С. Н. Ильин, О полукольцах, удовлетворяющих критерию Бэра, *Изв. вузов. Матем.*, 2013, номер 3, 33–39

Известия вузов. Математика
2013, № 3, с. 33–39

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

С.Н. ИЛЬИН

О ПОЛУКОЛЬЦАХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ КРИТЕРИЮ БЭРА

Аннотация. Как известно, для модулей над кольцами справедлив критерий инъективности Бэра. В данной работе показано, что критерий Бэра верен и для удовлетворяющих дополнительному условию модулей над полукольцами. Доказано, что полукольцо S удовлетворяет критерию Бэра тогда и только тогда, когда все инъективные относительно односторонних идеалов S полумодули являются модулями, для которых выполняется упомянутое выше условие. Также найден новый метод построения полуколец, удовлетворяющих критерию Бэра.

Ключевые слова: полукольцо, инъективный полумодуль, критерий Бэра.

УДК: 512.558

Данная работа посвящена полукольцам, для которых справедлив аналог критерия инъективности Бэра. Все рассматриваемые ниже полукольца (если это не оговорено особо) считаются содержащими единицу, не исключая случай, когда $1 = 0$, а все полумодули считаются правыми. Используемые в работе понятия "подполумодуля", "гомоморфизма полумодулей" и т. п. определяются по аналогии с известными понятиями теории колец и модулей, соответствующие определения можно найти, например, в [1].

В частности, напомним, что полумодуль M над полукольцом S называется *инъективным*, если для любого S-полумодуля B и любого подполумодуля $A \subseteq B$ всякий S-гомоморфизм $\varphi : A \to M$ можно продолжить до S-гомоморфизма $\overline{\varphi} : B \to M$. Полумодуль M назовем *инъективным по Бэру*, если он инъективен относительно правых идеалов полукольца S, т. е. для любого правого идеала $I \subseteq S$ всякий S-гомоморфизм $\varphi : I \to M$ можно продолжить до S-гомоморфизма $\overline{\varphi} : S \to M$. Ясно, что любой инъективный полумодуль инъективен по Бэру.

В теории колец и модулей хорошо известен следующий результат (см., например, [2], теорема 5.7.1, с. 130).

Теорема A (критерий Бэра)**.** *Модуль M над кольцом R инъективен тогда и только тогда, когда для любого правого идеала $I \subseteq R$ всякий R-гомоморфизм $\varphi : I \to M$ можно продолжить до R-гомоморфизма $\overline{\varphi} : R \to M$.*

Таким образом, всякий модуль над кольцом инъективен тогда и только тогда, когда он инъективен по Бэру. Будем говорить, что полукольцо S *удовлетворяет критерию Бэра*, если все инъективные по Бэру S-полумодули инъективны.

В [3] (теорема 1 и замечание к ней) показано, что любую коммутативную полугруппу можно изоморфно вложить в аддитивный моноид полукольца, над которым существует

Поступила 30.01.2012

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 10-01-00431-а.

ровно один инъективный по Бэру полумодуль, а именно, нулевой. Очевидно, такие полукольца тривиальным образом удовлетворяют критерию Бэра и при этом не являются кольцами. Нетрудно понять, что исключительную "бедность" класса инъективных по Бэру (и, следовательно, инъективных) полумодулей над такими полукольцами легко восполнить, например, добавив к полукольцу в качестве прямого слагаемого какое-либо ненулевое кольцо. В результате вновь получается удовлетворяющее критерию Бэра полукольцо, не являющееся кольцом, и при этом обладающее большим количеством инъективных полумодулей — инъективных модулей над добавленным кольцом. В связи с этим для произвольного полукольца S, удовлетворяющего критерию Бэра, возникают следующие вопросы.

Вопрос 1. Верно ли, что всякий инъективный полумодуль над S является модулем.

Вопрос 2. Верно ли, что всякий инъективный модуль над S является модулем над некоторым кольцом R, выделяющимся в S прямым слагаемым.

Полученные в данной работе результаты дают положительный ответ на первый вопрос и отрицательный на второй.

Прежде всего покажем, что с помощью внесения небольших изменений в стандартное доказательство критерия Бэра можно получить несколько более общий результат.

Обозначим через $R(S)$ множество всех аддитивно обратимых элементов полукольца S. Как обычно, если M — S-полумодуль и $m \in M$, то под $\mathrm{Ann}(m)$ понимается правый аннулятор элемента m.

Теорема 1. *Пусть M — модуль над полукольцом S, удовлетворяющий условию*

$$\forall m \in M\ (m \neq 0 \Rightarrow R(S) \not\subseteq \mathrm{Ann}(m)). \tag{$*$}$$

Модуль M инъективен тогда и только тогда, когда он инъективен по Бэру.

Доказательство. Достаточно показать, что из инъективности по Бэру модуля M вытекает его инъективность. Будем следовать схеме рассуждений, изложенной в ([2], с. 131–132). Пусть A, B — S-полумодули, причем $A \subseteq B$, и $\varphi : A \to M$ — S-гомоморфизм. Предположим, что C — такой полумодуль, что $A \subseteq C \subset B$, и $\gamma : C \to M$ — S-гомоморфизм, ограничение которого на A совпадает с φ. Фиксируем произвольный $b \in B$, $b \notin C$, и покажем, что γ можно продолжить до S-гомоморфизма $\gamma_1 : C_1 \to M$, где $C_1 = C + bS$.

Если $C \cap bS = 0$, то можно продолжить γ на C_1, положив $\gamma_1(bs) = 0$ для всех $s \in S$. Поэтому будем считать, что $C \cap bS \neq 0$. Пусть $U = \{u \in S : bu \in C\}$. Очевидно, что U — правый идеал в S и $\xi : U \ni u \mapsto bu \in C$ — S-гомоморфизм. Так как M инъективен по Бэру, гомоморфизм $\rho = \gamma\xi : U \to M$ можно продолжить до гомоморфизма $\tau : S \to M$. Определим отображение $\gamma_1 : C_1 \to M$ правилом

$$\gamma_1 : C + bS \ni c + bs \mapsto \gamma(c) + \tau(s) \in M.$$

Проверим корректность определения γ_1.

Пусть $c, c' \in C$, $s, s' \in S$ и $c + bs = c' + bs'$, но при этом $\gamma(c) + \tau(s) \neq \gamma(c') + \tau(s')$. Поскольку M — модуль, последнее неравенство можно переписать в виде $m \neq 0$, где $m = \gamma(c) - \gamma(c') + \tau(s) - \tau(s')$. Согласно условию $(*)$ найдется такой $r \in R(S)$, что $mr \neq 0$, откуда $\gamma(cr) - \gamma(c'r) \neq \tau(s'r) - \tau(sr)$.

С другой стороны, умножая обе части равенства $c + bs = c' + bs'$ справа на r, получаем $cr + bsr = c'r + bs'r$, так что $cr + c'(-r) = bs'r + bs(-r) = b(s'r - sr) \in C \cap bS$, следовательно, $s'r - sr \in U$. Тогда $\gamma\xi(s'r - sr) = \tau(s'r - sr)$, поэтому $\gamma(cr) - \gamma(c'r) = \gamma(cr + c'(-r)) = \gamma(b(s'r - sr)) = \gamma\xi(s'r - sr) = \tau(s'r - sr) = \tau(s'r) - \tau(sr)$, т. е. $\gamma(cr) - \gamma(c'r) = \tau(s'r) - \tau(sr)$.

Полученное противоречие доказывает корректность определения γ_1. Ясно, что γ_1 — гомоморфизм, поскольку γ и τ — гомоморфизмы. Непосредственно из определения гомоморфизма γ_1 вытекает, что его ограничение на C совпадает с γ.

Оставшаяся часть доказательства почти буквально повторяет соответствующие рассуждения из ([2], с. 132). $\square$

Перейдем к изучению инъективных полумодулей над полукольцами, удовлетворяющими критерию Бэра. Предварительно сформулируем одну техническую лемму.

Пусть S — произвольное полукольцо. Зададим на S отношение $\trianglelefteq$, полагая $s_1 \trianglelefteq s_2$ для произвольных $s_1, s_2 \in S$, если для некоторого натурального n и подходящего $x \in S$ верно $ns_2 = s_1 + x$. Непосредственно проверяется

Лемма 1. *Отношение ρ на S, определенное правилом $s_1 \,\rho\, s_2$, если $s_1 \trianglelefteq s_2$ и $s_2 \trianglelefteq s_1$, есть конгруэнция, причем фактор-полукольцо S/ρ аддитивно идемпотентно.*

Положительный ответ на вопрос 1 дает

Теорема 2. *Если полукольцо S удовлетворяет критерию Бэра, то любой инъективный S-полумодуль является модулем.*

Доказательство. Фиксируем произвольный инъективный S-полумодуль M. Если S — кольцо или $M = \{0\}$, то утверждение тривиально, поэтому ниже считаем, что S не является кольцом, т. е. $R(S) \subset S$, и $M \neq \{0\}$.

Обозначим через θ_R отношение Бёрна на S по идеалу $R(S)$, т. е. $s_1 \,\theta_R\, s_2$, если для некоторых $r_1, r_2 \in R(S)$ верно $s_1 + r_1 = s_2 + r_2$ или, эквивалентно, $s_2 = s_1 + r$ при подходящем $r \in R(S)$. Согласно предложению 1.5 из [4] ненулевое фактор-полукольцо S/θ_R не содержит ненулевых аддитивно обратимых элементов, так что $R(S/\theta_R) = \{0\}$.

Рассмотрим множество $M(\theta_R)$ всех элементов из M, согласованных с θ_R, т. е. таких элементов $m \in M$, что для всех $s_1, s_2 \in S$ из $s_1 \,\theta_R\, s_2$ вытекает $ms_1 = ms_2$. В силу теоремы 1.1 ([4]) инъективный полумодуль M является модулем в точности тогда, когда $M(\theta_R) = \{0\}$. Поэтому для завершения доказательства достаточно установить, что неравенство $M(\theta_R) \neq \{0\}$ противоречит условию теоремы.

Лемма 2. *Если M — инъективный S-полумодуль и $M(\theta_R) \neq \{0\}$, то множество $M(\rho)$ всех элементов из M, согласованных с конгруэнцией ρ, образует ненулевой инъективный S/ρ-полумодуль.*

Доказательство. Согласно предложению 1.2 ([4]) для любого S-полумодуля M и любой конгруэнции θ на S множество $M(\theta)$ образует подполумодуль в M, являющийся одновременно S/θ-полумодулем, умножение элементов которого справа на элементы фактор-полукольца S/θ определяется естественным образом: для каждого $m \in M(\theta)$ и каждого класса конгруэнтности $\overline{s}$ элемента $s \in S$ полагаем $m\overline{s} = ms$. В силу предложения 1.4 ([4]) инъективность S/θ-полумодуля $M(\theta)$ вытекает из инъективности M. Поэтому $M(\theta_R)$ и $M(\rho)$ — инъективные S/θ_R- и S/ρ-полумодули соответственно. Остается лишь установить, что полумодуль $M(\rho)$ ненулевой.

Поскольку $R(S/\theta_R) = \{0\}$ и S/θ_R-полумодуль $M(\theta_R)$ инъективен, то в силу предложения 1.7 ([4]) найдется такой $z \in M(\theta_R)$, что $m + z = z$ для всех $m \in M(\theta_R)$. Откуда, в частности, вытекает $z + z = z$ и $z \neq 0$, так как по условию полумодуль $M(\theta_R)$ ненулевой. Проверим, что z лежит в $M(\rho)$.

Действительно, пусть для некоторых $s_1, s_2 \in S$ верно $s_1 \,\rho\, s_2$. Тогда, в частности, $s_1 \trianglelefteq s_2$, значит, $ns_2 = s_1 + x$ при некотором натуральном n и подходящем $x \in S$. Следовательно, с учетом равенства $z+z=z$ получаем $zs_2 = zns_2 = zs_1 + zx = zs_1 + zs_1 + zx = zs_1 + zs_2$, т. е. $zs_2 = zs_1 + zs_2$. Аналогично, $zs_1 = zs_1 + zs_2$, в итоге $zs_1 = zs_2$, так что $z \in M(\rho)$. $\square$

Лемма 3. *Если полукольцо S удовлетворяет критерию Бэра и S-полумодуль M инъективен, то и $M(\rho)$ является инъективным S-полумодулем.*

Доказательство. Поскольку S удовлетворяет критерию Бэра, достаточно проверить, что $M(\rho)$ инъективен по Бэру как S-полумодуль. Напомним, что $M(\rho)$ является одновременно полумодулем над полукольцом S/ρ, которое ввиду леммы 2 аддитивно идемпотентно, следовательно, сложение в $M(\rho)$ также идемпотентно.

Итак, пусть $I \subseteq S$ — правый идеал и $\varphi : I \to M(\rho)$ — S-гомоморфизм. Так как $M(\rho) \subseteq M$ и M инъективен, то существует S-гомоморфизм $\psi : S \to M$, продолжающий φ.

Фиксируем произвольные элементы $s_1, s_2 \in I$ такие, что $s_1 \,\rho\, s_2$. В частности, $s_1 \trianglelefteq s_2$, т. е. для некоторого натурального n и подходящего $x \in S$ верно $ns_2 = s_1 + x$. С учетом идемпотентности сложения в $M(\rho)$ имеем $\varphi(s_2) = \varphi(ns_2) = \varphi(s_1 + x) = \psi(s_1 + x) = \psi(s_1) + \psi(x) = \varphi(s_1) + \psi(x)$, так что $\varphi(s_2) = \varphi(s_1) + \psi(x)$. Прибавив к обеим частям последнего равенства $\varphi(s_1) \in M(\rho)$, получим $\varphi(s_1)+\varphi(s_2) = \varphi(s_1)+\varphi(s_1)+\psi(x) = \varphi(s_1)+\psi(x) = \varphi(s_2)$, тем самым, $\varphi(s_1) + \varphi(s_2) = \varphi(s_2)$. Аналогично, $\varphi(s_1) + \varphi(s_2) = \varphi(s_1)$, в итоге $\varphi(s_1) = \varphi(s_2)$.

Получаем, что образы любых конгруэнтных друг другу относительно ρ элементов идеала I при отображении φ совпадают, следовательно, φ индуцирует корректно определенный S/ρ-гомоморфизм $\eta : \overline{I} \to M(\rho)$. Здесь $\overline{I}$ — правый идеал фактор-полукольца S/ρ, являющийся образом правого идеала I при действии естественного гомоморфизма $\chi : S \to S/\rho$. По лемме 2 полумодуль $M(\rho)$ инъективен как S/ρ-полумодуль, так что для S/ρ-гомоморфизма η существует продолжение $\overline{\eta} : S/\rho \to M(\rho)$. Осталось заметить, что композиция $\overline{\eta}\chi : S \to M(\rho)$ есть искомый S-гомоморфизм, продолжающий φ. $\square$

Итак, предположим, что $M(\theta_R) \neq \{0\}$. Тогда в силу лемм 2–3 $M(\rho)$ — ненулевой инъективный S-полумодуль. Следовательно, для каждого непустого множества X множество $M(\rho)^X$, состоящее из всех заданных на X функций со значениями в $M(\rho)$, с поточечно определенными операциями сложения и умножения на элементы из S образует ненулевой S-полумодуль, инъективность которого вытекает из инъективности $M(\rho)$ согласно предложению 17.23 ([1], с. 198).

Обозначим через $\mathfrak{m}$ мощность некоторого бесконечного множества, которая больше или равна мощности S. Фиксируем множество Y, мощность которого строго больше $\mathfrak{m}$, и рассмотрим S-полумодуль $F = M(\rho)^Y$. Сопоставим каждой функции $f \in F$ ее носитель $\mathrm{supp}(f) = \{y \in Y : f(y) \neq 0\}$. Нетрудно видеть, что множество E всех функций полумодуля F, мощность носителя которых не превосходит $\mathfrak{m}$, является подполумодулем в F.

Лемма 4. *Полумодуль E инъективен по Бэру.*

Доказательство. Пусть $I \subseteq S$ — правый идеал и $\alpha : I \to E$ — S-гомоморфизм. Положим $X = \bigcup\limits_{a \in I} \mathrm{supp}(\alpha(a))$. Тогда $\mathrm{supp}(\alpha(a)) \subseteq X$ для всех $a \in I$. Вполне очевидно, множество всех функций полумодуля F, носители которых содержатся в X, образует подполумодуль $F(X)$, изоморфный полумодулю $M(\rho)^X$ и, следовательно, инъективный. Значит, существует S-гомоморфизм $\overline{\alpha} : S \to F(X)$, продолжающий α. Заметим, что мощность идеала I и мощности носителей $\mathrm{supp}(\alpha(a))$ для всех $a \in I$ не превосходят $\mathfrak{m}$, поэтому мощность X не превосходит $\mathfrak{m}$. Следовательно, $F(X) \subset E$ и найденное продолжение $\overline{\alpha}$ является одновременно S-гомоморфизмом S в E, что доказывает инъективность по Бэру S-полумодуля E. $\square$

Лемма 5. *Полумодуль E неинъективен.*

Доказательство. Достаточно показать, что тождественный S-гомоморфизм $\alpha : E \to E$ нельзя продолжить до S-гомоморфизма $\overline{\alpha} : F \to E$.

Предположим, что такое продолжение существует. Напомним, что согласно доказательству леммы 2 в $M(\rho)$ лежит такой элемент z, что $m + z = z$ для всех $m \in M(\rho)$, причем $z \neq 0$. Обозначим через $f_z \in F$ функцию, значение которой равно z в каждой точке множества Y, и положим $g_z = \overline{\alpha}(f_z) \in E$. Тогда для каждого $y \in Y$ и любой функции $f \in E$ верно $(f + f_z)(y) = f(y) + z = z = f_z(y)$, т. е. $f + f_z = f_z$, следовательно, $f + g_z = \overline{\alpha}(f) + \overline{\alpha}(f_z) = \overline{\alpha}(f + f_z) = \overline{\alpha}(f_z) = g_z$.

Поскольку $g_z \in E$, то мощность носителя g_z не превосходит $\mathfrak{m}$ и, значит, строго меньше мощности множества Y. Поэтому найдется $y_0 \in Y$, не лежащий в $\mathrm{supp}(g_z)$. Ясно, что функция f с носителем $\{y_0\}$, где $f(y_0) = z$, лежит в E, следовательно, $f + g_z = g_z$, откуда $0 = g_z(y_0) = f(y_0) + g_z(y_0) = z + 0 = z \neq 0$ — противоречие. □

Итак, согласно леммам 4–5, доказанным в предположении, что $M(\theta_R) \neq \{0\}$, построен инъективный по Бэру S-полумодуль, не являющийся инъективным. Но это противоречит тому, что полукольцо S удовлетворяет критерию Бэра. □

Следствие. Для полукольца S следующие условия эквивалентны:

1) каждый инъективный по Бэру S-полумодуль инъективен (т. е. S удовлетворяет критерию Бэра);

2) каждый инъективный по Бэру S-полумодуль является модулем, удовлетворяющим условию $(*)$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). С учетом теоремы 2 требуется лишь показать, что для каждого инъективного S-модуля выполнено условие $(*)$.

Пусть M — инъективный S-модуль и $m \in M$ такой, что $mr = 0$ при любом $r \in R(S)$. Покажем, что m согласован с конгруэнцией θ_R.

Действительно, если для некоторых $s_1, s_2 \in S$ верно $s_1\, \theta_R\, s_2$, то $s_1 = s_2 + r$ при подходящем $r \in R(S)$, откуда $ms_1 = m(s_2 + r) = ms_2 + mr = ms_2$.

Таким образом, $m \in M(\theta_R)$. Но в силу теоремы 1.1 ([4]) для инъективного S-модуля M верно $M(\theta_R) = \{0\}$, так что $m = 0$. Следовательно, модуль M удовлетворяет условию $(*)$.

Справедливость импликации 2) $\Rightarrow$ 1) вытекает из теоремы 1. □

Следующее утверждение дает отрицательный ответ на вопрос 2 и дополняет опубликованный ранее результат ([3], теорема 1).

Теорема 3. *Любую коммутативную полугруппу можно изоморфно вложить в аддитивный моноид такого полукольца S, что*

1) *S удовлетворяет критерию Бэра,*

2) *S неразложимо в прямую сумму ненулевых подполуколец,*

3) *над S существуют ненулевые инъективные модули.*

Доказательство. Построим искомое полукольцо S, внеся некоторые изменения в конструкцию, использовавшуюся для доказательства упомянутого выше результата ([3], теорема 1).

Итак, пусть $(U, +)$ — коммутативная полугруппа. Добавив к ней при необходимости нейтральный элемент 0, можно считать, что $(U, +, 0)$ — коммутативный моноид. Присоединим к моноиду $U \oplus \langle a \rangle$, где $\langle a \rangle$ — бесконечная циклическая группа, "бесконечно удаленный" элемент $b \notin U \oplus \langle a \rangle$, положив $x + b = b$ для всех $x \in X = (U \oplus \langle a \rangle) \cup \{b\}$. Превратим коммутативный моноид $(X, +, 0)$ в полукольцо $(X, +, \cdot, 0)$ без единицы, положив $xx' = 0$ для всех $x, x' \in X$. Положим $Y = X \oplus Z$, где Z — кольцо без единицы, изоморфное кольцу четных целых чисел (порождающий его элемент 2 обозначим через c). Наконец, обозначим через S расширение Дорроха полукольца Y при помощи полукольца натуральных чисел $\mathbb{N}$ (т. е. $S = Y \times \mathbb{N}$, где $(y, n) + (y', n') = (y + y', n + n')$, $(y, n)(y', n') = (yy' + ny' + n'y, nn')$ для всех $y, y' \in Y$, $n, n' \in \mathbb{N}$). Легко видеть, что S — коммутативное полукольцо с единицей $(0, 1)$ и что отображение $y \mapsto (y, 0)$ есть изоморфное вложение полукольца Y в S. Следовательно, исходная полугруппа $(U, +)$ изоморфно вкладывается в моноид $(S, +, 0)$. Покажем, что полукольцо S удовлетворяет требуемым условиям. (Ниже для упрощения записи отождествляем элементы $y \in Y$ и $(y, 0) \in S$, а вместо $(0, n)$ пишем просто n, тогда произвольный элемент $(y, n) \in S$ принимает вид $(y, n) = (y, 0) + (0, n) = y + n$ или $x + z + n$, где $y = x + z$, $x \in X$, $z \in Z$.)

Отметим, что построение соответствующего полукольца в доказательстве теоремы 1 из [3] отличается от вышеописанного лишь отсутствием подкольца Z. А поскольку $xz = zx = 0$ для всех $x \in X$, $z \in Z$, то рассуждения, аналогичные тем, что применялись для доказательства упомянутой теоремы 1 ([3], леммы 1, 2), показывают, что если M — инъективный по Бэру S-полумодуль, то $Mx = \{0\}$ при любом $x \in X$.

Фиксируем произвольный элемент $m \in M$. Если $mc = 0$, где, напомним, c — порождающий элемент подкольца Z, то справедливы рассуждения, приведенные в доказательстве леммы 3 из [3], согласно которым $m = 0$. Поэтому для любого ненулевого $m \in M$ верно $mc \neq 0$ и, значит, $R(S) \nsubseteq \mathrm{Ann}(m)$, поскольку $c \in Z \subset R(S)$. Следовательно, M обладает свойством $(*)$. Тогда с учетом равенства $c^2 = 2c$ для любого $m \in M$ имеем $m(2 - c)c = 0$, откуда $0 = m(2 - c) = m + m - mc$, так что элемент $m \in M$ обладает противоположным элементом. В силу произвольности выбора $m \in M$ получаем, что M является модулем. Итак, всякий инъективный по Бэру S-полумодуль есть модуль со свойством $(*)$, поэтому ввиду следствия 1 полукольцо S удовлетворяет критерию Бэра.

Для доказательства неразложимости S в прямую сумму ненулевых подполуколец достаточно установить, что его единицу нельзя представить в виде суммы ненулевых мультипликативных идемпотентов. Поскольку всякий элемент $s \in S$ однозначно представляется в виде $s = x + kc + n$, где $x \in X$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, то уравнение $s^2 = s$ приводит к соотношениям $2nx = x$, $2k^2 + 2nk = k$, $n^2 = n$, из которых легко вытекает, что всякий ненулевой мультипликативный идемпотент в S имеет вид $x + 1$, где $x + x = x$. Очевидно, равенство $1 + x + 1 + x' = 1$ невозможно ни при каких $x, x' \in X$.

Наконец, обозначим через M аддитивный моноид $(\mathbb{Q}, +, 0)$ поля рациональных чисел и зададим умножение его элементов справа на элементы из S правилом: для каждого $m \in M$ и каждого $s = x + kc + n \in S$ полагаем $ms = (2k + n)m$. Легко видеть, что M является S-модулем. Проверим его инъективность по Бэру.

Фиксируем произвольный идеал $I \subseteq S$ и какой-либо S-гомоморфизм $\alpha : I \to M$. Как уже было сказано выше, всякий элемент $s \in I$ единственным образом представим в виде $s = x + kc + n$, где $x \in X$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что при $2k + n = 0$ имеем $2\alpha(x + kc + n) = \alpha(x + kc + n)c = \alpha(2kc + nc) = \alpha(0) = 0$, откуда $\alpha(x + kc + n) = 0$, поэтому если равенство $2k + n = 0$ выполнено для всех элементов идеала I, то гомоморфизм α — нулевой и его можно продолжить до нулевого гомоморфизма $\overline{\alpha} : S \to M$. Остается случай, когда для некоторого $s_0 = x_0 + k_0c + n_0 \in I$ верно $2k_0 + n_0 \neq 0$. Положим $m_0 = \frac{1}{2k_0 + n_0}\alpha(s_0)$ и зададим отображение $\overline{\alpha} : S \ni s \mapsto m_0 s \in M$. Ясно, что $\overline{\alpha} : S \to M$ является S-гомоморфизмом, причем с учетом коммутативности умножения в S для каждого $s \in I$ имеем

$$\overline{\alpha}(s) = m_0 s = \frac{1}{2k_0 + n_0}\alpha(s_0)s = \frac{1}{2k_0 + n_0}\alpha(s)s_0 = \alpha(s),$$

т. е. ограничение $\overline{\alpha}$ на I совпадает с α. Таким образом, ненулевой S-модуль M инъективен по Бэру и, следовательно, инъективен, поскольку S удовлетворяет критерию Бэра.

Итак, для построенного полукольца S выполнены все требуемые условия, тем самым, теорема доказана.

Литература

[1] Golan J.S. *Semirings and their applications* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1999).

[2] Каш Ф. *Модули и кольца* (Мир, М., 1981).

[3] Ильин С.Н. *О применимости к полукольцам двух теорем теории колец и модулей*, Матем. заметки **83** (4), 536–544 (2008).

[4] Ильин С.Н. *Прямые суммы инъективных полумодулей и прямые произведения проективных полумодулей над полукольцами*, Изв. вузов. Матем., № 10, 31–44 (2010).

С.Н. Ильин

доцент, кафедра алгебры и математической логики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Sergey.Ilyin@ksu.ru

S.N. Il'in

Semirings satisfying the Baer criterion

Abstract. It is well-known that for modules over rings the Baer injectivity criterion takes place. In this paper we prove that under one additional condition this criterion is also valid for modules over semirings. We prove that a semiring S satisfies the Baer criterion if and only if all injective (with respect to one-sided ideals of S) semimodules satisfy the above condition. We propose a new method for constructing semirings satisfying the Baer criterion.

Keywords: semiring, injective semimodule, Baer criterion.

S.N. Il'in

Associate Professor, Chair of Algebra and Mathematical Logics,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: Sergey.Ilyin@ksu.ru