$, то каждый простой подмодуль модуля $M$ является $M$-инъективным,*
2) *если $S$ — простой подмодуль модуля $M$ и $S \subset J(M)$, то $M = M_1 \oplus M_2$, где $M_1$, $M_2$ — подмодули модуля $M$ и $M_2$ — однородный непростой модуль, у которого $\mathrm{Soc}(M_2) \cong S$.*

*Доказательство.* 1). Пусть $S$ — простой подмодуль модуля $M$, $E_M(S)$ — инъективная оболочка модуля $S$ в категории $\sigma(M)$ и $f \in \mathrm{Hom}(M, E_M(S))$ — ненулевой гомоморфизм. Так как $M$ – несингулярный модуль, то $\mathrm{Ker}(f)$ — несущественный подмодуль модуля $M$. Поскольку $M$ — $I_0^*$-модуль, то $M = M_1 \oplus M_2$, где $M_1$, $M_2$ — подмодули модуля $M$, $\mathrm{Ker}(f) \subset M_1$ и $M_2 \neq 0$. Так как $E_M(S)$ — неразложимый модуль, то $\mathrm{Ker}(f) = M_1$ и поскольку $J(M) = 0$, модуль $M_2$ является простым. Таким образом, для каждого гомоморфизма $f$ из $\mathrm{Hom}(M, E_M(S))$ имеет место включение $f(M) \subset S$. С другой стороны, согласно ([16], 16.3) $E_M(S) = \mathrm{Hom}(M, E_M(S))M$. Следовательно, $S = E_M(S)$.

2). Пусть $M_0$ — дополнение по пересечению подмодуля $S$ в модуле $M$. Так как $M$ — $I_0^*$-модуль, то для некоторых подмодулей $M_1$, $M_2$ модуля $M$ имеет место равенство $M = M_1 \oplus M_2$, где $M_0 \subset M_1$ и $M_2 \neq 0$. Пусть $\pi$ — проекция на второе прямое слагаемое относительно разложения $M = M_1 \oplus M_2$. Поскольку подмодуль $M_0 + S$ существен в $M$ и $S \subset J(M)$, то $\pi(S) \neq 0$, $\mathrm{Soc}(M_2) = \pi(S)$ и $M_2$ — непростой однородный модуль. □

**Лемма 1.5.** *Для полупримитивного кольца $R$, у которого правый цоколь существен, следующие условия эквивалентны*:

1) *$R$ — правое $I_0^*$-кольцо,*
2) *каждый простой проективный правый $R$-модуль является инъективным.*

*Доказательство.* 1)⇒2). Импликация непосредственно следует из леммы 1.4.

2)⇒1). Доказательство аналогично доказательству леммы 1.3. □

**Лемма 1.6.** *Для регулярного кольца $R$ следующие условия эквивалентны*:

1) *$R$ — полуартиново кольцо, над которым каждый правый модуль является $I_0^*$- модулем,*
2) *над кольцом $R$ каждый правый модуль является $I_0$-модулем,*
3) *$R$ — правое $SV$-кольцо.*

*Доказательство.* Эквивалентность 2)⇔3) следует из ([3], теорема 3.7). Импликация 3)⇒1) следует из леммы 1.3.

1)⇒3). Импликация следует из леммы 1.5 и ([3], лемма 1.1). □

Модуль $M$ называется max-модулем, если каждый ненулевой модуль из категории $\sigma(M)$ обладает максимальным подмодулем. Аналогично доказательству ([17], теорема 1) получается

**Лемма 1.7.** *Пусть $M$ — правый $R$-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *$M$ — max-модуль,*
2) *если $S$ — простой модуль из $\sigma(M)$, то каждый ненулевой подмодуль инъективной оболочки модуля $S$ в категории $\sigma(M)$ содержит максимальный подмодуль,*
3) *каждый ненулевой подмодуль однородного модуля из $\sigma(M)$ содержит максимальный подмодуль.*

Непосредственно доказывается

**Лемма 1.8.** *Пусть $M$ — правый $R$-модуль. Если $M$ — max-модуль, то для каждого модуля $N$ из категории $\sigma(M)$ следующие условия эквивалентны*:

1) *$N$ — полупростой модуль,*
2) *каждый максимальный подмодуль в $N$ несуществен.*

Если $A$, $B$ — подмодули соответственно правых $R$-модулей $M$, $N$ и $f : A \to B$ — гомоморфизм модулей, то через $\langle f \rangle$ будем обозначать подмодуль модуля $M \oplus N$ вида $\{m + f(m) | m \in M\}$.

**Лемма 1.9.** *Пусть $M$ — правый $R$-модуль. Тогда*

1) *если в категории $\sigma(M)$ прямая сумма $I_0^*$-модуля и полупростого модуля является $I_0^*$-модулем, то $M$ — max-модуль,*
2) *если в категории $\sigma(M)$ прямая сумма двух однородных модулей является $I_0^*$-модулем, то каждый однородный модуль в категории $\sigma(M)$ имеет длину не больше двух.*

*Доказательство.* 1). В силу леммы 1.7 достаточно показать, что каждый однородный модуль, у которого цоколь ненулевой, обладает максимальным подмодулем. Предположим противное. Тогда существует радикальный однородный правый $R$-модуль $N$, у которого

$\mathrm{Soc}(N) \neq 0$. Пусть $n$ — элемент модуля $M$, который не принадлежит $\mathrm{Soc}(N)$, и $N_0$ — максимальный подмодуль модуля $nR$. Из условия леммы следует, что модуль $N \oplus nR/N_0$ является $I_0^*$-модулем. Пусть $f : nR \to nR/N_0$ — канонический гомоморфизм. Так как $\langle f\rangle \cap nR/N_0 = 0$, то для некоторого собственного подмодуля $F$ модуля $M$ имеем $N \oplus nR/N_0 = F \oplus T$, $\langle f\rangle \subset F$, где $T$ — подмодуль модуля $N \oplus nR/N_0$. Так как $\langle f\rangle \cap N$ существен в $J(N \oplus nR/N_0) = N$ и $\langle f\rangle \subset F$, то $J(T) = 0$ и, следовательно, $J(N \oplus nR/N_0) = J(F)$. Так как $n + f(n) \in F$ и $n \in J(N) \subset F$, то $f(n)R = nR/N_0 \subset F$. Тогда $F$ — существенный подмодуль модуля $N \oplus nR/N_0$ и, следовательно, $F = N \oplus nR/N_0$, что противоречит выбору $F$.

Утверждение 2) следует из леммы 1.2 и ([12], 13.1). □

**Теорема 1.1.** *Пусть $M$ — правый $R$-модуль. Если в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является $I_0^*$-модулем, то радикал Джекобсона каждого модуля из категории $\sigma(M)$ является полупростым.*

*Доказательство.* Достаточно показать, что радикал Джекобсона каждого инъективного модуля из категории $\sigma(M)$ является полупростым. Предположим, что существует инъективный модуль $N$ из категории $\sigma(M)$, у которого радикал Джекобсона не является полупростым. Без ограничения общности можно считать, что $J(N)$ существен в $N$. Из лемм 1.8 и 1.9 следует, что модуль $J(N)$ содержит максимальный существенный подмодуль. Обозначим его через $N_0$. Пусть $f : J(N) \to J(N)/N_0$ — канонический гомоморфизм и $N' = N \oplus J(N)/N_0$. Так как $\langle f\rangle \cap J(N)/N_0 = 0$, то для некоторого собственного подмодуля $F$ модуля $N'$ имеем $N' = F \oplus T$, $\langle f\rangle \subset F$, где $T$ — подмодуль модуля $N'$. Так как $J(N') \cap \langle f\rangle$ существен в $J(N')$, то $J(T) = 0$. Пусть $n \in J(N) \setminus N_0$. Поскольку $n + f(n) \in F$ и $n \in J(N) \subset F$, то $f(n)R = J(N)/N_0 \subset F$. Следовательно, $F$ — существенный подмодуль модуля $N'$, что противоречит выбору $F$. □

**Теорема 1.2.** *Для полурегулярного полуартинового кольца $R$ следующие условия эквивалентны*:

1) *каждый правый $R$-модуль является $I_0^*$- модулем,*
2) *в кольце $R$ существует независимое семейство правых идеалов $(A_i)_{i\in I}$, удовлетворяющее условиям*
   a) *для каждого $i$ $A_i$ — локальный инъективный модуль длины два,*
   b) *$J(R) \subset \underset{i\in I}{\oplus} A_i$,*
   c) *$R/J(R)$ — правое $SV$-кольцо.*

*Доказательство.* 1)⇒2). В силу леммы 1.6 $R/J(R)$ — правое $SV$-кольцо. Из леммы Цорна следует существование максимального независимого семейства локальных инъективных подмодулей длины два $(A_i)_{i\in I}$ модуля $R_R$. Предположим, что $J(R) \nsubseteq \underset{i\in I}{\oplus} A_i$. Так как согласно теореме 1.1 $J(R)_R$ — полупростой модуль, то для некоторого простого подмодуля $S_0$ модуля $J(R)_R$ имеем $S_0 \cap \underset{i\in I}{\oplus} A_i = 0$. Если $A$ — дополнение по пересечению к подмодулю $S_0$ в модуле $R_R$, которое содержит подмодуль $\underset{i\in I}{\oplus} A_i$, то $R_R = A' \oplus B$, где $A'$ — правый идеал кольца $R$, который содержит $A$, $B$ — однородный не простой модуль, у которого $\mathrm{Soc}(B) \cong S_0$. Согласно лемме 1.9 $B$ — локальный инъективный модуль длины два. Получили противоречие с выбором семейства подмодулей $(A_i)_{i\in I}$. Следовательно, $J(R) \subset \oplus_{i\in I} A_i$.

2)⇒1). Пусть $S$ — простой правый $R$-модуль. Если $E(S)J(R) = 0$, то $E(S) = S$. Если $E(S)J(R) \neq 0$, то $S \cong S'$ для некоторого простого подмодуля $S'$ модуля $\underset{i\in I}{\oplus} A_i$. Следовательно, $E(S) = A_{i_0}$ для некоторого $i_0 \in I$. Таким образом, инъективная оболочка каждого простого правого $R$-модуля является либо простой, либо локальным проективным модулем длины два. Тогда из леммы 1.3 следует, что каждый правый $R$-модуль является $I_0^*$-модулем. □

Из предыдущей теоремы и ([3], следствие 1.3) непосредственно получается

**Следствие 1.1.** Для полуартинового нормального кольца $R$ следующие условия эквивалентны:

1) каждый правый $R$-модуль является $I_0^*$-модулем,
2) в кольце $R$ существует независимое семейство правых идеалов $(A_i)_{i\in I}$, удовлетворяющее условиям
   a) для каждого $i$ $A_i$ — локальный инъективный модуль длины два,
   b) $J(R) \subset \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$.

**Пример 1.1.** Существует коммутативное кольцо $R$ с условиями

1) над кольцом $R$ каждый модуль является $I_0^*$-модулем,
2) $R$ не является обобщенным $SV$-кольцом.

*Доказательство.* Пусть $S$ — алгебра дуальных чисел над полем вещественных чисел, $T = \prod\limits_{i\geq 1} S_i$, где $S = S_i$ для каждого $i$, и $R = \{a \in T \mid \exists N\ \forall i,j > N \quad a_i = a_j,\ a_i \in \mathbb{R}\}$. Несложно заметить, что кольцо $R$ удовлетворяет условиям 2) следствия 1.1 и $I(T) = 0$. Следовательно, согласно ([5], теорема 1) $R$ не является обобщенным $SV$-кольцом и над кольцом $R$ каждый модуль является $I_0^*$-модулем. □

## 2. Кольца, над которыми каждый модуль является одновременно $I_0^*$-модулем и $I_0$-модулем

Следующий пример показывает, что существует обобщенное $SV$-кольцо $R$, у которого фактор-кольцо $R/SI(R)$ не является артиновым полуцепным. Таким образом, условия 1) и 2) открытого вопроса из работы [5] не являются эквивалентными.

**Пример 2.1.** Существует обобщенное справа $SV$-кольцо $R$, у которого фактор-кольцо $R/SI(R)$ не является артиновым.

*Доказательство.* Рассмотрим бесконечномерное векторное пространство $M$ над некоторым полем $P$. Пусть $I = \{f \in \mathrm{End}_P(M) \mid \dim(\mathrm{Jm}(f)) < \infty\}$ и $S = P + I$. Хорошо известно, что $S$ — правое $SV$-кольцо, которое не является левым $V$-кольцом. Покажем, что кольцо обобщенных матриц $R = \left(\begin{smallmatrix} S & {}_SM_P \\ 0 & P \end{smallmatrix}\right)$ является обобщенным справа $SV$-кольцом, удовлетворяющим условию $SI(R) = 0$. Пусть $(v_i)_{i\in I}$ — базис векторного пространства $M_P$ и $e_i$ — проекция на подпространство $v_iP$ относительно разложения $M = \bigoplus\limits_{i\in I} v_iP$. Несложно заметить, что $\mathrm{Soc}(S) = \bigoplus\limits_{i\in I} e_iS$

Так как $e_iS = e_i\,\mathrm{End}_P(M) = \mathrm{Hom}_P(M, e_iM)$, то из ([18], следствие 5.5) вытекает, что для каждого $i \in I$ правый $R$-модуль $L_i = (e_iS, e_iM)$ является инъективным. Ради полноты изложения приведем непосредственные вычисления, показывающие инъективность модуля $L_i$ для каждого $i \in I$. Будем придерживаться терминологии и обозначений из работы [18]. Пусть $(A, B)$ — правый $R$-модуль, $(A_0, B_0)$ — его подмодуль и $(f_1, f_2)$ — гомоморфизм из модуля $(A_0, B_0)$ в модуль $L_i$. Рассмотрим произвольное продолжение $g_2 : B \to e_iM$ линейного отображения $f_2$ на векторное пространство $B$. Пусть $\phi : A \to \mathrm{Hom}_P(M, B)$ — гомоморфизм модульного умножения модуля $(A, B)$, действующий по правилу $a \mapsto (m \mapsto am)$ и

$F:(A,B)\to L_i$ — отображение, действующее по правилу $F((a,b))=(g_2\phi(a),g_2(b))$. Ясно, что $\phi_{|A_0}:A_0\to \mathrm{Hom}_P(M,B_0)$ — гомоморфизм модульного умножения модуля $(A_0,B_0)$. Так как при $\Omega(m)=\left(\begin{smallmatrix}0&m\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ $F((a,b))=F((0,am)\Omega(m))=(0,g_2(am))=(0,g_2\phi(a)m)=(g_2\phi(a),g_2(b))\Omega(m)=F((a,b))\Omega(m)$, то $F$ — $R$-гомоморфизм. Поскольку $f_2\phi_{|A_0}(a_0)(m)=f_2(a_0m)=f_1(a_0)m$ для каждого $m\in M$ и каждого $a_0\in A_0$, то $f_2\phi_{|A_0}(a_0)=f_1(a_0)$. Следовательно, $F((a_0,b_0))=(g_2\phi(a_0),g_2(b_0))=(f_2\phi_{|A_0}(a_0),f_2(b_0))=(f_1(a_0),f_2(b_0))$ для каждой упорядоченной пары $(a_0,b_0)\in(A_0,B_0)$. Таким образом, $F_{|(A_0,B_0)}=(f_1,f_2)$.

Покажем, что $S_i=L_i/J(L_i)$ является простым инъективным модулем для каждого $i\in I$. Предположим $E(S_i)\neq S_i$ для некоторого $i\in I$. Тогда $S_i\subset J(E(S_i))$. Так как $R/J(R)\cong S\times P$ — правое $V$-кольцо, то $S_i\subset J(E(S_i))=E(S_i)J(R)$ и, следовательно, $S_i$ изоморфно простому подмодулю полупростого модуля $J(R)_R$. Таким образом, $S_i\cong\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&P\end{smallmatrix}\right)$. С другой стороны, $S_i\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)=0$ и $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&P\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\neq 0$. Полученное противоречие показывает, что $E(S_i)=S_i$ для каждого $i\in I$. Аналогичными рассуждениями можно показать инъективность простого правого $R$-модуля вида $\left(\begin{smallmatrix}S&{}_SM_P\\0&P\end{smallmatrix}\right)/\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{Soc}(S)&{}_SM_P\\0&P\end{smallmatrix}\right)$. Таким образом, $I_1(R)=\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{Soc}(S)&{}_SM_P\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $I(R)=I_2(R)=\left(\begin{smallmatrix}S&{}_SM_P\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $R/I(R)\cong P$ и из ([5], теорема 1) следует, что $R$ — обобщенное справа $SV$-кольцо. Также несложно заметить, что $SI(R)=0$. □

Кольцо $R$ назовем *обобщенным справа $SV$-кольцом типа* I, если $R/SI(R)$ является артиновым полуцепным кольцом, у которого $J^2(R/SI(R))=0$, и типа II, если кольцо $R$ удовлетворяет условию примера 2.1. Из ([1], теорема 2.2) следует, что кольцо, над которым каждый модуль является $I_0$-модулем, является обобщенным справа $SV$-кольцом типа I.

**Лемма 2.1.** *Пусть $R$ — обобщенное справа $SV$-кольцо. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *$R$ — обобщенное справа $SV$-кольцо типа* I,
2) *прямая сумма всякого семейства локальных правых $R$-модулей длины два является инъективным модулем,*
3) *прямая сумма всякого семейства попарно изоморфных локальных правых $R$-модулей длины два является инъективным модулем.*

*Доказательство.* 1)⇒2). Пусть $(M_i)_{i\in I}$ — семейство локальных модулей длины два. Согласно ([2], лемма 4) $M_i$ — инъективный модуль для каждого $i\in I$. Так как $R/SI(R)$ — артиново кольцо и $E\Big(\bigoplus_{i\in I}M_i\Big)SI(R)=0$, то $E\Big(\bigoplus_{i\in I}M_i\Big)=\bigoplus_{i\in I}M_i$.

2)⇒3) очевидно.

3)⇒1). Пусть кольцо $R$ удовлетворяет условию 3). Если $\overline{R}=R/SI(R)$ не является артиновым кольцом, то из ([3], лемма 1.1 и [4], лемма 2.4) следует, что модуль $\overline{R}_R$ содержит бесконечное независимое семейство попарно изоморфных локальных $R$-модулей длины два, что противоречит условию (3). Таким образом, $R$ — обобщенное справа $SV$-кольцо типа I. □

**Лемма 2.2.** *Пусть $R$ — кольцо формальных верхнетреугольных матриц $\left(\begin{smallmatrix}T&M\\0&S\end{smallmatrix}\right)$, где*

a) *$S$ — правое $SV$-кольцо,*
b) *для некоторого идеала $I$ кольца $S$ выполнены условия $MI=0$ и $S/I$ классически полупросто,*
c) *кольцо $\begin{pmatrix}T&M\\0&S/I\end{pmatrix}$ является артиновым полуцепным, у которого квадрат радикала Джекобсона равен нулю.*

*Тогда над кольцом $R$ каждый правый модуль является одновременно $I_0^*$-модулем и $I_0$-модулем.*

*Доказательство.* Покажем, что над кольцом $R$ каждый правый модуль является $I_0$-модулем. Достаточно выяснить, что $I' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right) \subset SI(R)$. Покажем, что для каждого ординала $\alpha$ модуль $\operatorname{Soc}_{\alpha+1}(I')/\operatorname{Soc}_\alpha(I')$ является прямой суммой простых инъективных $R/\operatorname{Soc}_\alpha(I')$-модулей. В силу естественного изоморфизма колец $R/\operatorname{Soc}_\alpha(I') \cong R' = \begin{pmatrix} T & M \\ 0 & S/\operatorname{Soc}_\alpha(I) \end{pmatrix}$ достаточно доказать, что правый $R'$-модуль $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{Soc}_{\alpha+1}(I)/\operatorname{Soc}_\alpha(I) \end{pmatrix}$ является прямой суммой простых инъективных правых $R'$-модулей. Пусть $N$ — простой подмодуль из $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{Soc}_{\alpha+1}(I)/\operatorname{Soc}_\alpha(I) \end{pmatrix}$. Если $E(N)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$, то для некоторого элемента $r \in R'$ имеем

$$E(N)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) rR'N = N.$$

С другой стороны, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) rR'N \subset \left(\begin{smallmatrix} T & M \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I/\operatorname{Soc}_\alpha(I) \end{pmatrix} = 0$. Полученное противоречие показывает, что модуль $E(N)$ можем рассматривать как модуль над кольцом $R'/\left(\begin{smallmatrix} T & M \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Тогда в силу условий исходной леммы $E(N) = N$. Таким образом, модуль $\operatorname{Soc}_{\alpha+1}(I')/\operatorname{Soc}_\alpha(I')$ является прямой суммой простых инъективных $R/\operatorname{Soc}_\alpha(I')$-модулей. Из ([3], лемма 1.1) следует, что для каждого ординала $\alpha$ модуль $\operatorname{Soc}_{\alpha+1}(I')/\operatorname{Soc}_\alpha(I')$ является прямой суммой простых инъективных $R$-модулей и, значит, $I' \subset SI(R)$. Тот факт, что над кольцом $R$ каждый правый модуль является $I_0^*$-модулем, вытекает из теоремы 1.2. □

**Теорема 2.1.** *Для кольца $R$ следующие условия эквивалентны:*

1) *$R$ — полурегулярное обобщенное справа $SV$-кольцо типа* I, *над которым каждый правый модуль является $I_0^*$-модулем,*
2) *над кольцом $R$ каждый правый модуль является прямой суммой инъективного модуля и $SV$-модуля,*
3) *кольцо $R$ изоморфно кольцу формальных верхнетреугольных матриц $\left(\begin{smallmatrix} T & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$, где*
   a) *$S$ — правое $SV$-кольцо,*
   b) *для некоторого идеала $I$ кольца $S$ выполнены условия $MI = 0$ и $S/I$ классически полупросто,*
   c) *кольцо $\begin{pmatrix} T & M \\ 0 & S/I \end{pmatrix}$ является артиновым полуцепным, у которого квадрат радикала Джекобсона равен нулю.*

*Доказательство.* 1)⇒2). Пусть $M$ — произвольный правый $R$-модуль и $(M_i)_{i\in I}$ — максимальное независимое семейство локальных подмодулей модуля $M$ длины два. Из леммы 2.1 следует, что для некоторого подмодуля $M_0$ модуля $M$ имеет место равенство $M = (\bigoplus_{i\in I} M_i) \oplus M_0$. Если $J(M_0) \neq 0$, то из полуартиновости кольца $R$, лемм 1.4 и 1.9 вытекает существование локального подмодуля длины два в модуле $M_0$, что противоречит максимальности семейства $(M_i)_{i\in I}$. Так как согласно лемме 1.6 $R/J(R)$ — $SV$-кольцо и $M_0J(R) = 0$, то $M_0$ — $SV$-модуль.

2)⇒1). Предположим, что кольцо $R$ удовлетворяет условию 2). Если $R$ не является полуартиновым справа, то из условия 2) следует, что над кольцом $R$ найдется ненулевой инъективный правый модуль $M$, у которого каждый подмодуль инъективен и $\operatorname{Soc}(M) = 0$, что невозможно. Таким образом, $R$ — полуартиново справа кольцо и из условия 2) имеем, что инъективная оболочка каждого простого правого $R$-модуля является локальным модулем длины не больше двух. Значит, из условия 2) и ([19], теорема 3.2) следует равенство $R = eR \oplus (1-e)R$, где $e$ — идемпотент кольца $R$, $eR$ — конечная прямая сумма инъективных локальных правых $R$-модулей длины не больше двух и $(1-e)R$ — $SV$-модуль. Так как согласно ([16], 23.4) прямая сумма $V$-модулей является $V$-модулем, то $R/J(R)$ — правое $SV$-кольцо. Тогда $R$ — полурегулярное кольцо и в силу теоремы 1.2 над кольцом $R$

каждый правый $R$-модуль является $I_0^*$-модулем. Предположим, что кольцо $\overline{R} = R/SI(R)$ не является артиновым полуцепным. Тогда имеет место равенство $\overline{R} = f\overline{R} \oplus (1-f)\overline{R}$, где $f$ — идемпотент кольца $\overline{R}$, $f\overline{R}$ — конечная прямая сумма инъективных локальных правых $\overline{R}$-модулей длины не больше двух и $(1-f)\overline{R}$ — неполупростой $SV$-модуль, который согласно ([3], лемма 1.1) не содержит простых инъективных подмодулей. Тогда правый идеал $f\overline{R}$ кольца $\overline{R}$ содержит бесконечное семейство ортогональных примитивных идемпотентов $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ и из условия 2) следует, что прямая сумма $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} E(f_i\overline{R})$ локальных модулей длины два является инъективным модулем. Следовательно, существует гомоморфизм из модуля $\overline{R}_{\overline{R}}$ в модуль $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} E(f_i\overline{R})$, который тождественно действует на подмодуле $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} f_i\overline{R}$, что, очевидно, невозможно. Полученное противоречие показывает, что кольцо $R/SI(R)$ является артиновым полуцепным, у которого $J^2(R/SI(R)) = 0$. Таким образом, $R$ — обобщенное справа $SV$-кольцо типа I.

1)⇒3). Так как $SI(R) \cap J(R) = 0$ и $\lg(R_R/SI(R)) < \infty$, то модуль $J(R_R)$ имеет конечную длину и из теоремы 1.2 вытекает существование такого идемпотента $e \in R$, что $eR$ — прямая сумма локальных инъективных модулей длины два и $J((1-e)R) = 0$. Поскольку $\mathrm{Hom}(eR, (1-e)R) = 0$, то $(1-e)Re = 0$. Несложно заметить, что $eSI(R) = 0$. Значит, $SI(R) \subset (1-e)R(1-e)$. Поскольку согласно теореме 1.2 $R/J(R)$ — $SV$-кольцо, то $(1-e)R$ — $SV$-модуль и из ([1], теорема 3.8) следует $(1-e)R(1-e)$ — $SV$-кольцо.

3)⇒1). Импликация вытекает из леммы 2.2. □

**Замечание.** Из предыдущих результатов следует, что кольцо $R$ из примера 2.1 является обобщенным справа $SV$-кольцом, над которым каждый правый модуль является $I_0^*$-модулем, и для кольца $R$ не выполнено условие 2) из теоремы 2.1.

**Следствие 2.1.** Для кольца $R$ следующие условия эквивалентны:

1) $R$ — полурегулярное обобщенное $SV$-кольцо, над которым каждый правый модуль является $I_0^*$-модулем,
2) $R$ —кольцо, у которого каждый примитивный образ артинов, и над кольцом $R$ каждый правый модуль является прямой суммой инъективного модуля и $SV$-модуля,
3) кольцо $R$ изоморфно кольцу формальных верхнетреугольных матриц $\left(\begin{smallmatrix} T & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$, где
   a) $S$ — $SV$-кольцо,
   b) для некоторого идеала $I$ кольца $S$ выполнены условия $MI = 0$ и $S/I$ классически полупросто,
   c) кольцо $\begin{pmatrix} T & M \\ 0 & S/I \end{pmatrix}$ является артиновым полуцепным, у которого квадрат радикала Джекобсона равен нулю.

*Доказательство.* Эквивалентность 1)⇔2) следует из теоремы 2.1 и ([1], теорема 2.2).

1)⇒3). Согласно теореме 2.1 кольцо $R$ изоморфно кольцу верхнетреугольных матриц $\left(\begin{smallmatrix} T & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$, удовлетворяющему условиям 3) теоремы 2.1. Так как согласно ([1], теорема 2.2) у кольца $R$ каждый примитивный образ артинов, то у кольца $S$ каждый примитивный образ также является артиновым и, значит, согласно ([20], теорема 2.7) $S$ — $SV$-кольцо.

3)⇒1). В силу леммы 2.2 достаточно показать, что $R' = \left(\begin{smallmatrix} T & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ — обобщенное $SV$-кольцо. Ясно, что $I' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right)$ — идеал кольца $\left(\begin{smallmatrix} T & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$. Так как $S$ — $SV$-кольцо, то из ([1], теорема 3.11) следует существование в кольце $R'$ для некоторого ординала $\alpha$ семейства идеалов $(I_\beta)_{\beta<\alpha}$, удовлетворяющего условиям $I' = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} I_\beta$, $I_\beta \subset I_\gamma$, если $\beta < \gamma < \alpha$, и $I_{\alpha+1}/I_\alpha$ — прямая сумма полных матричных колец конечного порядка над телами. Тогда из условия 3 c) теоремы 2.1

следует, что каждый примитивный образ кольца $R'$ является артиновым. Значит, согласно ([1], теорема 2.2) $R'$ — обобщенное $SV$-кольцо. $\square$

**Теорема 2.2.** *Для кольца $R$ следующие условия эквивалентны*:

1) *$R$ — полурегулярное кольцо, над которым каждый модуль является одновременно $I_0$-модулем и $I_0^*$-модулем,*
2) *над кольцом $R$ каждый модуль является прямой суммой инъективного модуля и $SV$-модуля,*
3) *$R$ — прямое произведение $SV$-кольца и артинового полуцепного кольца, у которого квадрат радикала Джекобсона равен нулю.*

*Доказательство.* Эквивалентность 1)⇔2) следует из теоремы 2.1.

Импликация 3)⇒1) проверяется непосредственно.

1)⇒3). Согласно теореме 2.1 кольцо $R$ изоморфно кольцу формальных верхнетреугольных матриц $R' = \left(\begin{smallmatrix} T & M \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$, удовлетворяющему условиям 3) теоремы 2.1. Из доказательства импликации 2)⇒1) теоремы 2.1 следует, что $J(R')$ содержится в конечной прямой сумме инъективных локальных левых $R'$-модулей длины два и, значит, $M' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = J\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} R'e'_i\Big)$, где $e'_1, \ldots, e'_n$ — ортогональные примитивные идемпотенты и $R'e'_i$ — локальный инъективный модуль длины два для каждого $1 \le i \le n$. Для произвольного $1 \le i \le n$ идемпотент $e'_i$ имеет вид $\begin{pmatrix} f_i & m_i \\ 0 & e_i \end{pmatrix}$, где $f_i, e_i$ — идемпотенты соответственно колец $T$ и $S$. Так как $J(R')\begin{pmatrix} f_i & m_i \\ 0 & e_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(T)f_i & Me_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — простой подмодуль модуля $M'$, то $e_i \ne 0$. Поскольку $e'_i + J(R')$ — примитивный идемпотент в $R'/J(R')$, то $f_i = 0$. Таким образом, без ограничения общности можем считать, что $e'_i = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_i \end{smallmatrix}\right)$, где $e_i$ — примитивный идемпотент кольца $S$. Поскольку $M = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} Me_i$ — разложение полупростого левого $T$-модуля в прямую сумму простых подмодулей, то $M\Big(1 - \sum\limits_{i=1}^{n} e_i\Big) = 0$. Если для некоторого примитивного идемпотента $e$ кольца $S$ выполнено условие $eS \cong e_iS$, где $1 \le i \le n$, то несложно заметить, что $Me \ne 0$. Поэтому правые идеалы $\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} e_i\Big)S$ и $\Big(1 - \sum\limits_{i=1}^{n} e_i\Big)S$ кольца $S$ не содержат изоморфных простых правых $R$-подмодулей. Следовательно, $e = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$ — центральный идемпотент кольца $S$ и кольцо $R$ изоморфно прямому произведению $SV$-кольца $(1-e)S$ и артинового полуцепного кольца $\left(\begin{smallmatrix} T & M \\ 0 & eS \end{smallmatrix}\right)$, у которого квадрат радикала Джекобсона равен нулю. $\square$

**Лемма 2.3.** *Пусть $M$ — квазипроективный модуль, у которого* $\mathrm{Soc}(M)$ *существен и* $J(M) = 0$. *Если* $\mathrm{Soc}(M)$ *является дистрибутивным модулем, то* $\mathrm{End}(M)$ *— нормальное кольцо. В частности, полупримитивное полуартиново кольцо, у которого каждый примитивный идемпотент централен, является нормальным.*

*Доказательство.* Достаточно показать, что для каждого идемпотента $f$ кольца $\mathrm{End}(M)$ выполнено равенство $f\,\mathrm{End}(M)(1-f) = 0$. Пусть $f$ — идемпотент кольца $\mathrm{End}(M)$, отличный от 0 и 1. Если $(1-f)\,\mathrm{End}(M)f \ne 0$, то из условия леммы следует существование ненулевого гомоморфизма из $fM$ в простой подмодуль $S$ модуля $(1-f)M$. Так как $S$ — проективный модуль в категории $\sigma(M)$ и $\mathrm{Soc}(fM)$ существен в $fM$, то $S$ изоморфен некоторому подмодулю модуля $fM$, что противоречит условию исходной леммы. $\square$

**Лемма 2.4.** *Пусть $R$ — полуартиново кольцо без бесконечного множества ортогональных нецентральных идемпотентов. Тогда*

1) *если $J(R)$=0, то $R$ — прямое произведение классически полупростого кольца и нормального кольца,*
2) *$R$ — полурегулярное кольцо.*

*Доказательство.* 1). Из условия исходной леммы следует существование в кольце $R$ конечного семейства примитивных ортогональных идемпотентов $\{e_i\}_{i=1}^n$ таких, что в правом идеале $\mathrm{Soc}\left(\left(1-\sum\limits_{i=1}^n e_i\right)R\right)$ каждый примитивный идемпотент является центральным. Так как у модулей $\left(1-\sum\limits_{i=1}^n e_i\right)R$ и $\sum\limits_{i=1}^n e_iR$ нет изоморфных простых подмодулей, то идемпотент $\sum\limits_{i=1}^n e_i$ является центральным и утверждение пункта следует из леммы 2.3.

2) непосредственно следует из п. 1). □

**Теорема 2.3.** *Для кольца $R$ без бесконечного множества ортогональных нецентральных идемпотентов следующие условия эквивалентны*:

1) *над кольцом $R$ каждый правый модуль является одновременно $I_0^*$-модулем и $I_0$-модулем,*
2) *над кольцом $R$ каждый правый модуль является прямой суммой инъективного модуля и $SV$-модуля.*
3) *кольцо $R$ изоморфно кольцу верхнетреугольных матриц $\left(\begin{smallmatrix} T & M \\ 0 & S\end{smallmatrix}\right)$, где*
   a) *$S$ — полуартиново нормальное регулярное кольцо,*
   b) *для некоторого идеала $I$ кольца $S$ выполнены условия $MI = 0$ и $S/I$ классически полупросто,*
   c) *кольцо $\begin{pmatrix} T & M \\ 0 & S/I\end{pmatrix}$ является артиновым полуцепным, у которого квадрат радикала Джекобсона равен нулю.*

*Доказательство.* Эквивалентность 1)⇔2) вытекает из теоремы 2.1, леммы 2.4 и ([9], теорема 2).

1)⇒3). Из доказательства импликации 2)⇒1) теоремы 2.1 следует, что $R$ — полуартиново кольцо и для некоторого конечного семейства $(A_i)_{i\in I}$ инъективных подмодулей длины два модуля $R_R$ имеет место равенство $R_R = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i \oplus B$, где $B$ — подмодуль модуля $R_R$, у которого $J(B) = 0$. Так как $R$ — кольцо без бесконечных множеств ортогональных нецентральных идемпотентов, то для модуля $B$ существует разложение вида $B = C \oplus D$, где $C$ — полупростой подмодуль модуля $B$ конечной длины, не содержащий центральных примитивных идемпотентов, а $D$ — подмодуль модуля $B$, у которого каждый примитивный идемпотент является центральным. Пусть $e$ — такой идемпотент кольца $R$, что $eR = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i \oplus C$ и $(1-e)R = D$. Ясно, что $(1-e)Re = 0$. В силу леммы 2.3 $(1-e)R(1-e)$ является нормальным кольцом. Обозначим через $I$ наибольший абелево-регулярный идеал кольца $R$. Согласно ([4], теорема 4.2) $R/I$ является артиновым полуцепным, у которого квадрат радикала Джекобсона равен нулю. Из ([4], теорема 4.2) следует, что каждый простой подфактор модуля $I_R$ является инъективным. Значит, $eI = 0$ и $I \subset (1-e)R = (1-e)R(1-e)$.

3)⇒1) вытекает из леммы 2.2 и ([3], следствие 1.5). □

Аналогично доказательству теоремы 2.2 обосновывается

**Следствие 2.2.** Для кольца $R$ без бесконечного множества ортогональных нецентральных идемпотентов следующие условия эквивалентны:

1) над кольцом $R$ каждый модуль является одновременно $I_0^*$-модулем и $I_0$-модулем,

2) над кольцом $R$ каждый модуль является прямой суммой инъективного модуля и $SV$-модуля,
3) $R$ — прямое произведение нормального регулярного полуартинового кольца и артинового полуцепного кольца, у которого квадрат радикала Джекобсона равен нулю.

**Пример 2.2.** Существует кольцо $R$, удовлетворяющее следующим условиям:
1) $R$ — обобщенное $SV$-кольцо, над которым каждый правый модуль является $I_0^*$-модулем,
2) над кольцом $R$ существует левый модуль, который не является $I_0^*$-модулем.

*Доказательство.* Пусть $P$ — некоторое поле, $R = \prod\limits_{i\geq 1} P_i$, где $P = P_i$ для каждого $i$, $S = \{a \in R \mid \exists N\ \forall i,j > N\ a_i = a_j\}$ и ${}_PP_S$ — $P$-$S$-бимодуль, у которого умножение слева на элементы из $P$ совпадает с умножением в поле $P$, а умножение справа определяется правилом $p(1_Rp' + s_0) = pp'$, где $s_0 \in \mathrm{Soc}(S) = \bigoplus\limits_{i\geq 1} P_i$. Несложно заметить, что кольцо $R' = \left(\begin{smallmatrix} P & {}_PP_S \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ удовлетворяет условиям леммы 2.2. Значит, $R'$ — обобщенное $SV$-кольцо, над которым каждый правый модуль является $I_0^*$-модулем. Подмодуль $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & P \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ модуля ${}_{R'}R'$ является простым и $M \nsubseteq J(R'e) = 0$ для каждого примитивного идемпотента $e$ кольца $R'$. Тогда из теоремы 1.2 следует, что над кольцом $R'$ не каждый левый модуль является $I_0^*$-модулем. □

## 3. Слабо бэровские модули

Далее будем придерживаться следующих обозначений. Пусть $A$ — подмножество кольца $R$. Тогда через $l(A)$(соответственно $r(A)$) будем обозначать левый (соответственно правый) аннулятор множества $A$ в кольце $R$. Если $M$ — правый $R$-модуль и $N$ — произвольное подмножество модуля $M$, то через $l(N)$ будем обозначать множество

$$\{f \in \mathrm{End}_R(M) \mid f(N) = 0\}.$$

Модуль $M$ назовем *слабо бэровским модулем*, если каждый ненулевой аннулятор $l(N)$ произвольного подмодуля $N$ модуля $M$ содержит ненулевой идемпотент.

Модуль $M$ называется *$\mathcal{K}$-несингулярным*, если $l(N) = 0$ для каждого существенного подмодуля $N$ модуля $M$. Модуль $M$ называется *$\mathcal{K}$-некосингулярным*, если для каждого подмодуля $N$ модуля $M$ из равенства $l(N) = 0$ следует существенность подмодуля $N$ в модуле $M$. Кольцо $R$ называется *некосингулярным справа*, если модуль $R_R$ является $\mathcal{K}$-некосингулярным, и кольцо $R$ называется *справа Утуми-кольцом*, если $R$ одновременно является несингулярным справа и некосингулярным справа.

Правый $R$-модуль $M$ называется *$\mathcal{T}$-некосингулярным*, если $\mathrm{Hom}_R(M,N) = 0$ для каждого малого подмодуля $N$ модуля $M$. Модуль $M$ называется *$\mathcal{T}$-модулем*, если для каждого немалого подмодуля $N$ модуля $M$ выполнено условие $\mathrm{Hom}_R(M,N) \neq 0$. Назовем модуль $M$ *дуально слабо бэровским*, если каждый подмодуль $N$ модуля $M$, у которого $\mathrm{Hom}_R(M,N) \neq 0$, содержит в себе ненулевое прямое слагаемое модуля $M$.

Следующие два утверждения аналогичны соответственно утверждениям ([21], теорема 2.12; [22], теорема 2.14) и проверяются непосредственно.

**Лемма 3.1.** *Для правого $R$-модуля $M$ следующие условия равносильны*:
1) *$M$ — $\mathcal{K}$-некосингулярный слабо бэровский модуль,*
2) *$M$ — $\mathcal{K}$-антисингулярный $I_0^*$-модуль.*

**Лемма 3.2.** *Для правого $R$-модуля $M$ следующие условия равносильны*:

1) *$M$ — дуально слабо бэровский $\mathcal{T}$-модуль,*
2) *$M$ — $\mathcal{T}$-некосингулярный $I_0$-модуль.*

**Теорема 3.1.** *Для правого $R$-модуля $M$ следующие условия равносильны:*
1) *в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является $I_0^*$-модулем,*
2) *если $N \in \sigma(M)$, то для каждого $f \in \operatorname{End}(N)$, у которого образ несуществен и $l(f) \neq 0$, существует такой ненулевой идемпотент $e \in \operatorname{End}(N)$, что $ef = 0$.*

*Доказательство.* 1)⇒2) очевидно.

2)⇒1). Пусть $N_0$ — несущественный подмодуль модуля $N$. Для каждого $n \in N$ через $\overline{n}$ будем обозначать смежный класс $n + N_0$. Рассмотрим внешнюю прямую сумму модулей $N' = N/N_0 \oplus N \oplus \Big(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} N_i\Big)$, где $N_i = N_0$ для каждого $i \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим гомоморфизмы $f, g \in \operatorname{End}(N')$, действующие по правилам

$$f((\overline{n}, m, n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)) = (\overline{m}, n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots),$$
$$g((\overline{n}, m, n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)) = (\overline{m}, 0, 0, \ldots, 0, \ldots).$$

Несложно заметить, что образ $f$ несуществен в $N'$ и $gf = 0$. Тогда $\operatorname{Jm}(f) = N/N_0 \oplus N_0 \oplus \Big(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} N_i\Big)$ содержится в собственном прямом слагаемом модуля $N'$. Следовательно, $N_0$ содержится в собственном прямом слагаемом модуля $N$. □

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству предыдущей теоремы.

**Теорема 3.2.** *Для правого $R$-модуля $M$ следующие условия равносильны:*
1) *в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является $I_0$-модулем,*
2) *если $N \in \sigma(M)$, то для каждого $f \in \operatorname{End}(N)$, у которого ядро некосущественно и $r(f) \neq 0$, существует такой ненулевой идемпотент $e \in \operatorname{End}(N)$, что $fe = 0$.*

**Следствие 3.1.** Для $V$-модуля $M$ следующие условия равносильны:
1) в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является $I_0$-модулем,
2) если $N \in \sigma(M)$, то $\operatorname{End}(N)$ — слабо бэровское слева кольцо.

Введем для правого $R$-модуля $M$ условие $(*)$:

$$f \operatorname{Hom}_R(M, N) \neq 0 \text{ для каждого подмодуля } N \text{ модуля } M \text{ и каждого ненулевого гомоморфизма } f \in \operatorname{Hom}_R(N, M).$$

**Лемма 3.3.** *Для правого $R$-модуля $M$*
1) *если $M$ — слабо бэровский модуль, то $S = \operatorname{End}_R(M)$ — слабо бэровское справа кольцо,*
2) *если $S = \operatorname{End}_R(M)$ — правое слабо бэровское кольцо и модуль $N$ удовлетворяет условию $(*)$, то $M$ — слабо бэровский модуль.*

*Доказательство.* 1). Пусть $I$ — правый идеал кольца $S$ и $l(I) \neq 0$. Так как $M$ — слабо бэровский модуль, то для некоторого ненулевого идемпотента $e \in S$ имеем $eIM = 0$ и, следовательно, $eI = 0$.

2). Пусть $N$ — подмодуль модуля $M$ и $I = l(N) \neq 0$. Покажем, что $I = \operatorname{lr}(I)$. Если $I \neq \operatorname{lr}(I)$, то для некоторого гомоморфизма $\phi \in S$ имеем $\phi r(I) = 0$ и $\phi(N) \neq 0$. Так как $\operatorname{Hom}_R(M, N) \subset r(I)$, то $\phi \operatorname{Hom}_R(M, N) = 0$ и, значит, в силу условия $(*)$ $\phi(N) = 0$. Полученное противоречие показывает, что $I = \operatorname{lr}(I)$. Поскольку $S = \operatorname{End}_R(M)$ — правое слабо бэровское кольцо, то идеал $I$ содержит ненулевой идемпотент кольца $S$. □

Правый $R$-модуль $M$ называется *вполне идемпотентным*, если для каждого его подмодуля $N$ выполнено равенство $N = \mathrm{Hom}_R(M, N)N$.

**Теорема 3.3.** *Для вполне идемпотентного правого $R$-модуля $M$ следующие условия равносильны*:

1) *$M$ — слабо бэровский модуль,*
2) *$\mathrm{End}_R(M)$ — правое слабо бэровское кольцо.*

*Доказательство.* Импликация 1)⇒2) следует из леммы.

2)⇒1). В силу леммы 3.6 достаточно проверить выполнимость условия (∗). Пусть $N$ — подмодуль модуля $M$ и $f \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$ — ненулевой гомоморфизм. Так как $fN = f\,\mathrm{Hom}_R(M, N)N \neq 0$, то $f\,\mathrm{Hom}_R(M, N) \neq 0$. □

**Теорема 3.4.** *Пусть $M$ — правый $R$-модуль. Если модуль $M$ является ретрактбельным и несингулярным, то следующие условия равносильны*:

1) *$M$ — слабо бэровский модуль,*
2) *$\mathrm{End}_R(M)$ — слабо бэровский модуль.*

*Доказательство.* Импликация 1)⇒2) следует из леммы 3.3.

2)⇒1). Предположим, что условие (∗) не выполнено для модуля $M$. Тогда для некоторого подмодуля $M'$ модуля $M$ и ненулевого гомоморфизма $f \in \mathrm{Hom}_R(M', M)$ выполнено равенство $fTr_M(M') = 0$. Если $M_0$ — ненулевой подмодуль модуля $M'$, то $\mathrm{Hom}_R(M, M_0) \neq 0$ и, значит, $Tr_M(M')$ — существенный подмодуль модуля $M'$. Тогда $f(M')$ — ненулевой сингулярный подмодуль $M$, что противоречит несингулярности модуля $M$. □

**Теорема 3.5.** *Пусть $M$ — правый $R$-модуль. Если модуль $M$ является ретрактбельным и несингулярным, то следующие условия равносильны*:

1) *$M$ — $I_0^*$-модуль,*
2) *$M$ — слабо бэровский $\mathcal{K}$-некосингулярный модуль,*
3) *$\mathrm{End}_R(M)$ — правое слабо бэровское некосингулярное справа кольцо,*
4) *$\mathrm{End}_R(M)$ — правое $I_0^*$-кольцо.*

*Доказательство.* Эквивалентность 1) ⇔ 2) следует из леммы 3.1. Эквивалентность 3) ⇔ 4) следует из леммы 3.1 и ([23], теорема 3.1).

Импликация 2)⇒3) вытекает из ([23], теорема 3.6) и теоремы 3.3.

3)⇒2). Согласно лемме 2.1 $\mathrm{End}_R(M)$ — несингулярное справа кольцо. Тогда $\mathrm{End}_R(M)$ — справа Утуми-кольцо и импликация следует из ([23], теорема 3.6) и теоремы 3.4. □

**Теорема 3.6.** *Для полупримитивного полуартинового справа кольца $R$ следующие условия равносильны*:

1) *$R$ — справа $I_0^*$-кольцо,*
2) *$R$ — некосингулярное справа кольцо,*
3) *каждый простой подмодуль модуля $R_R$ является инъективным.*

*Доказательство.* Эквивалентность 1) ⇔ 2) вытекает из леммы 3.1. Эквивалентность 1) ⇔ 3) вытекает из леммы 1.5. □

**Теорема 3.7.** *Для полуартинового регулярного кольца $R$ равносильны условия*

1) *$R$ — правое $SV$-кольцо,*
2) *для каждого ординала $\alpha$ кольцо $R/\operatorname{Soc}_\alpha(R_R)$ является некосингулярным справа.*

*Доказательство.* Эквивалентность 1) ⇔ 2) непосредственно следует из теоремы 3.6 и ([3], лемма 1.1). □

Из теоремы 3.7 вытекает

**Следствие 3.2.** Для полуартинового регулярного кольца $R$ длины Леви равносильны два условия:

1) $R$ — правое $SV$-кольцо,
2) $R$ — некосингулярное справа кольцо.

**Замечание.** Пусть $P$ — некоторое поле и $CFM_{\mathbb{N}}(P)$ —кольцо $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-конечно-столбцовых матриц над полем $P$. Рассмотрим в кольце $CFM_{\mathbb{N}}(P)$ подкольцо $R$ вида $PE + N$, где $E$ — единичная матрица, а $N = \{A \in CFM_{\mathbb{N}}(P) | A_{ij} = 0$ для почти всех пар $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$. В работе [20] было показано, что $R$ не является правым $SV$-кольцом. Покажем, как этот факт получается из предыдущего следствия. Пусть $I$ — правый идеал кольца $R$, состоящий из всех матриц, у которых сумма элементов в каждом столбце равна нулю. Ясно, что $I \subset \mathrm{Soc}(R)$ и $\mathrm{Soc}(R) \neq I$. Таким образом, $I$ несуществен в $R_R$. Непосредственные вычисления показывают, что $l(I) = 0$. Значит, согласно следствию 3.2 $R$ не является правым $SV$-кольцом. Аналогично можно показать, что $R$ не является левым $SV$-кольцом.

Пусть $V$ — бесконечномерное векторное пространство над полем $P$, $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — базис векторного пространства $V$, $I = \{f \in \mathrm{End}_P(V) \mid \dim(\mathrm{Jm}(f)) < \infty\}$ и $S = P + I$. Хорошо известно, что $S$ является правым $SV$-кольцом, но не является левым $V$-кольцом. Покажем как этот факт вытекает из следствия 3.2. Пусть $N_0 = \{f \in I \mid \forall\alpha, \beta \in A\ f(e_\alpha) = f(e_\beta)\}$, $N = \{f \in I \mid f(e_\alpha) = 0$ для почти всех $\alpha \in A\}$. Ясно, что $N_0$ является простым подмодулем модуля ${}_SS$ и $N \cap N_0 = 0$. Так как правый аннулятор $N$ в кольце $S$ равен нулю и $N$ не существен в ${}_SS$, то согласно следствию 3.2 кольцо $S$ не является левым $V$-кольцом. Пусть $T$ — несущественный правый идеал кольца $S$. Тогда $T \cap \pi S = 0$ для некоторого примитивного идемпотента $\pi$ кольца $S$. Пусть $v \in \pi V$ и $v \neq 0$. Если $v \in TV$, то несложно заметить, что для некоторого $f \in T$ имеет место равенство $vP = \mathrm{Jm}(f)$. Следовательно, $f \in \pi S$, что противоречит равенству $T \cap \pi S = 0$. Поэтому $TV \cap vP = 0$ и, значит, для некоторого ненулевого линейного оператора $g \in I$ имеем $gTM = 0$, $gT = 0$. Таким образом, каждый несущественный правый идеал кольца $S$ имеет ненулевой аннулятор и из следствия 3.2 получаем, что $S$ — правое $V$-кольцо.

## Литература

[1] Абызов А.Н. *О некоторых классах полуартиновых колец*, Сиб. матем. журн. **53** (5), 955–966 (2012).
[2] Абызов А.Н. *Обобщенные $SV$-модули*, Сиб. матем. журн. **50** (3), 481–488 (2009).
[3] Абызов А.Н. *Слабо регулярные кольца над нормальными кольцами*, Сиб. матем. журн. **49** (4), 721–738 (2008).
[4] Абызов А.Н. *Обобщенные $SV$-кольца ограниченного индекса нильпотентности*, Изв. вузов. Матем., №12, 3–14 (2011).
[5] Абызов А.Н., Туганбаев А.А. *Кольца, над которыми все модули являются $I_0$-модулями.* II, Фундамент. и прикл. матем. **14** (2), 3–12 (2008).
[6] Абызов А.Н., Туганбаев А.А. *Подмодули и прямые слагаемые*, Фундамент. и прикл. матем. **14** (6), 3–31 (2008).
[7] Туганбаев А.А. *Модули с большим числом прямых слагаемых*, Фундамент. и прикл. матем. **12** (8), 233–241 (2006).
[8] Туганбаев А.А. *Кольца, над которыми все модули являются $I_0$-модулями*, Фундамент. и прикл. матем. **13** (5), 193–200 (2007).
[9] Туганбаев А.А. *Кольца без бесконечных множеств нецентральных ортогональных идемпотентов*, Фундамент. и прикл. матем. **14** (1), 207–221 (2008).
[10] Туганбаев А.А. *Теория колец. Арифметические модули и кольца* (МЦНМО, М., 2009 )
[11] Jain S.K., Srivastava A.K., Tuganbaev A.A. *Cyclic modules and the structure of rings* (Oxford University Press, Oxford, 2012).

[12] Dung N.V., Huynh D.V., Smith P.F., Wisbauer R. *Extending modules* (Longman Scientific & Technical, Harlow, 1994).
[13] Huynh D.V., Rizvi S.T. *On some classes of artinian rings*, J. Algebra **223**, 133–153 (2000).
[14] Oshiro K. and Wisbauer R. *Modules with every subgenerated module lifting*, Osaka J. Math. **32**, 513–519 (1995).
[15] Vanaja N. *All finitely generated M-subgenerated modules are extending*, Comm. Algebra **24**, 543–572 (1996).
[16] Wisbauer R. *Foundations of module and ring theory* (Gordon and Breach, Philadelphia, 1991).
[17] Faith C. *Rings whose modules have maximal submodules*, Publ. Mat. **39** (1), 201–214 (1995).
[18] Крылов П.А., Туганбаев А.А. *Модули над кольцами формальных матриц*, Фундамент. и прикл. матем. **15** (8), 145–211 (2009).
[19] Dinh H.Q., Huynh D.V. *Some results on self-injective rings and Σ-CS rings*, Commun. Algebra **31** (12), 6063–6077 (2003).
[20] Baccella G. *Semi-artinian V-rings and semi-artinian von Neumann regular rings*, J. Algebra **173**, 587–612 (1995).
[21] Rizvi S.T., Roman C.S. *Baer and quasi-Baer modules*, Commun. Algebra **32** (1), 103–123 (2004)
[22] Tutuncu D.K., Tribak R. *On dual Baer module*, Glasg. Math. J. **52** (2), 261–269 (2010).
[23] Khuri S.M. *Endomorphism rings of nonsingular modules*, Ann. Sci. Math. Quebec **4** (2), 145–152 (1980).

*А.Н. Абызов*

*доцент, кафедра алгебры и математической логики,*
*Казанский (Приволжский) федеральный университет,*
*ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,*

e-mail: adel.abyzov@kpfu.ru

*A.N. Abyzov*

## $I_0^*$-modules

*Abstract.* We study rings over which every module is an $I_0^*$-module dual to $I_0$-module. We describe semiregular rings over which every module is simultaneously $I_0^*$-module and $I_0$-module. We give a description of rings over which every module is a direct sum of injective module and $SV$-module. We investigate relations between weakly Baer modules and $I_0^*$-modules.

*Keywords*: semi-artinian rings, $SV$-rings, $I_0$-modules, $I_0^*$-modules, weakly Baer modules.

*A.N. Abyzov*

*Associate Professor, Chair of Algebra and Mathematical Logics,*
*Kazan (Volga Region) Federal University,*
*18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: adel.abyzov@kpfu.ru