И. И. Сахаев, О конечной порожденности проективных модулей, *Изв. вузов. Матем.*, 1977, номер 9, 69–79

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1977 МАТЕМАТИКА 9 (184)

УДК 512

И. И. Сахаев

О КОНЕЧНОЙ ПОРОЖДЕННОСТИ ПРОЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ

В заметке всюду предполагается, что кольца ассоциативны, с единицей, а модули над ними унитарны. Будем обозначать через $J(\Lambda)$ радикал Джекобсона кольца Λ.

Изоморфны ли левые Λ-проективные модули P и P', если изоморфны их фактор-модули $P/J(\Lambda)P$ и $P'/J(\Lambda)P'$? Этот вопрос положительно решен в частных случаях: Джекобсоном в случае, когда каждый из модулей P и P' порождается идемпотентным элементом кольца Λ ([1], с. 83, предложение 1); Бассом при предположении конечной порожденности модулей P и P' ([2], предложение 2.12); наконец, Беком в случае, когда конечно порожден один из модулей P и P' ([3], с. 233 теорема 5).

В заметке этот вопрос утвердительно решается при предположении проективности конечно порожденных левых Λ-плоских модулей и конечной порожденности только фактор-модуля $P/J(\Lambda)P$, причем показывается конечная порожденность модулей P и P' (следствие 1).

Нами рассматривается задача: когда левый Λ-проективный модуль P и его фактор-модуль $P/J(\Lambda)P$ одновременно конечно порождены? Эта задача положительно решается в случае, когда проективны все конечно порожденные левые Λ-плоские модули Π, для которых фактор-модули $\Pi/J(\Lambda)\Pi$ являются $\Lambda/J(\Lambda)$-проективными (теорема 1). Далее доказано, что если все конечно порожденные левые Λ-плоские модули проективны, все конечно порожденные левые $\Lambda/J(\Lambda)$-плоские модули проективны, а также все конечно порожденные правые $\Lambda/J(\Lambda)$-плоские модули проективны, то всякий конечно порожденный правый Λ-плоский модуль проективен (теорема 2). Последнее утверждение является обобщением результата Иондрупа о том, что если кольцо Λ лево-нетерово, то всякий конечно порожденный правый Λ-плоский модуль проективен [4]. Полученные результаты позволяют положительно решить в частном случае гипотезу о проективности конечно порожденных плоских модулей над полулокальными кольцами ([5], с. 91, замечание).

Кроме случаев, которые особо будут оговорены, мы будем пользоваться следующими обозначениями:

I. $\varphi:\Lambda\to\Lambda/J(\Lambda)$ — естественный гомоморфизм на фактор-кольцо, $\overline{S}=\varphi(S)$ для любого подмножества S кольца Λ;

II. $\psi:M\to M/J(\Lambda)M$ — естественный гомоморфизм левого Λ-модуля M на фактор-модуль, $\overline{N}=\psi(N)$ для любого подмножества N модуля M;

III. ${}^{(m)}\Lambda = \sum_{i=1}^{m} \oplus \Lambda_i$ — левый Λ-свободный модуль, где $\Lambda_i = \Lambda$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$;

IV. $\Lambda_m = \mathrm{Hom}_\Lambda({}^{(m)}\Lambda, {}^{(m)}\Lambda)$ — кольцо квадратных матриц порядка n над кольцом Λ;

V. Λ-mod — категория всех левых Λ-модулей;

VI. $h_m = \mathrm{Hom}_\Lambda({}^{(m)}\Lambda, \cdot)$ — функтор с областью определения Λ-mod и областью значений Λ_m-mod;

VII. $\Theta_m = {}^{(m)}\Lambda \otimes_{\Lambda_m} \cdot$ — функтор с областью определения Λ_m-mod и областью значений Λ-mod;

VIII. $Pf(\Lambda)$ — множество всех таких левых Λ-проективных модулей P, для которых фактор-модуль $P/J(\Lambda)P$ является конечно порожденным;

IX. $M = (a_1, a_2, \ldots)$ — левый Λ-модуль, порожденный элементами $a_1, a_2, \ldots$.

Лемма 1. *Если модуль P принадлежит $Pf(\Lambda)$, то P является счетно-порожденным.*

Доказательство. Пусть $P \in Pf(\Lambda)$. В силу проективности и теоремы 1 [6] модуль $P = \sum_{\alpha \in I} \oplus P_\alpha$, где P_α-счетно порожденный левый Λ-проективный модуль. Так как фактор-модуль $P/J(\Lambda)P = \sum_{\alpha \in I} \oplus P_\alpha / J(\Lambda) P_\alpha$ является конечно порожденным, то существуют такие индексы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, принадлежащие к множеству I, что $P/J(\Lambda)P = \sum_{i=1}^{n} \oplus P_{\alpha_i}/J(\Lambda)P_{\alpha_i}$, $P_\alpha/J(\Lambda)P_\alpha = (0)$, $\alpha \in I$, $\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Тогда $P_\alpha = J(\Lambda) \cdot P_\alpha$ и в силу предложения 7 [7] (с. 474) получим, что $P_\alpha = (0)$ $(\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$. Следовательно, модуль $P = \sum_{i=1}^{n} \oplus P_{\alpha_i}$ будет счетно-порожденным, что и требовалось доказать.

Для всякого модуля P, принадлежащего $Pf(\Lambda)$, существует счетно-порожденный левый Λ-свободный модуль F такой, что $F = P \oplus Q$. Если подмножество $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ образует базу модуля F, то $\bar{X} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots\}$ является базой левого $\bar{\Lambda}$-свободного модуля $\bar{F}$. В силу конечной порожденности модуля $P/J(\Lambda) \cdot P$ и того, что $\bar{P} = P + J(\Lambda) \cdot F / J(\Lambda) \cdot F \cong P/J(\Lambda) \cdot P$, существует такое целое число $m(P) \geqslant 1$, что $\bar{P} \subseteq \sum_{i=1}^{m(P)} \oplus \bar{\Lambda} x_{\alpha_i}$ или

$$P \subseteq \sum_{i=1}^{m(P)} \oplus \Lambda x_{\alpha_i} + J(\Lambda) \cdot F. \tag{1}$$

Обозначим через $Pz(\Lambda)$ подмножество множества $Pf(\Lambda)$, состоящее из всех P, для которых $m(P) = 1$.

Лемма 2. *Для любого P, принадлежащего $Pf(\Lambda)$, существует такое целое число $m \geqslant 1$, что левый Λ_m-модуль $h_m(P)$ принадлежит $Pz(\Lambda_m)$ и конечная порожденность одного из модулей P и $h_m(P)$ влечет конечную порожденность другого.*

Доказательство. Пусть $P \in Pf(\Lambda)$ и $F = P \oplus Q$ — счетно-порожденный левый Λ-свободный модуль. Имея в виду соотношения (1), можем считать, что $F_k = (x_{1+mk}, \ldots, x_{m(k+1)})$, $F = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus F_k$ и

$$P \subseteq F_0 + J(\Lambda) \cdot F, \tag{2}$$

причем элементы x_{i+km} $(i = 1, 2, \ldots, m)$ образуют базу модуля F_k и $m(P) = m$. Так как $h_m(F_k) \cong \Lambda_m$ и согласно предложению 1.2 [2] (с. 57) $h_m(F) = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus h_m(F_k)$, то $h_m(F)$—свободный левый Λ_m-модуль и $h_m(F) = h_m(P) \oplus h_m(Q)$. Согласно предложению 2.6 [2] (с. 82) $h_m(J(\Lambda) \cdot F) = J(\Lambda_m) \cdot h_m(F)$, поэтому (2) влечет соотношение

$$h_m(P) \subseteq h_m(F_0) + J(\Lambda_m) \cdot h_m(F). \tag{3}$$

Так как $h_m(F_k)$ — циклический Λ_m-свободный модуль, а модуль $h_m(P)$ является Λ_m-проективным, то соотношение (3) показывает, что $h_m(P)$ принадлежит $Pz(\Lambda_m)$. Для завершения доказательства леммы 2 теперь достаточно применить теорему 3.5 [2] (с. 66).

Из леммы 2 следует, что при рассмотрении вопроса о конечной порожденности модулей из $Pf(\Lambda)$ достаточно ограничиться рассмотрением модулей из $Pz(\Lambda_m)$, а значит, из $Pz(\Lambda)$.

Пусть теперь P принадлежит $Pz(\Lambda)$, $F = P \oplus Q$ является Λ-свободным модулем со счетной базой $x_1, x_2, \ldots$ Далее, можно считать, что

$$P \subseteq \Lambda x_1 + J(\Lambda) \cdot F. \tag{4}$$

Мы определим элементы $a_k, u_1^{(k)}, \ldots, u_{n_{k-1}}^{(k)}$ и подмодуль $P^{(k)} = (u_1^{(k)}, \ldots, u_{n_{k-1}}^{(k)})$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ модуля P, удовлетворяющие равенствам

$$a_k = \tilde{\lambda}_k x_1 + \sum_{j=2}^{n_k} r_{kj} x_j, \quad u_i^{(k)} = \lambda_{i1}^{(k)} x_1 + \sum_{j=2}^{n_k} r_{ij}^{(k)} x_j,$$

$$\begin{aligned} & i = 1, 2, \ldots, n_{k-1}; \\ r_{ij}^{(k)}, r_{kj} \in J(\Lambda), \quad & k = 0, 1, 2, \ldots; \\ & j = 2, 3, \ldots, n_k \end{aligned} \tag{5}$$

и вытекающим из них соотношениям

$$a_k = \tilde{\lambda}_k u_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n_k} r_{kj} u_j^{(k+1)}, \quad u_i^{(k)} = \lambda_{i1}^{(k)} u_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n_k} r_{ij}^{(k)} \cdot u_j^{(k+1)}. \tag{6}$$

Элементы $a_0, a_1, \ldots$ порождают модуль P и $u_0^{(0)} = 0$, $n_{-1} = 0$. В силу соотношения (4) для элементов $a_k, u_1^{(k)}, \ldots, u_{n_{k-1}}^{(k)}$ имеют место равенства (5), применяя к которым теорему 2.4 [8] (с. 381), находим элементы $u_1^{(k+1)}, \ldots, u_{n_k}^{(k+1)}$ модуля P, удовлетворяющие соотношениям (6). Легко видеть, что $P = \bigcup_{k=0}^{\infty} P^{(k)}$.

Для элементов $\lambda_{i1}^{(k)}$, $r_{ij}^{(k)}$ $(k=1, 2, \dots;\ i=1, 2, \dots, n_{k-1};\ j=2, 3, \dots n_k)$, входящих в равенства (5), мы установим теперь некоторые важные для дальнейшего вспомогательные соотношения.

С помощью (5) и (6) без труда находим

$$\lambda_{i1}^{(k)}\cdot x_1+\sum_{j=2}^{n_k} r_{ij}^{(k)}x_j=\lambda_{i1}^{(k)}\Big(\lambda_{11}^{(k+1)}x_1+\sum_{j=2}^{n_{k+1}} r_{1j}^{(k+1)}x_j\Big)+$$

$$+\sum_{j=2}^{n_k} r_{ij}^{(k)}\Big(\lambda_{j1}^{(k+1)}x_1+\sum_{s=2}^{n_{k+1}} r_{js}^{(k+1)}\cdot x_s\Big),$$

откуда в виду Λ-свободности базы модуля F следует, что

$$\lambda_{i1}^{(k)}=\lambda_{i1}^{(k)}\cdot\lambda_{11}^{(k+1)}+\sum_{j=2}^{n_k} r_{ij}^{(k)}\cdot\lambda_{j1}^{(k+1)},\quad r_{ij}^{(k)}=\lambda_{i1}^{(k)}\cdot r_{1j}^{(k+1)}+\sum_{s=2}^{n_k} r_{is}^{(k)}\cdot r_{sj}^{(k+1)},\tag{7}$$

где $i=1, 2, \dots, n_{k-1}$; $k=1, 2, \dots$; $j=2, 3, \dots, n_k$. Соотношения (7) влекут матричное равенство

$$(r_{i2}^{(k)}, \dots, r_{in_k}^{(k)})=(\lambda_{i1}^{(k)}\cdot r_{12}^{(k+1)}, \dots, \lambda_{i1}^{(k)}\cdot r_{1n_k}^{(k+1)})+(r_{i2}^{(k)}, \dots, r_{in_k}^{(k)})\cdot R,\tag{8}$$

где матрица $R=(r_{sj}^{(k+1)})$ $(s, j=2, 3, \dots, n_k)$ согласно теореме 3 [1] (с. 25) принадлежит радикалу $J(\Lambda_{n_{k-1}})$. В силу предложения 3 [9] (с. 94) элемент $E-R$ обратим в кольце Λ_{n_k-1}, и из равенства (8) получаем $(r_{i2}^{(k)}, \dots, r_{in_k}^{(k)})=(\lambda_{i1}^{(k)}\cdot r_{12}^{(k+1)}, \dots, \lambda_{i1}^{(k)}\cdot r_{1n_k}^{(k+1)})\cdot(E-R)^{-1}$ или

$$r_{ij}^{(k)}=\lambda_{i1}^{(k)}\cdot\tilde r_{ij}^{(k)}\quad(i=1, 2, \dots, n_{k-1};\ j=2, 3, \dots n_k),\quad \tilde r_{ij}^{(k)}\in J(\Lambda).\tag{9}$$

Определение 1 ([10], с. 564). Предельным леворегулярным (п. л. р.) идеалом кольца Λ называется левый идеал, порожденный элементами λ_i $(i=1, 2, \dots)$ кольца Λ, удовлетворяющими условию $\lambda_i=\lambda_i\cdot\lambda_{i+1}$ $(i=1, 2, \dots)$.

Лемма 3. *Для любого модуля P, принадлежащего $Pz(\Lambda)$, существует п. л. р. идеал $I(P)$ кольца Λ такой, что $P/J(\Lambda)\cdot P\cong I(P)/J(\Lambda)\cdot I(P)$, причем конечная порожденность одного из модулей P и $I(P)$ влечет конечную порожденность другого.*

Доказательство. Пусть $P\in Pz(\Lambda)$. Ясно, что P определяет элементы $\lambda_{i1}^{(k)}$, $r_{ij}^{(k)}$, удовлетворяющие соотношениям (7) и (9), и поэтому равенству

$$\lambda_{11}^{(k)}=\lambda_{11}^{(k)}\cdot\lambda_{11}^{(k+1)}+\sum_{j=2}^{n_k} r_{1j}^{(k)}\cdot\lambda_{j1}^{(k+1)}=\lambda_{11}^{(k)}\cdot\lambda_{11}^{(k+1)}+\lambda_{11}^{(k)}\Big(\sum_{j=2}^{n_k}\tilde r_{1j}^{(k)}\cdot\lambda_{j1}^{(k+1)}\Big).\tag{10}$$

Рассмотрим $r_k=\sum_{j=2}^{n_k}\tilde r_{1j}^{(k)}\cdot\lambda_{j1}^{(k+1)}$. Так как $r_k\in J(\Lambda)$, то согласно предложению 3 [9] (с. 94) существует элемент $\varepsilon_{k+1}=(1-r_k)^{-1}$. В силу (10) получим, что

$$\lambda_{11}^{(k)}=\lambda_{11}^{(k)}\cdot\lambda_{11}^{(k+1)}\cdot\varepsilon_{k+1}\quad(k=1, 2, \dots).\tag{11}$$

На основании (11) имеем

$$\gamma_k = \gamma_k \cdot \gamma_{k+1} \quad (k = 3, 4, \ldots), \tag{12}$$

где $\gamma_k = \sigma_{k-1}^{-1} \cdot \lambda_{11}^{(k)} \cdot \sigma_k$, $\sigma_k = \varepsilon_k \cdot \varepsilon_{k-1} \ldots \varepsilon_2$.

Рассмотрим левый идеал $I(P) = \bigcup_{k=3}^{\infty} \Lambda\gamma_k$, который является п. л. р. идеалом в силу (12). Покажем, что $I(P)$ является искомым. Конечная порожденность модуля $P/J(\Lambda)P$ и соотношения $\bigcup_{k=3}^{\infty} \overline{P}^{(k)} = \overline{P} \cong$ $\cong P/J(\Lambda)\cdot P$, $\overline{P}^{(k)} \subseteq \overline{P}^{(k+1)}$ влекут существование такого $l > 0$, что $\overline{P} = \overline{P}^{(l-1)} = (\overline{u}_1^{(l-1)}, \ldots, \overline{u}_{n_{l-2}}^{(l-1)})$. В силу равенств (5) и (6) имеют место равенства $\overline{u}_i^{(l-1)} = \overline{\lambda}_{11}^{(l-1)} \cdot \overline{u}_1^{(l)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n_{l-2})$ и $\overline{P} = \overline{\Lambda}\, \overline{u}_1^{(l)}$. Значит, $u_1^{(k)} = \overline{\mu}_{11}^{(k)} \overline{u}_1^{(l)}$ $(k = 2, 3, \ldots)$ и $\overline{\lambda}_{11}^{(k)} \overline{x}_1 = \overline{\mu}_{11}^{(k)} \cdot \overline{\lambda}_{11}^{(l)} \cdot \overline{x}_1$. Учитывая $\overline{\Lambda}$-свободность элемента $\overline{x}_1$, получим, что

$$\overline{\lambda}_{11}^{(k)} = \overline{\mu}_{11}^{(k)} \cdot \overline{\lambda}_{11}^{(l)} \quad (k = 2, 3, \ldots). \tag{13}$$

Так как $I(P) = \bigcup_{k=3}^{\infty} \Lambda\gamma_k$, $\overline{\gamma}_k = \overline{\lambda}_{11}^{(k)}$ $(k = 3, 4, \ldots)$, то в силу равенств (13) имеем $\overline{I(P)} = \overline{\Lambda}\, \overline{\lambda}_{11}^{(l)}$. Поскольку $\overline{P} = \overline{\Lambda}\, \overline{u}_1^{(l)} = \overline{\Lambda}\, \overline{\lambda}_{11}^{(l)} \overline{x}_1$, то $\overline{P} \cong \overline{\Lambda}\, \overline{\lambda}_{11}^{(l)} =$ $= \overline{I(P)}$. Следовательно, $P/J(\Lambda)\cdot P \cong \overline{P} \cong \overline{I(P)} \cong I(P)/J(\Lambda)\cdot I(P)$, ибо в силу леммы 1 [10] (с. 564) фактор-модуль $\Lambda/I(P)$ является Λ-плоским и согласно предложению 3 [9] (с. 208) $J(\Lambda) \cap I(P) = J(\Lambda)\cdot I(P)$. Так как $\Lambda/I(P)$ — Λ-плоский, то в силу теоремы 3.2 [11] (с. 89) $I(P)$ является Λ-проективным. Отсюда согласно теореме 5 [3] (с. 233) конечная порожденность одного из модулей P и $I(P)$ влечет конечную порожденность другого.

Замечание 1. Лемма 3 может быть доказана независимо от теоремы 5 [3] (с. 233), и поэтому последняя является следствием упомянутой леммы.

Лемма 4. *Пусть* Π *левый* Λ*-модуль. Тогда:* (*a*) *Если модуль* Π *является* Λ*-плоским, то* $h_m(\Pi)$ *левый* Λ*-плоский модуль для любого* $m \geqslant 1$; (*b*) *если левый модуль* $h_m(\Pi)$ *является* Λ_m*-плоским для некоторого* $m \geqslant 1$, *то модуль* Π *будет* Λ*-плоским.*

Доказательство. В силу предложения 1.2 [2] (с. 57) ${}^{(m)}\Lambda$ — строго проективный Λ-модуль и согласно предложению 4.4 [2] (с. 69) функтор h_m удовлетворяет условиям следствия 1.5 [11] (с. 86), поэтому утверждение (*a*) леммы 4 справедливо. Пусть для некоторого $m \geqslant 1$ $h_m(\Pi)$ — левый Λ_m-плоский модуль. В силу предложения 4.4 [2] (с. 69) имеем изоморфизм функторов

$$\Theta_m \cdot h_m \cong 1_{\Lambda-\mathrm{mod}}, \quad h_m \cdot \Theta_m \cong 1_{\Lambda_m-\mathrm{mod}}. \tag{14}$$

Следовательно, имеем изоморфизм Λ-модулей $\Theta_m \cdot h_m(\Pi) \cong \Pi$. Так как $h_m(\Pi)$ является Λ_m-плоским, то в силу леммы 1.5 [11] (с. 86) модуль $\Theta_m \cdot h_m(\Pi)$ и ему изоморфный Π будут Λ-плоскими. Лемма 4 доказана.

Замечание 2. Пусть Λ — кольцо, $\mathfrak{A}$ — его (двусторонний) идеал и $\Lambda/\mathfrak{A}$ — фактор-кольцо. Точная последовательность левых Λ-модулей $0 \to K \to P \to \Pi \to 0$, где P — проективный, Π — плоский модули, влечет согласно предложению 3 [9] (с. 208) точную последовательность левых $\Lambda/\mathfrak{A}$-модулей

$$0 \to K/\mathfrak{A}\cdot K \to P/\mathfrak{A}\cdot P \to \Pi/\mathfrak{A}\cdot\Pi \to 0. \tag{15}$$

Лемма 5. *Для любого левого Λ-модуля M*

$$h_m(J(\Lambda)\cdot M) = J(\Lambda_m)\cdot h_m(M).$$

Доказательство. Пусть элементы $u_1, u_2, \ldots u_m$ образуют базу модуля ${}^{(m)}\Lambda$, $g \in h_m(J(\Lambda)\cdot M)$. Тогда $(u_i)g$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ принадлежит $J(\Lambda)\cdot M$, т. е.,

$$(u_i)\,g = \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} r_{ij+km}\cdot a_{ij+km}, \quad r_{ij+km} \in J(\Lambda)$$

если число слагаемых не кратно числу m, то дополняем нулями). Определим Λ-гомоморфизмы α_{ik}, f_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, l)$

$$\alpha_{ik}: {}^{(m)}\Lambda \to J(\Lambda)\cdot{}^{(m)}\Lambda, \quad f_{ik}: {}^{(m)}\Lambda \to M,$$

$$(u_i)\,\alpha_{ik} = \sum_{j=1}^{m} r_{ij+km}u_j\,,\ (u_j)\,\alpha_{ik} = 0 \text{ при } i \neq j,\ (u_j)\,f_{ik} = a_{ij+km}\ \ (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Легко видеть, что f_{ik}, α_{ik} принадлежат соответственно $h_m(M)$ и $J(\Lambda_m)$, потому что согласно предложению 2.6 [2] (с. 82) $J(\Lambda_m) = \mathrm{Hom}_\Lambda({}^{(m)}\Lambda, J(\Lambda)\cdot{}^{(m)}\Lambda)$. Далее, получим, что

$$(u_i)\Big(\sum_{k=1}^{l}\sum_{s=1}^{m}\alpha_{sk}\cdot f_{sk}\Big) = (u_i)\Big(\sum_{k=1}^{l}\alpha_{ik}\cdot f_{ik}\Big) + (u_i)\Big(\sum_{s\neq i}^{m}\sum_{k=1}^{l}\alpha_{sk}\cdot f_{sk}\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} r_{ij+km}\cdot a_{ij+km} = (u_i)\,g \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Следовательно, $g = \sum\limits_{k=1}^{l}\sum\limits_{s=1}^{m}\alpha_{sk}\cdot f_{sk}$ и принадлежит $J(\Lambda_m)\cdot h_m(M)$, поэтому $h_m(J(\Lambda)\cdot M)$ содержится в $J(\Lambda_m)\ h_m(M)$. Пусть теперь g принадлежит $J(\Lambda_m)\cdot h_m(M)$. Тогда $g = \sum\limits_{k=1}^{l}\alpha_k g_k$, $\alpha_k \in J(\Lambda_m)$, $g_k \in h_m(M)$. Так как $\alpha_k: {}^{(m)}\Lambda \to J(\Lambda)\cdot{}^{(m)}\Lambda$, $g_k: {}^{(m)}\Lambda \to M$, то, очевидно, $(u_i)\alpha_k\cdot g_k$ принадлежит $J(\Lambda)M$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, e)$. Значит, g принадлежит $h_m\ (J(\Lambda)\cdot M)$ и поэтому $J(\Lambda_m)\cdot h_m(M) \subseteq h_m(J(\Lambda)\cdot M)$. Следовательно, $J(\Lambda_m)\cdot h_m(M) = h_m(J(\Lambda)\cdot M)$, что и требовалось доказать.

Обозначим через $\Pi f(\Lambda)$ $(\Pi z(\Lambda))$ множество всех конечно порожденных (соответственно циклических) левых Λ-плоских модулей Π, для которых фактор-модуль $\Pi/J(\Lambda)\cdot\Pi$ является $\Lambda/J(\Lambda)$-проективным.

Лемма 6. *Модуль Π принадлежит $\Pi f(\Lambda)$ тогда и только тогда, когда для подходящего числа $m \geqslant 1$ (m зависит от модуля) модуль $h_m(\Pi)$ содержится в $\Pi z(\Lambda_m)$.*

Доказательство. Пусть Π принадлежит $\Pi f(\Lambda)$ и порождается m элементами. Тогда существует эпиморфизм ${}^{(m)}\Lambda \to \Pi \to 0$, который в силу (15) и предложения 4.4 [2] (с. 69) влечет эпиморфизмы

$$^{(m)}\overline{\Lambda} \to \overline{\Pi} \to 0, \quad h_m(^{(m)}\Lambda) \to h_m(\Pi) \to 0. \qquad (16)$$

Так как согласно лемме 5 $J(\Lambda_m)\cdot h_m(M) = h_m(J(\Lambda)\cdot M)$, то

$$\overline{h_m(\Pi)} = h_m(\overline{\Pi}), \quad h_m(^{(m)}\overline{\Lambda}) \to h_m(\overline{\Pi}) \to 0. \qquad (17)$$

В силу (16), (17), (14) и равенства $\overline{\Lambda}_m = h_m(^{(m)}\overline{\Lambda})$ левый $\overline{\Lambda}$-модуль $\overline{\Pi}$ будет прямым слагаемым левого $\overline{\Lambda}$-свободного модуля $^{(m)}\overline{\Lambda}$ тогда и только тогда, когда левый $\overline{\Lambda}_m$-модуль $\overline{h_m(\Pi)}$ является прямым слагаемым модуля $\overline{\Lambda}_m$. Следовательно, $\overline{\Lambda}$-проективность модуля $\overline{\Pi}$ влечет $\overline{\Lambda}_m$-проективность модуля $\overline{h_m(\Pi)}$. В силу (16) следует цикличность Λ_m-модуля $h_m(\Pi)$, а на основании теоремы 3.5 [2] (с. 66) цикличность $h_m(\Pi)$ влечет конечную порожденность модуля Π, применяя лемму 4, завершаем доказательство.

Определение 2. Счетно-порожденный подмодуль P левого Λ-свободного модуля F назовем предельно леворегулярным (п. л. р.) подмодулем, если фактор-модуль F/P является Λ-плоским.

Теорема 1. *Для кольца Λ следующие условия эквивалентны:*

(a) *всякий левый Λ-проективный модуль P, для которого фактор-модуль $P/J(\Lambda)P$ конечно порожден, является конечно порожденным;*

(b) *всякий п. л. р. подмодуль P конечно порожденного свободного левого Λ-модуля, для которого фактор-модуль $P/J(\Lambda)P$ конечно порожден, является конечно порожденным;*

(c) *всякий конечно порожденный левый Λ-плоский модуль Π, для которого фактор-модуль $\Pi/J(\Lambda)\Pi$ будет $\Lambda/J(\Lambda)$-проективным, является Λ-проективным.*

Доказательство. $(a)\Rightarrow(b)$. Пусть P п. л. р. подмодуль конечно порожденного левого Λ-свободного модуля F и $P/J(\Lambda)P$ конечно порожден.

В силу определения 2 F/P является Λ-плоским, поэтому согласно теореме 3.2 [11] (с. 89) и условия (a) следует проективность и конечная порожденность модуля P.

Докажем $(b)\Rightarrow(c)$. Вначале покажем, что условие (b) выполняется для колец Λ_m $(m \geqslant 1)$. Действительно, пусть P п. л. р. подмодуль конечно порожденного левого Λ_m-свободного модуля F и модуль $P/J(\Lambda_m)P$ конечно порожден. Точная последовательность левых Λ_m-модулей $0 \to P \to F \to \Pi \to 0$ влечет точную последовательность левых Λ-модулей $0 \to \Theta_m(P) \to \Theta_m(F) \to \Theta_m(\Pi) \to 0$. Так как согласно определению 2 Π является Λ_m-плоским, то $\Theta_m(\Pi)$ будет Λ-плоским в силу следствия 1.5 [11] (с. 86). Легко видеть, что $\Theta_m(F)$ — конечно порожденный левый Λ-свободный модуль. Так как P счетно порожден, то Λ-модуль $\Theta_m(P)$ также счетно порожден. Значит, $\Theta_m(P)$ является п. л. р. подмодулем модуля $\Theta_m(F)$. В силу (14) и (17) получим, что $h_m(\overline{\Theta_m(P)}) = \overline{h_m\Theta_m(P)} \cong \overline{P} \cong P/J(\Lambda_m)\cdot P$. Тогда на основании конечной порожденности модуля $P/J(\Lambda_m)\cdot P$ и предложения 3.5 [2] (с. 66) следует конечная порожденность $\overline{\Theta_m(P)}$. Следовательно, в силу условия (b) $\Theta_m(P)$ конечно порожден, что согласно теореме 3.5 [2] (с. 66) влечет конечную порожденность модуля P. Пусть теперь Π принадлежит $\Pi f(\Lambda)$. Тогда в силу леммы 6 для подходящего m Λ_m-модуль $h_m(\Pi)$ принадлежит $\Pi z(\Lambda_m)$.

Так как для кольца Λ_m условие (b) выполняется, то в силу (14) достаточно доказать, что $(b)\Rightarrow(c)$ лишь в случае, когда Π-циклический левый Λ-плоский модуль. Итак, пусть $\Pi \in \Pi z(\Lambda)$. Тогда можно построить точную последовательность левых Λ-модулей

$$0 \to I \to \Lambda \to \Pi \to 0, \tag{18}$$

которая согласно (15) влечет точную последовательность левых $\overline{\Lambda}$-модулей

$$0 \to I/J(\Lambda)\cdot I \to \overline{\Lambda} \to \overline{\Pi} \to 0. \tag{19}$$

Так как по предположению $\overline{\Pi}$ является $\overline{\Lambda}$-проективным, то в силу предложения 2.4 [12] (с. 22) последовательность (19) расщепляется. Следовательно, $I/J(\Lambda)\cdot I$ как прямое слагаемое циклического модуля $\overline{\Lambda}$ будет цикличным. Тогда существует элемент λ_*, принадлежащий I, такой, что $I/J(\Lambda)\cdot I \cong \overline{\Lambda}\,\overline{\lambda}_* = \overline{I}$ и $\overline{\lambda}_*^2 = \overline{\lambda}_*$. Согласно лемме 3 [10] (с. 565) можно построить п. л. р. идеал $I_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Lambda\lambda_i \subseteq I$, причем $\lambda_* = \lambda_1$. Так как I_0 содержит $\overline{\Lambda}\,\overline{\lambda}_*$, то $\overline{I}_0 = \overline{I}$. Поскольку $I_0/J(\Lambda)I_0 \cong \overline{I}_0 = \overline{\Lambda}\,\overline{\lambda}_1$, то $I_0/J(\Lambda)I_0$ конечно порожден. Следовательно, I_0 является п. л. р. идеалом кольца Λ и на основании условия (b) конечно порожденным. Поскольку $\Lambda\lambda_i$ содержится в $\Lambda\lambda_{i+1}$, $I_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Lambda\lambda_i$, то в силу конечной порожденности левого идеала I_0 существует элемент λ_{p-1}, содержащийся в I_0, такой, что $I_0 = \Lambda\lambda_{p-1}$. Далее, $\lambda_p = \gamma\cdot\lambda_{p-1} = \gamma\cdot\lambda_{p-1}\cdot\lambda_p = \lambda_p^2$ (т. к. $\lambda_i = \lambda_i\cdot\lambda_{i+1}$). Положим $e = \lambda_p$. Известно [1] (с. 77), что $I_0 = \Lambda_e$ является прямым слагаемым кольца Λ как левого Λ-модуля. Тогда ввиду леммы Эйленберга [13] (с. 205) и соотношения $\Lambda e \subseteq I \subseteq \Lambda$ следует, что $\Lambda = \Lambda e \oplus \Lambda(1-e)$, $I = I_0 \oplus I(1-e)$. Поскольку $\overline{I}_0 = \overline{I}$, $\overline{I} = \overline{I}_0 \oplus \overline{I}(\overline{1} - \overline{e})$, то $\overline{I}(\overline{1} - \overline{e}) = (0)$, откуда получим соотношение $I(1-e) \subseteq J(\Lambda)(1-e) \subseteq \Lambda(1-e)$. Так как $\Lambda/I = \Lambda e \oplus \Lambda(1-e)/\Lambda e \oplus \oplus I(1-e) \cong \Lambda(1-e)/I(1-e)$, то $\Lambda(1-e)/I(1-e)$ является Λ-плоским. Поскольку $I(1-e)$ содержится в $J(\Lambda)(1-e)$, то модуль $\Lambda(1-e)$ является Λ-проективным покрытием модуля $\Lambda(1-e)/I(1-e)$, и в силу теоремы 1 [14] (с. 156) $I\cdot(1-e) = (0)$, откуда, $I = I_0$. Значит, в точной последовательности (18) модуль Π конечно связан и, согласно следствию к предложению 2.2 [15] (с. 459), является проективным.

Докажем $(c) \Rightarrow (a)$. Вначале покажем, что условие (c) выполняется для кольца Λ_m $(m \geqslant 1)$. Пусть $\Pi \in \Pi f(\Lambda_m)$. Так как, согласно предложению 4.4 [2] (с. 86), h_m — функтор эквивалентности, то в силу предложения 1.1 [2] (с. 17) существует левый Λ-модуль Π_0 такой, что $h_m(\Pi_0) \cong \Pi$, Π_0 — конечно порожденный и согласно лемме 4 является Λ-плоским. Очевидно, можно считать, что

$$h_m(\Pi_0) = \Pi. \tag{20}$$

Как и в доказательстве леммы 6, получим, что $h_m(\overline{\Pi}_0) = \overline{\Pi}$, откуда $\overline{\Lambda}_m$-проективность модуля $\overline{\Pi}$ влечет $\overline{\Lambda}$-проективность модуля $\overline{\Pi}_0$. Значит, Π_0 принадлежит $\Pi f(\Lambda)$, и согласно условию (c) Π_0 является Λ-проективным, что ввиду (20) влечет Λ_m-проективность модуля Π. Пусть теперь $P \in Pf(\Lambda)$. Согласно лемме 2 для подходящего $m \geqslant 1$ $h_m(P)$ принадлежит $Pz(\Lambda_m)$. Так как для кольца $\Lambda_m (m \geqslant 1)$ условие (c) выполняется, то $(c) \Rightarrow (a)$ достаточно доказать в случае, когда P принадлежит $Pz(\Lambda)$. Пусть $P \in Pz(\Lambda)$. Тогда согласно лемме 3 P определяет некоторый п. л. р. идеал $I(P)$ кольца Λ, для которого

$I(P)/J(\Lambda)\cdot I(P)$ конечно порожден. Точная последовательность левых Λ-модулей

$$0 \to I(P) \to \Lambda \to \Pi \to 0, \tag{21}$$

где ввиду леммы 1 [10] (с. 564) Π — циклический Λ-плоский модуль, влечет точную последовательность левых $\bar{\Lambda}$-модулей

$$0 \to I(P)/J(\Lambda)\cdot I(P) \to \bar{\Lambda} \to \bar{\Pi} \to 0. \tag{22}$$

Так как $I(P)/J(\Lambda)\cdot I(P)$ конечно порожден и в силу следствия 2 [16] (с. 34) $\bar{\Pi}$ является $\bar{\Lambda}$-плоским, то $\bar{\Pi}$ — конечно связанный модуль, и, согласно следствию и предложению 2.2 [15] (с. 459), $\bar{\Pi}$ будет $\bar{\Lambda}$-проективным. Тогда в силу условия (c) Π является Λ-проективным, последовательность (21) расщепляется и $I(P)$ будет конечно порожденным как прямое слагаемое циклического модуля Λ. Следовательно, в силу леммы 3 конечная порожденность $I(P)$ влечет конечную порожденность P.

Следствие 1. *Пусть над кольцом Λ всякий конечно порожденный левый Λ-плоский модуль проективен. Тогда, если P и P' левые Λ-проективные модули, $P/J(\Lambda)\cdot P \cong P'/J(\Lambda)\cdot P'$ и фактор-модуль $P/J(\Lambda)\cdot P$ конечно порожден, то модули P и P' изоморфны, конечно порождены.*

Доказательство. В силу условия P и P' принадлежат $Pf(\Lambda)$, для кольца Λ условие (c) теоремы 1 выполняется, поэтому P, P' конечно порождены, и согласно предложению 2.12 [2] (с. (81) P и P' изоморфны.

Теорема 2. *Пусть Λ — такое кольцо, что над фактор-кольцом $\Lambda/J\Lambda$ всякий левый, всякий правый циклические (конечно-порожденные) плоские модули проективны. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) всякий циклический (конечно порожденный) правый Λ-плоский модуль проективен;

(b) всякий циклический (конечно порожденный) левый Λ-плоский модуль проективен.

Доказательство. Покажем, что (a) влечет (b) в случае циклических модулей. Пусть I — п. л. р. идеал кольца Λ и $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda\lambda_i$. Тогда в силу леммы 1 [10] (с. 564) в точной последовательности левых Λ-модулей $0 \to I \to \Lambda \to \Pi \to 0$ Π является Λ-плоским, и поэтому согласно (15) последовательность левых $\bar{\Lambda}$-модулей

$$0 \to I/J(\Lambda)I \to \bar{\Lambda} \to \bar{\Pi} \to 0 \tag{23}$$

точна. Поскольку ввиду следствия 2 [16] (с. 34) $\bar{\Pi}$ является $\bar{\Lambda}$-плоским, то в силу условия он проективен, поэтому последовательность (23) расщепляется и $I/J(\Lambda)\cdot I$ цикличен как прямое слагаемое циклического модуля $\bar{\Lambda}$. Так как $\bar{I} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{\Lambda}\bar{\lambda}_i$, $\bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}_i\cdot\bar{\lambda}_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $\bar{I} \cong I/J(\Lambda)\cdot I$, то существует такое число p, что $\bar{I} = \bar{\Lambda}\bar{\lambda}_n$ $(n = p, p+1, \ldots)$, $\bar{\lambda}_n^2 = \bar{\lambda}_n$, $\bar{\lambda}_{n+1} = \bar{\lambda}_{n+1}\cdot\bar{\lambda}_n$, поэтому $\omega_n = \lambda_{n+1} - \lambda_{n+1}\cdot\lambda_n$ принадлежит $J(\Lambda)$, и согласно предложению 3 [9] (с. 94) $\tilde{\varepsilon}_n = 1 - \omega_n$ — обратимый элемент кольца Λ. Так как $\lambda_n = \lambda_n\cdot\lambda_{n+1}$ $(n = p, p+1, \ldots)$, то $\lambda_n\cdot\omega_n =$

$=\lambda_n-\lambda_n^2$, $\lambda_n^2=\lambda_n\widetilde{\varepsilon}_n$ и элементы $\gamma_{nk}=\widetilde{\varepsilon}_n^{k-1}\cdot\lambda_n\cdot\varepsilon_n^{-k}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2,\ldots)$ удовлетворяют равенству

$$\gamma_{nk}=\gamma_{nk}\cdot\gamma_{n\,k+1},\ 1-\gamma_{n\,k+1}=(1-\gamma_{nk})\cdot(1-\gamma_{n\,k+1}). \tag{24}$$

Тогда $I_n=\bigcup\limits_{k=0}^{-\infty}(1-\gamma_{nk})\,\Lambda$ есть Λ-предельный право-регулярный идеал кольца Λ, и на основании условия (a) теоремы 3 [10] (с. 566) существует число $l=l(n)$ такое, что $I_n=(1-\gamma_{nl})\,\Lambda$, откуда $\gamma_{nl}^2=\gamma_{nl}$, $\lambda_n\cdot\widetilde{\varepsilon}_n^{-1}\cdot\lambda_n=\lambda_n$, $(\widetilde{\varepsilon}_n^{-1}\cdot\lambda_n)^2=\widetilde{\varepsilon}_n^{-1}\cdot\lambda_n$. Согласно лемме 5 [10] (с. 571) и теореме 2 [10] (с. 566) п. л. р. идеал $I=\bigcup\limits_{n=p}^{\infty}\Lambda\widetilde{\varepsilon}_n^{-1}\lambda_n$ является циклическим. Следовательно, в силу теоремы 3 [10] (с. 566) всякий циклический левый Λ-плоский модуль проективен.

Применяя лемму 6 и теорему 4 [10] (с. 568), мы сводим доказательство проективности конечно порожденных левых Λ-плоских модулей к случаю циклических модулей, и завершается доказательство тем, что из (***a***) следует (***b***). Переходя к антиизоморфному кольцу, получаем, что (***b***) влечет (***a***), что и требовалось доказать.

Следствие 2. Если кольцо Λ лево-нетерово, то всякий конечно порожденный правый Λ-плоский модуль проективен ([4]).

Доказательство. Так как Λ лево-нетерово, то, как известно, фактор-кольцо $\overline{\Lambda}=\Lambda/J(\Lambda)$ тоже будет лево-нетеровым. Поскольку $J(\overline{\Lambda})=(0)$, то $\overline{\Lambda}$ — полупервичное левое кольцо Гольди ([17], с. 164) и согласно теореме 7.2.2 [17] (с. 169) левое кольцо частных $Q(\overline{\Lambda})$ является артиновым полупростым кольцом. Значит, $\overline{\Lambda}$ вкладывается в артиново полупростое кольцо, и поэтому в силу теоремы 2.1 [18] (с. 70) всякий правый, всякий левый конечно порожденные $\overline{\Lambda}$-плоские модули проективны. Так как над лево-нетеровым кольцом Λ всякий конечно порождённый левый плоский модуль проективен, то применение теоремы 2 завершает доказательство.

Теорема 3. *Если над полулокальным кольцом Λ всякий левый Λ-проективный модуль является прямой суммой конечно порожденных модулей, то всякий конечно порожденный левый (правый) Λ-плоский модуль проективен.*

Доказательство. Пусть P — левый Λ-модуль и принадлежит $Pf(\Lambda)$. В силу условия теоремы $P=\sum\limits_{\alpha\in I}\oplus P_\alpha$, где P_α — конечно порожденный модуль. Тогда так же, как и в доказательстве леммы 1, устанавливается, что модуль P конечно порожден. Следовательно, для кольца Λ выполняется условие (***a***) теоремы 1. Если Π—конечно порожденный левый Λ-плоский модуль, то в силу полулокальности кольца Λ фактор-кольцо $\overline{\Lambda}$ артиново, полупростое, и поэтому согласно теореме 4.2 [12] (с. 27) $\overline{\Pi}$ является $\overline{\Lambda}$-проективным. Следовательно, на основании теоремы 1 Π будет Λ-проективным. Если Π— конечно порожденный правый Λ-плоский модуль, то в силу теоремы 2 модуль Π является Λ-проективным. Доказательство завершено.

Автор выражает глубокую признательность профессору $\boxed{\text{В. В. Морозову}}$ за большое внимание к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джекобсон Н. Строение колец. М., ИИЛ, 1961.
2. Басс X. Алгебраическая K-теория. М., ИИЛ, 1973.
3. Beck I. Projective and Free modules. Math. Zeit., Bd. 129, № 3, 1972, p. 231—234.
4. Jondrup S. On famitely generated flat modules II. Math. Seand., 1970, v. 26, № 1, p. 105—119.
5. Сахаев И. И., Чирков Г. В. О проективности конечно порожденных плоских модулей. Изв. вузов. Матем., 1972, № 1, с. 85—93.
6. Капланский И. Проективные модули. Матем., сб. переводов 4 : 1, 1960, с. 3—8.
7. Bass H. Fimitic dimension and a homological generalization of semi-primary rings. Trans. Amer. Math. Soc. 95, № 3, 1960, p. 466—489.
8. Cohn P. M. On the free product of accotiative rings. Math. Zeit. Bd. 71, № 4, 1959, p. 380—398.
9. Ламбек И. Кольца и модули. М., „Мир", 1971.
10. Сахаев И. И. О проективности конечно порожденных плоских модулей. Сиб. матем. журн., т. 6, № 3, 1965, с. 564—573.
11. Lazard D. Autour de la rlatitude. La thése de doctorat és sciences. Bull. Soc. Math. France, v. 97, 1969, p. 81—128.
12. Картан А., Эйленбер С. Гомологическая алгебра. М., ИИЛ, 1960.
13. Hinohara G. Projective modules over semi-locals rings. Tohoky Malh. Jour. v. 14, 1962, p. 205—211.
14. Сахаев И. И. О слабой размерности модулей, колец, алгебр. Проективность плоских модулей. Изв. вузов. Матем., 1965, № 2, с. 152—157.
15. Chase S. Direct products of modules. Trans. Amer. Math. Soc., v. 97, № 3, 1960, p. 457—473.
16. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. М., „Мир", 1971.
17. Херстейн И. Некоммутативные кольца. М., „Мир", 1971.
18. Сахаев И. И. О кольцах, над которыми всякий конечно порожденный плоский модуль проективен. Изв. вузов. Матем., № 9, 1969, с. 65—73.

г. Казань

Поступила
4 VI 1975

В. А. Курчатов. Метод линеаризованных невязок для ускорения сходимости метода итерации

(аннотация статьи, принятой к печати)

Для ускорения сходимости в банаховом пространстве X итерационных процессов вида $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$, предложен, основанный на линеаризации невязки $F(x) = x - \varphi(x)$, метод

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) - \Phi^{-1}(\varphi(x_n), x_n) F(\varphi(x_n)),$$

где $\Phi(\varphi(x), x)$ — оператор, действующий из пространства X в X, близкий к оператору разделенной разности $F(2\varphi(x) - x, x)$ в том смысле, что $\| F(2\varphi(x) - x, x) - \Phi(\varphi(x), x) \| \leqslant \gamma \| F(x) \|^2$, $\gamma = \mathrm{const} > 0$ при любом x из некоторой области $R \subset X$. Показано, что при одинаковой сложности алгоритма с методом Эйткена для ускорения сходимости итерационных методов, быстрота сходимости рассматриваемого метода существенно превышает быстроту сходимости метода Эйткена. Для иллюстрации дано применение предложенного метода к решению систем вещественных уравнений и интегральных уравнений. (Работа поступила в журнал „Математика" 26 XI 1976.)