С. Я. Серовайский, Необходимые условия оптимальности для нелинейной стационарной системы в отсутствии дифференцируемости состояния по управлению, *Изв. вузов. Матем.*, 2010, номер 6, 32–46

Известия вузов. Математика
2010, №6, с. 32–46

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

С.Я. СЕРОВАЙСКИЙ

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ В ОТСУТСТВИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ СОСТОЯНИЯ ПО УПРАВЛЕНИЮ

Аннотация. Рассматривается управляемая система, описываемая нелинейным эллиптическим уравнением. При больших значениях скорости роста нелинейности и размерности области зависимость функции состояния от управления оказывается не дифференцируемой по Гато, но расширенно дифференцируемой. Получено необходимое условие оптимальности для различных критериев оптимальности.

Ключевые слова: оптимальное управление, нелинейные эллиптические уравнения, расширенная дифференцируемость, условия оптимальности.

УДК: 571.977

Abstract. We consider a control system described by a nonlinear elliptic equation. Its control-state mapping is extended differentiable but not Gateaux differentiable for large values of the domain dimension and the nonlinearity index. We obtain a necessary optimality condition for various state functionals.

Keywords: optimal control, nonlinear elliptic equation, extended differentiability, optimality conditions.

1. Введение

Вывод необходимых условий оптимальности и применение градиентных методов предполагают дифференцирование минимизируемого функционала. Прямое вычисление его производной включает в себя дифференцирование функции состояния системы по управлению. Для этого можно воспользоваться теоремами об обратной или неявной функции. Однако на практике условия этих теорем могут нарушаться, а зависимость функции состояния от управления зачастую оказывается недифференцируемой в классическом смысле [1], [2]. Такой эффект обусловлен не наличием в системе негладких членов (модуля, максимума двух функций), а недостатком функциональных свойств соответствующих линеаризованных уравнений. Вследствие этого для решения оптимизационных задач оказываются непригодными как известные методы негладкой оптимизации (например, [3]–[5]), так и результаты общей теории экстремума (например, [6]–[9]), прямо или косвенно опирающиеся на условие Люстерника [10]. Для преодоления указанных трудностей в [1], [2] было введено понятие расширенной производной оператора, являющееся обобщением производной Гато. Настоящая работа является развитием этого направления.

Поступила 29.05.2008

Рассматривается система, описываемая нелинейным уравнением эллиптического типа. При малых значениях скорости роста нелинейности и размерности области зависимость функции состояния от управления дифференцируема по Гато, и вывод необходимых условий оптимальности не вызывает затруднений. В общем случае производная Гато не существует, вследствие чего для решения задачи уже нельзя воспользоваться известными методами оптимизации систем, описываемых нелинейными эллиптическими уравнениями (например, [11]–[16]). Тем не менее, функция состояния расширенно дифференцируема по управлению, что позволяет обосновать необходимые условия оптимальности, причем для более широкого класса управлений и функционалов, чем в [1], [2]. Принципиальным отличием от последних работ является доказательство расширенной дифференцируемости указанной зависимости в двух разных смыслах. Это дает возможность охватить новые классы критериев оптимальности, в частности, изучить задачу граничного наблюдения, которая для данного класса систем оставалась не исследованной.

2. Постановка задачи

Задается открытая ограниченная область Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с границей Γ. Рассматривается система, описываемая на Ω однородной задачей Дирихле для уравнения

$$-\Delta y + |y|^\rho y = v + f, \tag{1}$$

где $\rho > 0$, v — управление, f — известная функция. Определяется пространство $Y = H_0^1(\Omega) \cap L_q(\Omega)$ и соответствующее сопряженное пространство $Z = H^{-1}(\Omega) + L_{q'}(\Omega)$, где $q = \rho + 2$, $1/q + 1/q' = 1$. С помощью теории монотонных операторов (например, [17], с. 182) устанавливается, что при $f \in Z$ для любого $v \in Z$ уравнение (1) имеет единственное решение $y = y[v]$ из Y, причем отображение $y[\cdot] : Z \to Y$ слабо непрерывно.

Задается функционал

$$I(v) = J(v) + K(y[v]),$$

где J и K — ограниченные снизу выпуклые непрерывные функционалы, определенные на пространствах Z и Y соответственно, причем функционал J коэрцитивен. Ограничимся рассмотрением задачи на безусловный экстремум, поскольку поставленные проблемы связаны со свойствами уравнения состояния и не имеют отношения к условиям, налагаемым на систему.

Задача P. Найти управление, минимизирующее функционал I в пространстве V.

Очевидно, I является ограниченным снизу коэрцитивным слабо полунепрерывным снизу функционалом в пространстве Z. Тогда задача P разрешима (например, [3], с. 44), т. е. оптимальное управление существует. Необходимым условием минимума дифференцируемого функционала I в точке v является условие стационарности

$$I'(v) = 0,$$

где $I'(v)$ — производная Гато от I в точке v. Пусть функционалы J и K дифференцируемы по Фреше. Тогда из теоремы о сложной функции ([18], с. 637) следует, что в том случае, когда отображение $y[\cdot] : Z \to Y$ имеет производную Гато $y'[v]$ в точке v, функционал I имеет в этой точке производную Гато

$$I'(v) = J'(v) + K'(y[v])y'[v]. \tag{2}$$

Итак, в случае дифференцируемости по Гато зависимости функции состояния системы от управления для решения задачи P достаточно приравнять нулю производную Гато (2).

3. Необходимое условие оптимальности при ограничении на скорость роста нелинейности и размерность области

Наиболее естественный способ доказательства дифференцируемости решения уравнения по свободному члену дает теорема об обратной функции ([19], с. 637). Пусть задан непрерывно дифференцируемый оператор $A : Y \to Z$, где Y и Z — банаховы пространства, и точки $y \in Y$ и $z = Ay$. Если производная $A'(y)$ обратима, то обратный оператор A^{-1} непрерывно дифференцируем в точке z, причем справедливо равенство

$$(A^{-1})'(z) = [A'(y)]^{-1}. \tag{3}$$

Ключевым моментом здесь является проверка обратимости производной $A'(y)$, что эквивалентно следующему утверждению о линеаризованном уравнении:

$$A'(y)\eta = \psi \tag{4}$$

для любого $\psi \in Z$ имеет единственное решение $\eta \in Y$.

Пусть пространства Y и Z те же, что и раньше. Зададим оператор $A : Y \to Z$, обозначив через Ay левую часть равенства (1). В дальнейшем $\langle \mu, \eta \rangle$ является значением линейного непрерывного функционала μ в точке η.

Лемма 1. *При $n = 2$ или $\rho \leq 4/(n-2)$ для $n \geq 3$ отображение $y[\cdot] : Z \to Y$ в любой точке $v \in Z$ имеет производную Гато, определенную равенством*

$$\langle \mu, y'(v)h \rangle = \int_\Omega p[\mu] h \, dx \quad \forall \mu \in Y', \quad h \in Z, \tag{5}$$

где $p[\mu]$ есть решение однородной задачи Дирихле для уравнения

$$-\Delta p[\mu] + (\rho + 1)|y[v]|^\rho p[\mu] = \mu. \tag{6}$$

Доказательство. Линеаризованное уравнение (4) здесь соответствует однородной задаче Дирихле для уравнения

$$-\Delta \eta + (\rho + 1)|y[v]|^\rho \eta = \psi. \tag{7}$$

Умножая равенство (7) на функцию η и интегрируя результат формально по области Ω с учетом формулы Грина, получим

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right)^2 + (\rho + 1) \int_\Omega |y[v]|^\rho \eta^2 dx = \eta \psi \, dx. \tag{8}$$

При выполнении условий леммы согласно теореме Соболева имеем непрерывное вложение $H^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, откуда следуют равенства $Y = H_0^1(\Omega)$ и $Z = H^{-1}(\Omega)$. Тогда ввиду (8) однородная задача Дирихле для линейного эллиптического уравнения (7) допускает априорную оценку решения в пространстве Y для любого свободного члена из Z. Пользуясь известной теорией линейных уравнений эллиптического типа (например, [20], с. 53), заключаем, что для всех $\psi \in Z$ эта задача имеет единственное решение $\eta \in Y$, т. е. выполнены условия теоремы об обратной функции.

Из условия (3) в силу совпадения оператора, сопряженного к обратному, с оператором, обратным к сопряженному (например, [19], с. 460), следует

$$\langle \mu, y'[v]h \rangle = \langle \mu, \{A'(y[v])\}^{-1} h \rangle = \langle \{[A'(y[v])]^*\}^{-1} \mu, h \rangle \quad \forall \mu \in Y', \quad h \in Z. \tag{9}$$

Оператор $A'(y[v])$ является самосопряженным. Тогда сопряженное уравнение

$$[A'(y[v])]^* p = \mu$$

соответствует однородной задаче Дирихле для уравнения (6) и для любого $\mu \in Y'$ имеет единственное решение $p = p(\mu)$ из пространства Z', совпадающего с $H_0^1(\Omega)$. Таким образом, соотношение (9) принимает вид (5). $\square$

Следствие 1. При выполнении условия леммы 1 функционал I в любой точке $v \in Z$ имеет производную Гато $I'(v) = J'(v) + p$, где p — решение однородной задачи Дирихле для уравнения

$$-\Delta p + (\rho+1)|y[v]|^\rho p = K'(y[v]). \tag{10}$$

Доказательство. В соответствии с формулой (2) справедливо равенство

$$\langle I'(v), h\rangle = \langle J'(v), h\rangle + \langle K'(y[v]), y'[v]h\rangle \quad \forall h \in Z.$$

Определяя в (6) $\mu = K'(y[v])$, приходим к уравнению (10). Тогда, учитывая (5), получаем

$$\langle I'(v), h\rangle = \langle J'(v) + p, h\rangle \quad \forall h \in Z,$$

откуда вытекает утверждение следствия. $\square$

Теперь необходимые условия оптимальности дает

Теорема 1. *При выполнении условий леммы* 1 *решение* v *задачи* P *удовлетворяет условию стационарности* $J'(v) + p = 0$.

Рассмотрим один частный случай. Пусть критерий оптимальности имеет вид

$$I_1(v) = \frac{\chi}{2}\|v\|_Z^2 + \frac{1}{2}\|y[v] - y_d\|_Y^2,$$

где $\chi > 0$, $y_d \in Y$ — известная функция. Обозначим через Λ канонический изоморфизм из $H^{-1}(\Omega)$ в $H_0^1(\Omega)$, существующий в силу теоремы Рисса и характеризуемый соотношением

$$(v,h)_{H^{-1}(\Omega)} = \langle \Lambda v, h\rangle \quad \forall v,h \in H^{-1}(\Omega).$$

Следствие 2. При выполнении условий леммы 1 точка минимума функционала I_1 в пространстве Z определяется по формуле $v = -\chi\Lambda^{-1}p$, где p находится из однородной задачи Дирихле для системы нелинейных эллиптических уравнений

$$-\Delta y + |y|^\rho y = f - \chi\Lambda^{-1}p, \tag{11}$$

$$-\Delta p + (\rho+1)|y|^\rho p = \Delta y_d - \Delta y. \tag{12}$$

Доказательство. Учитывая, что в данном случае пространства Y и Z являются гильбертовыми, находим соответствующие производные из условий

$$\langle J'(v), h\rangle = \chi(v,h)_Z \quad \forall h \in Z, \qquad \langle K'(y), \eta\rangle = (y - y_d, \eta)_Y \quad \forall \eta \in Y.$$

Пользуясь формулой Грина, имеем

$$(y,\eta)_Y = -\langle \Delta y, \eta\rangle \quad \forall y,\eta \in Y.$$

В силу теоремы Рисса приходим к соотношениям

$$\langle J'(v), h\rangle = \chi\int_\Omega \Lambda v h\,dx \quad \forall h \in Z, \qquad \langle K'(y), \eta\rangle = \int_\Omega (\Delta y_d - \Delta y)\eta\,dx \quad \forall \eta \in Y.$$

Тогда из формулы (2) следует

$$\langle I'(v), h\rangle = \langle J'(v), h\rangle + \langle K'(y[v]), y'[v]h\rangle =$$

$$= \int_\Omega \chi\Lambda v h\,dx + \int_\Omega (\Delta y_d - \Delta y[v])y'[v]h\,dx \quad \forall h \in Z.$$

Определив в (6) $y[v] = y$ и $\mu = \Delta y_d - \Delta y[v]$, приходим к уравнению (12). Тогда из (5) получим

$$\langle \mu, y'[v]h\rangle = \int_\Omega (\Delta y_d - \Delta y[v])y'[v]h\,dx = \int_\Omega ph\,dx \quad \forall \mu \in Y', \quad h \in Z.$$

В результате имеем соотношение

$$\langle I'(v), h\rangle = \int_\Omega (\chi\Delta v + p)h\,dx \quad \forall h \in Z,$$

откуда следует, что $I'(v) = \chi\Delta v + p$. Тогда из условия стационарности и уравнения (1) получим равенство (11). □

Таким образом, для получения оптимального управления в рассмотренном примере достаточно решить задачу Дирихле для системы нелинейных эллиптических уравнений (11), (12), после чего воспользоваться указанной формулой. Найденные утверждения не выходят за рамки известных результатов в теории оптимального управления системами, описываемыми нелинейными уравнениями эллиптического типа (например, [11]–[16]). Имеющиеся при этом расхождения в классе управлений и критериев оптимальности не столь существенны. Однако в дальнейшем снимем ограничения, используемые в лемме 1, выходя тем самым за пределы выше указанных результатов.

4. Проблема дифференцируемости обратного оператора в общем случае

Лемма 1 устанавливает дифференцируемость обратного оператора для уравнения (1) при выполнении вложения $H^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$. В его отсутствии из соотношения (8) уже не следует априорная оценка решения линеаризованного уравнения (7) в пространстве Y. Это уравнение вообще не допускает априорную оценку решения в данном пространстве. Вследствие этого нельзя воспользоваться теоремой об обратной функции для доказательства дифференцируемости зависимости решения уравнения от свободного члена. Более того, справедлива

Лемма 2. *В отсутствии вложения $H^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ отображение $y[\cdot] : Z \to Y$ не дифференцируемо по Гато.*

Доказательство. Зададим точку $y \in C^2(\overline{\Omega})$, равную нулю на границе Γ. Обозначив через z соответствующую ей правую часть равенства (1), получим $Ay = z$. Для любой функции $\eta \in Y$ левая часть равенства (4) при $y[v] = y$ оказывается элементом пространства $Z_* = H^{-1}(\Omega)$, которое в отсутствии вложения $H^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ будет собственным подпространством Z. Поэтому справедливо вложение $A'(y)(Y) \subset Z_*$, т.е. производная $A'(y)$ не является сюръекцией. В частности, при $\psi \in (Z_* \setminus Z)$ линеаризованное уравнение (7) не может быть разрешимо в пространстве Y. Предположим, что отображение $y[\cdot] : Z \to Y$ дифференцируемо по Гато в точке $v = z - f$, т.е. при $\sigma \to 0$ имеет место сходимость $(y[v + \sigma\psi] - y[v])/\sigma \to y'[v]\psi$ в Y для всех $\psi \in Z$. Из равенства (1) следует

$$\Delta y[v + \sigma\psi] + \Delta y[v] + |y[v + \sigma\psi]|^\rho y[v + \sigma\psi] - |y[v]|^\rho y[v] = \sigma\psi.$$

Разделив полученное выражение на σ и перейдя в нем к пределу, установим

$$\Delta(y'[v]\psi) + (\rho + 1)|y|^\rho (y'[v]\psi) = \psi.$$

Тогда для любого $\psi \in Z$ однородная задача Дирихле для уравнения (7) имеет решение $\eta = y'[v]\psi$ из пространства Y. Однако ранее было показано, что этого не может быть при $\psi \in (Z_* \setminus Z)$. Установленное противоречие завершает доказательство. □

Из полученных результатов (а также [1], [2]) вытекает, что при достаточно больших значениях показателя нелинейности ρ и размерности области n (как только нарушится указанное вложение) зависимость решения краевой задачи от свободного члена уравнения не дифференцируема по Гато в выбранной точке. Установим критерий дифференцируемости обратного оператора для рассматриваемого уравнения в произвольной точке.

Лемма 3. *Для того чтобы отображение $y[\cdot] : Z \to Y$ было дифференцируемо по Гато в точке $v \in Z$, необходимо и достаточно, чтобы производная оператора A в точке $y[v]$ была сюръекцией.*

Доказательство. Если производная рассматриваемого оператора не является сюръекцией, т. е. однородная задача Дирихле для уравнения (4) разрешима в пространстве Y не для всех точек $\psi \in Z$, то, повторив рассуждения из доказательства леммы 2, установим отсутствие дифференцируемости исследуемой зависимости. Пусть, напротив, для произвольного значения $\psi \in Z$ эта задача разрешима в пространстве Y. Если существуют два таких решения, то их разность будет удовлетворять уравнению (4) с однородным свободным членом. Тогда будет справедливо соотношение (8) при $\psi = 0$. Отсюда следует, что $\eta = 0$, т. е. решение указанной задачи единственно. Таким образом, производная $A'(y[v])$ оказывается обратимой, а дифференцируемость обратного оператора следует из теоремы об обратной функции. $\square$

Лемма 3 показывает, что критерием дифференцируемости состояния системы по управлению оказывается сюръективность производной оператора. Это свойство представляет собой хорошо известное условие Люстерника [10], а его нарушение связано с анормальными точками оператора [21]. Как видно из доказательства леммы 2, это характерно для достаточно гладких функций состояния, причем чем выше гладкость функции, тем более узким оказывается образ производной оператора A в этой точке. В свою очередь, гладкость решения уравнения определяется повышенной регулярностью соответствующего ему свободного члена. Известно, что решение оптимизационной задачи принадлежит пространству управлений. Однако нет гарантии, что соответствующее оптимальное состояние не приведет к нарушению условия Люстерника. Если же это произойдет, то зависимость функции состояния от управления окажется заведомо не дифференцируемой по Гато. Имеем препятствие к использованию в общем случае теоремы 1, а также стандартных методов оптимизации для систем, описываемых нелинейными уравнениями эллиптического типа.

5. Решение оптимизационной задачи без ограничения на скорость роста нелинейности и размерность области

Отметим, что линеаризованное уравнение (7) обладает определенными положительными свойствами и при нарушении условий леммы 1. Так, из соотношения (8) следует априорная оценка решения соответствующей задачи Дирихле в пространстве $Y_* = H_0^1(\Omega)$ для всех значений z из множества $Z_* = H^{-1}(\Omega)$. Отсюда следует, что задача имеет единственное решение из этого пространства для всех свободных членов из указанного множества. Можно установить и более точные результаты. Определим пространство

$$Y_0 = \{\eta \mid \eta \in H_0^1(\Omega), |y[v]|^{\rho/2}\eta \in L_2(\Omega)\},$$

зависящее от точки, в которой осуществляется дифференцирование обратного оператора. Оно является гильбертовым со скалярным произведением

$$(\varphi, \eta) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx + (\rho + 1) \int_\Omega |y[v]|^\rho \varphi \eta \, dx.$$

Сопряженным к нему будет пространство
$$Z_0 = \{\xi + |y[v]|^{\rho/2}\zeta \mid \xi \in H^{-1}(\Omega),\ \zeta \in L_2(\Omega)\}.$$
Из соотношения (8) следует оценка
$$\|y\|_{Y_0} \leq \|z\|_{Z_0}.$$
Тогда для любого $\psi \in Z_0$ уравнение (7) имеет единственное решение $\eta \in Y_0$. Получили ослабленную форму условий теоремы об обратной функции. Поэтому можно ожидать, что рассматриваемый оператор будет обладать свойствами, которые можно интерпретировать как ослабленную форму дифференцируемости.

Определение ([1], [2])**.** Оператор L, действующий из банахова пространства Z в банахово пространство Y, называется $(Z_0, Y_0; Z_*, Y_*)$-*расширенно дифференцируемым* в точке $v \in Z$, если существуют такие линейные топологические пространства Z_0, Y_0, Z_*, Y_*, удовлетворяющие непрерывным вложениям $Z_* \subset Z_0 \subset Z$, $Y \subset Y_0 \subset Y_*$, и линейный непрерывный оператор $D : Z_0 \to Y_0$, что при $\sigma \to 0$ для любого $h \in Z_*$ имеет место сходимость $[L(v + \sigma h) - Lv]/\sigma \to Dh$ в Y_*.

По сравнению с обычной производной Гато расширенная производная D определена на более узком множестве Z_0 и принимает значения из более широкого множества Y_0, а соответствующий предельный переход осуществляется в еще более слабой норме пространства Y_* для еще более узкого класса Z_* направлений h. При этом все указанные пространства, вообще говоря, зависят от точки, в которой осуществляется дифференцирование. Очевидно, $(Z, Y; Z, Y)$-расширенная производная оператора совпадает с обычной производной Гато, а $(Z, Y; Z_*, Y)$-расширенная производная представляет собой производную по подпространству Z_* [22].

Установим расширенную дифференцируемость отображения $y[\cdot] : Z \to Y$. Функция $\eta_\sigma[h] = (y[v + \sigma h] - y[v])/\sigma$ удовлетворяет однородной задаче Дирихле для уравнения
$$-\Delta\eta_\sigma[h] + (g_\sigma[h])^2\eta_\sigma[h] = h,$$
где
$$(g_\sigma[h])^2 = (\rho + 1)|y[v] + \varepsilon(y[v + \sigma h] - y[v])|^\rho, \quad \varepsilon \in [0, 1].$$
Умножив предшествующее равенство на некоторую функцию λ и проинтегрировав результат формально по области Ω с учетом формулы Грина, получим
$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial\eta_\sigma[h]}{\partial x_i}\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}dx + \int_\Gamma \frac{\partial\eta_\sigma[h]}{\partial n}\lambda\,dx + \int_\Omega (g_\sigma[h])^2\eta_\sigma[h]\lambda\,dx = \int_\Omega h\lambda dx. \tag{13}$$
Эта процедура будет обоснованной, если все интегралы, входящие в соотношение (13), имеют смысл. Очевидно, первый интеграл здесь существует при $\lambda \in H_0^1(\Omega)$. Тогда второй интеграл обращается в нуль. Для существования третьего интеграла достаточно потребовать выполнения включения $g_\sigma[h]\lambda \in L_2(\Omega)$. Таким образом, левая часть равенства (13) будет определена для всех функций λ из пространства
$$\{\lambda \mid \lambda \in H_0^1(\Omega),\ g_\sigma[h]\lambda \in L_2(\Omega)\},$$
обозначаемого через $[Z_\sigma(h)]'$. Оно является гильбертовым со скалярным произведением
$$(\lambda, \eta) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial\eta}{\partial x_i}\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}dx + \int_\Omega (g_\sigma[h])^2\eta\lambda\,dx$$
и оказывается сопряженным к пространству
$$Z_\sigma(h) = \{\xi + g_\sigma[h]\zeta \mid \xi \in H^{-1}(\Omega),\ \zeta \in L_2(\Omega)\}.$$

Отметим, что при $\sigma = 0$ $\{Z_\sigma(h)\}'$ не зависит от h и совпадает с определенным ранее пространством Z_0. Аналогично, пространство $Y_\sigma(h) = [Z_\sigma(h)]'$ при $\sigma = 0$ совпадает с рассмотренным ранее пространством Y_0. Указанные множества, а также пространства Y_* и Z_*, заданные для линеаризованного уравнения (7), будут использоваться при определении расширенной производной исследуемой зависимости.

Лемма 4. *Оператор $y[\cdot] : Z \to Y$ в произвольной точке $v \in Z$ имеет $(Z_0, Y_0; Z_*, Y_*)$-расширенную производную $y'[v]$, определенную равенством*

$$\langle \mu, y'[v]h \rangle = \int_\Omega p[\mu]h \, dx \quad \forall \mu \in Y_0', \quad h \in Z_0, \tag{14}$$

где $p[\mu]$ есть решение уравнения (6).

Доказательство. 1. Рассмотрим однородную задачу Дирихле для уравнения

$$-\Delta p + (g_\sigma[h])^2 p = \mu. \tag{15}$$

Умножив это равенство на функцию p и проинтегрировав результат формально по области Ω, установим соотношение

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int_\Omega (g_\sigma[h]p)^2 dx = \int_\Omega \mu p \, dx, \tag{16}$$

аналогичное (8). Левая часть этого равенства представляет собой квадрат нормы функции p в пространстве $[Z_\sigma(h)]'$, а правая — значение линейного непрерывного функционала μ в точке p. Отсюда следует, что для любого $\mu \in [Y_\sigma(h)]'$ уравнение (15) имеет единственное решение $p = p_\sigma[\mu, h]$ из класса $[Z_\sigma(h)]'$. Тогда в соотношении (13) можно определить $\lambda = p_\sigma[\mu, h]$ со значением h из множества $Z_\sigma(h)$ (чтобы имел смысл интеграл в правой части этого соотношения). В результате получаем равенство

$$\int_\Omega \mu \eta_\sigma[h] dx = \int_\Omega h p_\sigma[\mu, h] dx \quad \forall \mu \in [Y_\sigma(h)]', \quad h \in Z_\sigma(h). \tag{17}$$

Очевидно, уравнение (15) при $\sigma = 0$ не содержит h и принимает вид (6). Тогда справедливо включение $p[\mu] \in Z_0'$ для любого $\mu \in Y_0'$. Следовательно, соотношение (14) действительно определяет некоторый линейный непрерывный оператор $y'[v] : Z_0' \to Y_0'$. Покажем, что это будет расширенная производная зависимости решения рассматриваемой краевой задачи от управления, т. е. при $\sigma \to 0$ имеет место сходимость $\eta_\sigma[h] \to y'[v]h$ в Y_* для всех $h \in Z_*$. Отметим, что оба соотношения (14) и (17) справедливы при $\mu \in Y_*'$ и $h \in Z_*$. Для получения желаемого результата перейдем к пределу в равенстве (15) при $p = p_\sigma[\mu, h]$ и $\sigma \to 0$ для соответствующих значений параметров μ и h.

2. Пусть имеет место сходимость $\sigma \to 0$, а значит, $(v + \sigma h) \to v$ в Z для любого $h \in Z_*$. Учитывая слабую непрерывность отображения $y[\cdot] : Z \to Y$, заключаем, что $y[v+\sigma h] \to y[v]$ слабо в Y. Отсюда вытекает ограниченность семейства $\{y[v + \sigma h]\}$ в пространстве Y, а следовательно, и в $L_q(\Omega)$ для любого $h \in Z_*$. Тогда семейство $\{g_\sigma[h]\}$ ограничено в $L_{2q/\rho}(\Omega)$. Из соотношения (15) при $\mu \in Y_*'$ имеем неравенство

$$\|p_\sigma[\mu, h]\|^2_{Z_*'} + \|g_\sigma[h]p\|^2_{L_2(\Omega)} \le \|p_\sigma[\mu, h]\|_{Z_*'} \|\mu\|_{Y_*'}.$$

В результате получаем оценки

$$\sup_{\mu \in M} \|p_\sigma[\mu, h]\|_{Z_*'} \le 1, \quad \sup_{\mu \in M} \|g_\sigma[h]p\|_{L_2(\Omega)} \le 1,$$

где $M = \{\mu \in Y_*' \mid \|\mu\| = 1\}$. Таким образом, для любого $h \in Z_*$ семейство $\{p_\sigma[\mu, h]\}$ ограничено в пространстве Z_*', а $\{g_\sigma[h]p_\sigma[\mu, h]\}$ — в $L_2(\Omega)$ равномерно по $\mu \in M$. Воспользовавшись неравенством Гёльдера, установим ограниченность $\{(g_\sigma[h])^2 p_\sigma[\mu,h]\}$ в пространстве $L_{q'}(\Omega)$. Применяя теорему Банаха–Алаоглу, после выделения подпоследовательностей с сохранением исходных обозначений будем иметь $p_\sigma[\mu,h] \to \varphi$ слабо в Z'_* и $(g_\sigma[h])^2 p_\sigma[\mu,h] \to \psi$ слабо в $L_{q'}(\Omega)$ для любого $h \in Z_*$ равномерно по $\mu \in M$. Согласно теореме Реллиха–Кондрашова пространства Y и Z'_* вложены компактно в $L_2(\Omega)$. Тогда, извлекая подпоследовательности, устанавливаем, что $y[v+\sigma h] \to y[v]$ и $p_\sigma[\mu,h] \to \varphi$ сильно в $L_2(\Omega)$ и почти всюду (п. в.) на Ω. Отсюда следует, что $(g_\sigma[h])^2 p_\sigma[\mu,h] \to (\rho+1)|y[v]|^\rho \varphi$ п. в. на Ω. Пользуясь леммой 1.3 ([17], с. 25), заключаем, что $(g_\sigma[h])^2 p_\sigma[\mu,h] \to (\rho+1)|y[v]|^\rho \varphi$ слабо в $L_{q'}(\Omega)$ для любого $h \in Z_*$ равномерно по $\mu \in M$. Тогда в результате перехода к пределу в равенстве (15) при $p = p_\sigma[\mu,h]$ и $\sigma \to 0$ получим $\varphi = p[\mu]$.

3. Из определения нормы в сопряженном пространстве и соотношений (14) и (17) находим

$$\|\eta_\sigma[h] - y'[v]h\|_{Y_*} = \sup_{\mu\in M} \left| \int_\Omega \mu(\eta_\sigma[h] - y'[v]h)dx \right| = \sup_{\mu\in M} \left| \int_\Omega (p_\sigma[\mu,h] - p[\mu])h\,dx \right| \quad \forall h \in Z_*.$$

Учитывая сходимость $p_\sigma[\mu,h] \to p[\mu]$ слабо в Z'_* для любого $h \in Z_*$ равномерно по $\mu \in M$, заключаем, что $\eta_\sigma[h] \to y'[v]h$ в Y_* для всех $h \in Z_*$. Тогда $y'[v]$ действительно является расширенной производной зависимости функции состояния системы от управления в точке v. □

При выполнении условий леммы 1 соотношение (14) принимает вид (5), а значит, соответствующая расширенная производная сводится к производной Гато. В то же время при нарушении этих условий расширенная производная существует в отсутствии производной Гато. Пусть размерность заданной области больше двух. Постепенно увеличиваем показатель нелинейности ρ. В соответствии с леммой 1 до тех пор, пока выполнено вложение $H^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, указанная зависимость остается дифференцируемой по Гато. Однако достигается такое критическое значение параметра, при переходе через которое вложение перестает выполняться. Тогда рассматриваемая зависимость не будет дифференцируемой в обычном смысле, т. е. ее свойства резко изменились при малом изменении параметра задачи ρ. Лемма 4 дает более точную картину явления. Исследуемая зависимость всегда остается расширенно дифференцируемой. Однако с увеличением показателя нелинейности и размерности области пространства, входящие в определение производной, начиная с некоторого момента, отличаются от пространств, в которых действует сам дифференцируемый оператор. По мере роста указанных параметров (т. е. с увеличением степени сложности задачи) дифференциальные свойства оператора постепенно ухудшаются, а именно, расширенная производная все сильнее отличается от классической производной. Пространства, в которых действует производная Гато, не зависят ни от особенностей самого оператора, ни от точки, где осуществляется дифференцирование. В определении расширенной производной ситуация иная, что позволяет добиться лучших результатов. В частности, установить дифференцируемость соответствующего оператора, хотя и в более слабом смысле, однако при тех значениях параметров задачи, когда производная Гато не существует.

Воспользуемся полученными результатами для анализа оптимизационных задач, характеризуемых уравнением (1) в условиях отсутствия дифференцируемости по Гато решения уравнения состояния по управлению. При вычислении производной функционала I в процессе дифференцирования отображения $v \to K(y[v])$ в отсутствии вложения $H^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ получим сходимость $(y[v+\sigma h] - y[v])/\sigma \to y'[v]h$ лишь в пространстве Y_*, но не в Y. Тогда желаемый результат сможем установить лишь в том случае, когда функционал K определен на множестве Y_*, т. е. в качестве K может быть выбран дифференцируемый по Фреше функционал на Y_*. То обстоятельство, что указанная сходимость реализуется лишь для направлений h из множества Z_*, но не из всего пространства Z, не сужает класс решаемых задач.

Следствие 3. Если функционал J дифференцируем по подпространству Z_*, а K дифференцируем по Фреше на Y_*, то функционал I в произвольной точке $v \in Z$ имеет производную $I'(v) = J'(v) + p$ по подпространству Z_*, где p — решение однородной задачи Дирихле для уравнения (10).

Доказательство. Производная по подпространству характеризуется соотношением

$$\lim_{\sigma \to 0}[I(v + \sigma h) - I(v)]/\sigma = \langle I'(v), h\rangle \quad \forall h \in Z_*.$$

В соответствии с леммой 4 имеет место сходимость $(y[v + \sigma h] - y[v])/\sigma \to y'[v]h$ в Y_* для всех $h \in Z_*$. Учитывая свойства функционалов J и K, приходим к соотношению

$$\langle I'(v), h\rangle = \langle J'(v), h\rangle + \langle K'(y[v]), y'[v]h\rangle \quad \forall h \in Z_*.$$

Пользуясь включением $K'(y[v]) \in Y_*'$, полагаем в равенстве (6) $\mu = K'(y[v])$. В результате приходим к уравнению (10) и условию

$$\langle I'(v), h\rangle = \langle J'(v) + p, h\rangle \quad \forall h \in Z_*,$$

откуда вытекает утверждение следствия. □

Очевидно, равенство $I'(v) = 0$ остается необходимым условием экстремума функционала в данной точке и в том случае, когда под $I'(v)$ понимается производная по подпространству. Тогда справедлива

Теорема 2. *При выполнении условий следствия* 3 *решение* v *задачи* P *удовлетворяет условию стационарности* $J'(v) + p = 0$.

Рассмотрим частный случай задачи с функционалом

$$I_2(v) = \frac{\chi}{2}\|v\|^2_{Z_*} + \frac{1}{2}\|y[v] - y_d\|^2_{Y_*},$$

где $\chi > 0$, $y_d \in Y_*'$ — известная функция. То обстоятельство, что функционал определен не на всем пространстве управлений, принципиальной роли не играет, поскольку интересен лишь его минимум, а не значения на произвольном управлении. Такая точка зрения характерна, например, для теории сингулярных управляемых систем ([11], [15]).

Следствие 4. Решение задачи минимизации функционала I_2 в пространстве Z определяется по формуле $v = -\chi\Lambda^1 p$, где p находится из однородной задачи Дирихле для системы нелинейных эллиптических уравнений (11), (12).

Действительно, повторив доказательство следствия 2 и воспользовавшись следствием 3, установим, что производная критерия оптимальности характеризуется равенством

$$\langle I'(v), h\rangle = \int_\Omega \chi\Lambda v h\,dx + \int_\Omega (\Delta y_d - \Delta y[v])y'[v]h\,dx \quad \forall h \in Z_*.$$

Тогда производная по подпространству $I'(v)$ имеет тот же вид, что и соответствующая производная Гато в следствии 2. Это обстоятельство позволяет завершить доказательство так же, как и раньше.

Отметим, что в следствиях 2 и 4 фактически рассматривается один и тот же функционал. Однако если в первом случае функция состояния и минимизируемый функционал оказывались дифференцируемыми по Гато, что гарантировалось условиями леммы 1, то во втором случае зависимость функции состояния от управления была лишь расширенно дифференцируемой, а функционал — дифференцируемым по подпространству. При этом никаких ограничений на показатель нелинейности и размерность данной области не налагалось. Тем самым за счет использования более слабой формы производной удалось получить условия оптимальности в ситуации, не поддающейся анализу стандартным способом. В известных работах по оптимизации нелинейных стационарных систем (в частности, в [11]–[16]) на указанные параметры непременно накладываются соответствующие ограничения (например, [11], с. 260; [15], с. 127).

Покажем, что за счет иного выбора пространств, входящих в определение расширенной производной, появляется возможность получения условий оптимальности для задачи с другими классами функционалов.

6. Решение оптимизационной задачи с модификацией функциональных пространств

Вернемся к рассмотрению соотношения (13), в котором функция λ выбиралась из пространства $H_0^1(\Omega)$, в результате чего имел смысл первый интеграл в его левой части. Того же результата можно добиться, предположив справедливость включения $\lambda \in H^1(\Omega)$, т. е. для более широкого класса функций λ. Однако пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций $D(\Omega)$ в нем уже не плотно, вследствие чего соответствующее сопряженное пространство, с которым связана входящая в правую часть равенства функция h, уже не ассоциируется с распределениями. Тем не менее, при $\lambda \in H^1(\Omega)$ в силу теоремы о следах справедливы включения $\gamma\lambda \in H^{1/2}(\Gamma)$ и $\gamma_1(\eta_\sigma[h]) \in H^{-1/2}(\Gamma)$, где γ есть оператор следа на границу Γ, а γ_1 выражает взятие производной по нормали. Тогда будет иметь смысл и второй интеграл в левой части равенства (13). Для существования третьего интеграла в этом соотношении, как и раньше, достаточно потребовать выполнения включения $g_\sigma[h]\lambda \in L_2(\Omega)$. Таким образом, левая часть равенства (13) будет определена для всех функций λ из пространства

$$P_\sigma[h] = \{\lambda \mid \lambda \in H^1(\Omega),\ g_\sigma[h]\lambda \in L_2(\Omega)\}.$$

Оно является гильбертовым со скалярным произведением

$$(\lambda, \eta) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} dx + \int_\Omega (g_\sigma[h])^2 \eta\lambda\, dx.$$

Соответствующее сопряженное пространство определяется по формуле

$$(P_\sigma[h])' = \{\xi + g_\sigma[h]\zeta \mid \xi \in [H^1(\Omega)]',\ \zeta \in L_2(\Omega)\}.$$

Согласно норме на сумме пространств ([23], с. 23) имеем

$$\|\psi\|_{(P_\sigma[h])'} = \inf\max\{\|\xi\|_{[H^1(\Omega)]'},\ \|\zeta\|_{L_2(\Omega)}\},$$

где нижняя грань берется по всем функциям $\xi \in [H^1(\Omega)]'$, $\zeta \in L_2(\Omega)$ таким, что $\psi = \xi + g_\sigma[h]\zeta$. При $\sigma = 0$ указанные пространства не зависят от h. Поэтому будем пользоваться обозначением

$$P_0 = \{\lambda \mid \lambda \in H^1(\Omega),\ |y([v])|^{\rho/2}\lambda \in L_2(\Omega)\}.$$

При $\lambda \in P_\sigma[h]$ интеграл в правой части равенства (13) будет существовать для $h \in (P_\sigma[h])'$. Однако пространство $[H^1(\Omega)]'$ не ассоциируется с распределениями на множестве Ω. Поэтому нет уверенности в том, что такие элементы h будут принадлежать пространству управлений. Требуется подобрать класс функций h таким образом, чтобы, с одной стороны, он оказался подмножеством пространства управлений, а с другой, чтобы интеграл в правой части равенства (13) имел смысл при $\lambda \in P_\sigma[h]$. Выбрав таким $V = L_2(\Omega)$, приходим к следующему утверждению.

Лемма 5. *Оператор $y[\cdot] : Z \to Y$ в произвольной точке $v \in Z$ имеет $(P'_0, V; V, V)$-расширенную производную $y'[v]$, характеризуемую равенством*

$$\int_\Omega \mu_\Omega y'[v]h\,dx + \int_\Gamma \mu_\Gamma \frac{\partial(y'[v]h)}{\partial n}dx = \int_\Omega p[\mu]h\,dx \quad \forall \mu \in [L_2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)], \quad h \in P'_0, \tag{18}$$

где $\mu = (\mu_\Omega, \mu_\Gamma)$, $p[\mu]$ есть решение краевой задачи

$$-\Delta p[\mu] + (\rho+1)|y[v]|^\rho p[\mu] = \mu_\Omega, \quad x \in \Omega, \tag{19}$$

$$p[\mu] = \mu_\Gamma,\ x \in \Gamma. \tag{20}$$

Доказательство. 1. Для любых значений $h \in V$ и произвольного числа σ рассмотрим неоднородную задачу Дирихле

$$-\Delta p + (g_\sigma[h])^2 p = \mu_\Omega, \quad x \in \Omega, \tag{21}$$

$$p = \mu_\Gamma, \quad x \in \Gamma, \tag{22}$$

где $\mu_\Omega \in L_2(\Omega)$, $\mu_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$. Умножив равенство (21) на функцию p и проинтегрировав результат формально по области Ω с учетом формулы Грина и условия (22), будем иметь

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int_\Omega (g_\sigma[h]p)^2 dx \le \|\mu_\Omega\|_{L_2(\Omega)}\|p\|_{L_2(\Omega)} + \|\mu_\Gamma\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\|\gamma_1 p\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

Воспользовавшись неравенством Фридрихса и теоремой о следах, установим

$$\|p\|^2_{L_2(\Omega)} \le c_1\Big[\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)^2 dx + \|p\|_{L_2(\Gamma)}\Big] \quad \forall p \in H^1(\Omega),$$

$$\|\gamma_1 p\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \le c_2\|p\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall p \in H^1(\Omega),$$

где положительные константы c_1 и c_2 зависят лишь от области Ω. Тогда из предшествующего соотношения следуют оценки

$$\|p\|^2_{H^1(\Omega)} \le c_3[\|\mu_\Omega\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\mu_\Gamma\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}],$$

$$\|g_\sigma[h]p\|^2_{L_2(\Gamma)} \le c_4[\|\mu_\Omega\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\mu_\Gamma\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}],$$

где положительные константы c_3 и c_4 зависят лишь от области Ω. Тем самым линейная задача Дирихле (21), (22) допускает априорную оценку решения в пространстве $P_\sigma[h]$. Пользуясь теорией линейных уравнений эллиптического типа (например, [20], с. 78), заключаем, что для любых $h \in V$, $\mu_\Omega \in L_2(\Omega)$, $\mu_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$ и произвольного числа σ задача (21), (22) имеет единственное решение $p = p_\sigma[h,\mu]$ из класса $P_\sigma[h]$. В частности, задача (19), (20) однозначно разрешима в классе P_0. Определив в (13) $\lambda = p_\sigma[h,\mu]$, получим

$$\int_\Omega \mu_\Omega \eta_\sigma[h]dx + \int_\Gamma \mu_\Gamma \gamma_1(\eta_\sigma[h])dx = \int_\Omega h p_\sigma[\mu,h]dx \quad \forall \mu \in [L_2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)], \quad h \in V. \tag{23}$$

2. Пусть теперь имеет место сходимость $\sigma \to 0$. Тогда для любого $h \in V$ имеем $y[v+\sigma h] \to y[v]$ слабо в Y. Отсюда следует (см. доказательство леммы 4) ограниченность семейства

$\{g_\sigma[h]\}$ в пространстве $L_{2q/\rho}(\Omega)$. Из выведенных оценок получим ограниченность семейств $\{p_\sigma[\mu,h]\}$ и $\{g_\sigma[h]p_\sigma[\mu,h]\}$ в пространствах $H^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ равномерно по μ из множества $M = \{\mu \in [L_2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)] \,|\, \|\mu\| = 1\}$. Отсюда следует равномерная ограниченность $\{(g_\sigma[h])^2 p_\sigma[\mu,h]\}$ в пространстве $L_{q'}(\Omega)$. Тогда после выделения подпоследовательности установим сходимость $p_\sigma[\mu,h] \to \varphi$ слабо в $H^1(\Omega)$ равномерно по $\mu \in M$. Повторяя рассуждения из доказательства леммы 4, заключаем, что $\varphi = p[\mu]$, где $p[\mu]$ есть решение задачи (19), (20).

3. Соотношение (18) при $\mu_\Gamma = 0$ определяет некоторый оператор $y'[v] : P_0' \to V$. При этом из условий (18) и (23) будем иметь

$$\|\eta_\sigma[h] - y'[v]h\|_V = \sup_{\|\mu_\Omega\|_V=1} \left| \int_\Omega \mu_\Omega(\eta_\sigma[h] - y'[v]h)dx \right| \le$$
$$\le \sup_{\mu\in M} \left| \int_\Omega (p_\sigma[\mu,h] - p[\mu])h\,dx \right| \quad \forall h \in V.$$

Учитывая равномерную по $\mu \in M$ сходимость $p_\sigma[\mu,h] \to p[\mu]$ слабо в $H^1(\Omega)$, а значит, и в V, заключаем, что $\eta_\sigma[h] \to y'[v]h$ в V для всех $h \in V$. Отсюда следует, что оператор $y'[v]$ действительно является $(P_0', V; V, V)$-расширенной производной отображения $y[\cdot] : Z \to Y$ в точке v. Пользуясь теоремой о следах, получаем, что $\gamma_1(\eta_\sigma[h]) \to \gamma_1(y'[v]h)$ в $H^{-1/2}(\Omega)$. Тогда, перейдя к пределу в соотношении (23), установим, что равенство (18) справедливо в общем виде. □

Следствие 5. Пусть функционал J дифференцируем по подпространству V, $K(y) = K_\Omega(y) + K_\Gamma(\gamma_1 y)$, где функционалы K_Ω и K_Γ дифференцируемы по Фреше на V и $H^{-1/2}(\Omega)$. Тогда функционал I в произвольной точке $v \in Z$ имеет производную $I'(v) = J'(v) + p$ по подпространству V, где p — решение задачи

$$-\Delta p + (\rho+1)|y[v]|^\rho p = K_\Omega(y[v]), \quad x \in \Omega, \tag{24}$$
$$p = K_\Gamma\{\gamma_1(y[v])\}, \quad x \in \Gamma. \tag{25}$$

Доказательство. Справедливо соотношение

$$\langle I'(v), h\rangle = \langle J'(v), h\rangle + \langle K_\Omega'(y[v]), y'[v]h\rangle + \langle K_\Gamma'\{\gamma_1(y[v])\}, \gamma_1(y'[v]h)\rangle \quad \forall h \in V.$$

С помощью равенств (19), (20) получаем краевую задачу (24), (25). Тогда в силу (18) предшествующее соотношение приводится к виду

$$\langle I'(v), h\rangle = \langle J'(v) + p, h\rangle \quad \forall h \in V,$$

откуда следует необходимый результат. □

Справедлива

Теорема 3. *При выполнении условий следствия* 5 *решение* v *задачи* P *удовлетворяет условию стационарности* $J'(v) + p = 0$.

Рассмотрим частный случай задачи с функционалом

$$I_3(v) = \frac{\chi}{2}\|v\|_V^2 + \frac{\chi_\Omega}{2}\|y[v] - y_{\Omega d}\|_V^2 + \frac{\chi_\Gamma}{2}\left\|\frac{\partial y[v]}{\partial n} - y_{\Gamma d}\right\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)},$$

где $\chi > 0$, $\chi_\Omega > 0$, $\chi_\Gamma > 0$, $y_{\Omega d} \in L_2(\Omega)$, $y_{\Gamma d} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ — известная функция. Оптимизационные задачи такого типа (с граничным наблюдением) ранее рассматривались лишь для линейных систем ([20], с. 83) ввиду существенных трудностей с дифференцированием нормальной производной состояния системы по управлению, особенно при больших значениях показателя нелинейности и размерности области. Определим канонический изоморфизм $\Lambda_\Gamma : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma)$, существующий в силу теоремы Рисса и характеризуемый соотношением

$$(\varphi, \psi)_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \langle \Lambda_\Gamma \varphi, \psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Следствие 6. Решение задачи минимизации функционала I_3 в пространстве Z определяется по формуле $v = -\chi p$, где p находится из системы

$$-\Delta y + |y|^\rho y = f - \chi p, \quad x \in \Omega; \quad y = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{26}$$

$$-\Delta p + (\rho + 1)|y|^\rho p = y - y_{\Omega d}, \quad x \in \Omega; \quad p = \chi_\Gamma(\gamma_1 y - y_{\Gamma d}), \quad x \in \Gamma. \tag{27}$$

Доказательство. Определяем

$$J(v) = \frac{\chi}{2}\|v\|_V^2, \quad K_\Omega(y) = \frac{\chi_\Omega}{2}\|y - y_{\Omega d}\|_V^2, \quad K_\Gamma(z) = \frac{\chi_\Gamma}{2}\|z - y_{\Gamma d}\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

Тогда справедливы соотношения

$$\langle J'(v), h \rangle = \chi(v, h)_V \quad \forall h \in V,$$

$$\langle K'_\Omega(y), \varphi \rangle = \chi_\Omega(y - y_{\Omega d}, \varphi)_V \quad \forall \varphi \in V,$$

$$\langle K'_\Gamma(z), \psi \rangle = \chi_\Gamma(z - y_{\Gamma d}, \psi)_{H^{-1/2}(\Gamma)} \quad \forall \psi \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Поскольку пространство V самосопряженно, имеем $J'(v) = \chi v$ и $K'_\Omega(y) = \chi_\Omega(y - y_{\Omega d})$.

Учитывая теорему Рисса, получаем $K'_\Gamma(z) = \chi_\Gamma \Lambda_\Gamma(z - y_{\Gamma d})$. В результате установим условие стационарности $\chi v + p = 0$, где p есть решение краевой задачи

$$-\Delta p + (\rho + 1)|y|^\rho p = \chi_\Omega(y - y_{\Omega d}), \quad x \in \Omega; \quad p = \chi_\Gamma \Lambda_\Gamma(\gamma_1 y - y_{\Gamma d}), \quad x \in \Gamma.$$

Подставляя значение $v = -\chi p$ в уравнение состояния, приходим к системе (27). □

Итак, для нахождения оптимального управления в рассматриваемом примере сначала решается система (26), (27), а затем находится управление по указанной формуле.

За счет более тонкого выбора пространства V в лемме 5 (например, [24], с. 71) можно усилить свойства расширенной дифференцируемости зависимости функции состояния от управления и охватить более широкий класс минимизируемых функционалов. Если функционал минимизируется не на всем пространстве, а на его выпуклом подмножестве, то условие стационарности всюду заменяется соответствующим вариационным неравенством на основе стандартного приема ([20], с. 18) в случае обычных производных Гато и его естественного обобщения ([2], с. 267) для расширенных производных. При более сложных ограничениях на систему полученные результаты можно использовать совместно с известными методами общей теории экстремума ([6]–[10]), а при наличии негладких членов в критерии оптимальности — вместе с методами негладкого анализа ([3]–[5]). Аналогичные результаты могут быть установлены и для других нелинейных бесконечномерных управляемых систем.

Литература

[1] Serovaiskii S. *Calculation of functional gradients and extended differentiation of operators* // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2005. – V. 13. – № 4. – P. 383–396.

[2] Серовайский С.Я. *Оптимизация и дифференцирование.* Т. 1. *Минимизация функционалов. Стационарные системы.* – Алматы: Print-S, 2006. – 390 с.

[3] Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* – М.: Мир, 1979. – 400 с.

[4] Кларк Ф. *Оптимизация и негладкий анализ.* – М.: Наука, 1988. – 280 с.

[5] Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.* – М.: Наука, 1990. – 431 с.

[6] Neustadt L.W. *An abstract variational theory with application to a broad class of optimization problems* // SIAM J. Control. – 1966. – V. 4. –№ 3. – P. 505–527.

[7] Neustadt L.W. *An abstract variational theory with application to a broad class of optimization problems.* II // SIAM J. Control. – 1967. – V. 5. – № 1. – P. 90–137.

[8] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. *Теория экстремальных задач.* – М.: Наука, 1974. – 480 с.

[9] Матвеев А.С., Якубович В.А. *Абстрактная теория оптимального управления.* – СПб: Изд-во СПб ун-та, 1994. – 361 с.

[10] Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П. *Теорема Люстерника и теория экстремума* // УМН. – 1980. – Т. 35. – Вып. 6. – С. 11–46.

[11] Лионс Ж.-Л. *Управление сингулярными распределенными системами.* – М.: Наука, 1987. – 368 с.

[12] Райтум У.Е. *Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений.* – Рига: Зинатне, 1989. – 280 с.

[13] Alibert J.-J., Raymond J.-P. *Boundary control of semilinear elliptic equations with discontinuous leading coefficients and unbounded controls* // Numer. Funct. Anal. Optim. – 1997. – V. 18. – № 3–4. – P. 235–250.

[14] Arada N., Raymond J.-P. *State-constrained relaxed problems for semilinear elliptic equations* // J. Math. Anal. Appl. – 1998. – V. 223. – №. 1. – P. 248–271.

[15] Фурсиков А.В. *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения.* – Новосибирск: Научная книга, 1999. – 352 с.

[16] Voisei M.D. *Mathematical programming problems governed by nonlinear elliptic PDEs* // SIAM J. Optim. – 2007. – V. 18. – № 4. – P. 1231–1249.

[17] Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* – М.: Мир, 1972. – 596 с.

[18] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1977. – 744 с.

[19] Обен Ж.-П., Экланд И. *Прикладной нелинейный анализ.* – М.: Мир, 1988. – 510 с.

[20] Лионс Ж.-Л. *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.* – М.: Мир, 1972. – 414 с.

[21] Арутюнов А.В. *Необходимые условия второго порядка в задачах оптимального управления* // Докл. РАН. – 2000. – Т. 371. – № 1. – С. 10–13.

[22] Авербух В.И., Смолянов О.Г. *Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах* // УМН. – 1967. – Т. 22. – Вып. 6. – С. 201–260.

[23] Гаевский Х., Грегер К. Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1978. – 336 с.

[24] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* – М.: Мир, 1971. – 372 с.

С.Я. Серовайский

профессор, кафедра вычислительной математики,
Казахский национальный университет,
ул. Масанчи, д. 39/47, г. Алматы, 050012, Республика Казахстан,

`e-mail:` serovajskys@mail.ru

S.Ya. Serovaiskii

Professor, Chair of the Calculus Mathematics,
Kazakh National University,
39/47 Masanchi str., Almaty, 050012 Republic of Kazakhstan,

`e-mail:` serovajskys@mail.ru