Б. С. Поздеев, Об ограниченности тригонометрических полиномов в метрике L, *Изв. вузов. Матем.*, 1973, номер 10, 50–58

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1973 МАТЕМАТИКА № 10 (137)

УДК 517.512

Б. С. Поздеев

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В МЕТРИКЕ L

§ 1. Введение. Основные определения и обозначения

В теории суммирования кратных рядов Фурье вопрос о регулярности методов суммирования сводится к равномерной ограниченности относительно m_i, $i=\overline{1, n}$, в метрике L тригонометрических полиномов вида

$$K_m(x)=\sum_{k=0}^{m}\lambda_k^{(m)}\prod_{i=1}^{n}\cos k_i x_i=\sum_{k_n=0}^{m_n}\ldots\sum_{k_1=0}^{m_1}\lambda_{k_1,\ldots,k_n}^{(m_1,\ldots,m_n)}\prod_{i=1}^{n}\cos k_i x_i, \tag{1}$$

где $k=(k_1,\ldots, k_n)$, $m=(m_1,\ldots, m_n)$, $m_i=1, 2,\ldots$, $i=\overline{1, n}$; $\lambda_k^{(m)}=0$, если хотя бы один из $k_i\geqslant m_i+1$, $i=\overline{1, n}$; причем, если у коэффициентов $\lambda_k^{(m)}$ любые j индексов $k_i=0$, $i=\overline{1, n}$, то мы считаем, что перед этим коэффициентом стоит сомножитель 2^{-j}.

Применяя n раз преобразование Абеля к (1), $K_m(x)$ можно представить в виде

$$K_m(x)=\sum_{k=0}^{m}\Delta^{\omega_n}\lambda_k^{(m)}\prod_{i=1}^{n}D_{k_i}(x_i), \tag{2}$$

де $\omega_n=(1, \ldots, 1)$ есть n-мерный единичный вектор, $\Delta^{\omega_n}\lambda_k^{(m)}=$ $=\Delta_{k_n}\ldots\Delta_{k_2}(\Delta_{k_1}\lambda_k^{(m)})$, $\Delta_{k_i}\lambda_k^{(m)}=\lambda_{k_1,\ldots,k_n}^{(m_1,\ldots,m_n)}-\lambda_{k_1,\ldots,k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\ldots,k_n}^{(m_1,\ldots,m_n)}$, $D_{k_i}(x_i)=\sin(2k_i+1)\frac{x_i}{2}:2\sin\frac{x_i}{2}$ — ядро Дирихле.

Пусть $f(x)$ — непрерывная, периода 2π по каждому из переменных, функция в области $G=\{x:-\pi\leqslant x_i\leqslant\pi,\ i=\overline{1, n}\}$. Рассмотрим линейный оператор

$$L_m(f, x)=\int_G f(x+u)K_m(u)\,du. \tag{3}$$

Говорят, что ряд Фурье функции $f(x)$ суммируем методом $\|\lambda_k^{(m)}\|$ к $f(x)$ в точке x, если

$$L_m(f, x)\rightrightarrows f(x),\quad m_i\to\infty. \tag{4}$$

Здесь $\rightrightarrows$ означает равномерную сходимость. Известно [1], что необходимыми и достаточными для выполнения (4) в каждой точке x

являются условия

$$\lim_{m_i\to\infty} \lambda_k^{(m)} = 1, \quad i=\overline{1, n}, \tag{5}$$

для любых фиксированных значений k_i и

$$J^{(m)} = \int_{\Omega} |K_m(x)|\, dx = O(1) \tag{6}$$

равномерно относительно m_i, $i=\overline{1, n}$. ($\Omega = \{x:\ 0 \leqslant x_i \leqslant \pi,\ i=\overline{1, n}\}$).

Далее мы выясним условия в терминах $\lambda_k^{(m)}$, при которых норма тригонометрических полиномов (2) в пространстве L ограничена равномерно относительно m_i. Заметим, что подобные задачи для одномерного случая рассматривались в работах [2]—[4], для многомерного — в [6]—[9].

Основная теорема, полученная нами в данной работе, заключается в следующем.

Теорема 1. *Имеет место неравенство*

$$J^{(m)} = \int_{\Omega} |K_m(x)|\, dx \leqslant M \sum_{k=0}^{m} |\Delta^{\omega_n} \lambda_k^{(m)}| + M \prod_{i=1}^{n} m_i^{(p_i-1)/p_i} \|\Delta^{\omega_n} \lambda^{(m)}\|_p, \tag{7}$$

где $p=(p_1, \ldots, p_n)$, $1 < p_n \leqslant p_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant p_1 \leqslant 2$, $M=\mathrm{const}$;

$$\|\Delta^{\omega_n} \lambda^{(m)}\|_p = \Big\{ \sum_{k_n=0}^{m_n} \Big[\sum_{k_{n-1}=0}^{m_{n-1}} \cdot\cdot \Big(\sum_{k_2=0}^{m_2} \Big[\sum_{k_1=0}^{m_1} |\Delta^{\omega_n} \lambda_k^{(m)}|^{p_1} \Big]^{p_2/p_1} \Big)^{p_3/p_2} \ldots \Big]^{p_n/p_{n-1}} \Big\}^{1/p_n}. \tag{8}$$

Эта теорема является обобщением результатов Фомина А. А. [7] и Кучеровой К. И. [8].

Введем в рассмотрение пространство функций со смешанной нормой. Пусть $x=(x_1, \ldots, x_n)$ — точка n-мерного евклидова пространства E_n. Будем говорить, что измеримая функция $f(x)$, определенная на всем пространстве E_n, принадлежит обобщенному пространству Лебега $L_p(E_n)$, если число

$$\|f\|_{L_p(E_n)} = \Big\{ \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \Big[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^{p_1} dx_1 \Big]^{p_2/p_1} dx_2 \Big)^{p_3/p_2} \ldots$$
$$\ldots dx_{n-1} \Big]^{p_n/p_{n-1}} dx_n \Big\}^{1/p_n} < \infty. \tag{9}$$

Если некоторые $p_i=\infty$, $i=\overline{1, n}$, то по соответствующим переменным берем существенный максимум. Норму вида (6) называют смешанной и поэтому обобщенное пространство Лебега называют иногда пространством функций со смешанной нормой. Такие пространства впервые были изучены в работе [10]. Дальнейшие свойства этого пространства, связанные с теоремами вложения, рассмотрены в работах [5], [13]—[17]. В случае, если функция $f(x)$ периодическая по каждой из переменных в области G, то

$$\|f\|_{L_p(G)} = \tag{10}$$
$$= \Big\{ \int_{-\pi}^{\pi} \Big[\int_{-\pi}^{\pi} \cdots \Big(\int_{-\pi}^{\pi} \Big[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^{p_1} dx_1 \Big]^{p_2/p_1} dx_2 \Big)^{p_3/p_2} \ldots dx_{n-1} \Big]^{p_n/p_{n-1}} dx_n \Big\}^{1/p_n} < \infty.$$

Введем в рассмотрение ряд

$$\|c\|_p=\Big\{\sum_{k_n=-\infty}^{\infty}\Big[\sum_{k_{n-1}=-\infty}^{\infty}\dots\Big(\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}\Big[\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}|c_k|^{p_1}\Big]^{p_2/p_1}\Big)^{p_3/p_2}\dots\Big]^{p_n/p_{n-1}}\Big\}^{1/p_n}, \tag{11}$$

где $\{c_k\}=\{c_{k_1,\dots,k_n}\}$ — последовательность действительных или комплексных чисел. Ряд (11) назовем сходящимся, если существует

$$\Big\{\lim_{N_n\to\infty}\sum_{|k_n|\le N_n}\Big[\lim_{N_{n-1}\to\infty}\sum_{|k_{n-1}|\le N_{n-1}}\dots$$

$$\dots\Big(\lim_{N_1\to\infty}\sum_{|k_1|\le N_1}|c_k|^{p_1}\Big)^{p_2/p_1}\dots\Big]^{p_n/p_{n-1}}\Big\}^{1/p_n}=M<\infty.$$

При доказательстве основной теоремы существенную роль играет обобщенная теорема Хаусдорфа — Юнга, которую мы докажем в следующем параграфе.

§ 2. Обобщение теоремы Хаусдорфа—Юнга

Теорема 2. (I). *Пусть* $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ — *периодическая функция с периодом* 2π *по каждой из переменных, определенная на области* $G=\{x: 0\le x_j\le 2\pi,\ j=\overline{1,n}\}$, *принадлежит пространству* $L_p(G)$, $p=(p_1,\dots,p_n)$. *Тогда, если*

$$1<p_n\le p_{n-1}\le\dots\le p_1\le 2, \tag{12}$$

то

$$\|c\|_q\le M\|f\|_{L_p(G)} \tag{13}$$

где $q=(q_1,\dots,q_n)$, $1/p_j+1/q_j=1$, $j=\overline{1,n}$; $c_k=c_{k_1,\dots,k_n}=$ $=\dfrac{1}{(2\pi)^n}\displaystyle\int_G f(x)e^{-i(k,x)}dx$ *суть коэффициенты Фурье функции* $f(x)$, $(k,x)=\sum_{j=1}^n k_jx_j$; $\|c\|_q$ *понимается в смысле* (11) *и постоянная* $M=M(p)=(2\pi)^{-\sum_1^n 1/p_j}$. *Если* $1<p_i\le 2$, $i=\overline{1,n}$, *а* (12) *нарушено хотя бы для двух* p_i, *то* (13) *не выполняется для любой постоянной* M.

(II). *Пусть задана любая бесконечная в обе стороны последовательность комплексных чисел* $\{c_k\}$, *для которой выполняется неравенство* $\|c\|_p<\infty$. *Если выполнено условие* (12), *то существует функция* $f(x)\in L_q(G)$, $1/p_j+1/q_j=1$, $j=\overline{1,n}$, *такая, что числа* c_k *являются ее коэффициентами Фурье и*

$$\|f(x)\|_{L_q(G)}\le M\|c\|_p, \tag{14}$$

где $M=M(q)=(2\pi)^{\sum_1^n 1/q_j}$. *Если условие* (12) *нарушается хотя бы для двух координат* p_i, $i=\overline{1,n}$, *то неравенство* (14) *не имеет места.*

Заметим, что первая часть теоремы 2 была доказана в работе [10] на случай функций, заданных на всем пространстве E_n и, так как в данной формулировке теорема доказывается аналогично, то эту часть мы доказывать не будем, а приведем лишь доказательство второй части, необходимой нам в дальнейшем.

Доказательство теоремы 2. (II). Рассмотрим функцию $f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(k,x)}$ и покажем, что она удовлетворяет неравенству (14). Оценим $\|f\|_{L_q(G)}=\left\|\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} e^{ik_1x_1}\sum_{k_2,\ldots,k_n=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left[i\sum_{j=2}^{n} k_jx_j\right]\right\|_{L_q(G)}$.

Введем обозначение $\sum_{k_2,\ldots,k_n=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left[i\sum_{j=2}^{n} k_jx_j\right]=\varphi_{k_1}(x_2,\ldots,x_n)$. Тогда

$$\|f\|_{L_q(G)}=\left\|\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\varphi_{k_1}(x_2,\ldots,x_n)e^{ik_1x_1}\right\|_{L_q(G)}=$$

$$=\left\|\left\|\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\varphi_{k_1}(x_2,\ldots,x_n)e^{ik_1x_1}\right\|_{L_{q_1}(0,2\pi)}\right\|_{L_{(q_2,\ldots,q_n)}(G_2)}, \tag{15}$$

где $G_\mu=\{0\leqslant x_k\leqslant 2\pi,\ k=\mu,\ \mu+1,\ldots,n\}$. Временно фиксируя переменные $x_2,\ldots,x_n$ и учитывая, что $1<p_1\leqslant 2\leqslant q_1<\infty$, $1/p_1+1/q_1=1$, применим к внутренней норме правой части (15) теорему Хаусдорфа — Юнга (см. [18], с. 153). Тогда получим $\|f\|_{L_q(G)}\leqslant$ $\leqslant M\|\|\varphi_{k_1}(x_2,\ldots,x_n)\|_{p_1}\|_{L_{(q_2,\ldots,q_n)}(G_2)}$, где

$$M=(2\pi)^{1/q_1},\quad \|\varphi_{k_1}(x_2,\ldots,x_n)\|_{p_1}=\left(\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}|\varphi_{k_1}(x_2,\ldots,x_n)|^{p_1}\right)^{1/p_1}.$$

По условию теоремы, $q_j\geqslant p_1$, $j=\overline{1,n}$, или $q_j/p_1\geqslant 1$; поэтому, применяя последовательно $(n-1)$ раз обобщенное неравенство Минковского с показателями q_j/p_1, будем иметь

$$\|f(x)\|_{L_q(G)}\leqslant M\|\|\varphi_{k_1}(x_2,\ldots x_n)\|_{L_{(q_2,\ldots,q_n)}(G_2)}\|_{p_1}.$$

Представим функцию $\varphi_{k_1}(x_2,\ldots,x_n)$ в виде

$$\varphi_{k_1}(x_2,\ldots,x_n)=\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}\varphi_{k_1,k_2}(x_3,\ldots,x_n)e^{ik_2x_2},$$

где $\varphi_{k_1,k_2}=\sum_{k_3,\ldots,k_n=-\infty}^{\infty} c_{k_1,\ldots,k_n}\exp\left[i\sum_{j=3}^{n}k_jx_j\right]$, и, применяя рассуждения, приведенные выше, будем иметь

$$\|f\|_{L_q(G)}\leqslant M\|\|\varphi_{k_1,k_2}(x_3,\ldots,x_n)\|_{L_{(q_3,\ldots,q_n)}(G_3)}\|_{(p_2,p_1)}\leqslant\ldots$$

$$\ldots\leqslant M\|\|\varphi_{k_1,\ldots,k_{n-1}}(x_n)\|_{L_{q_n}(0,2\pi)}\|_{(p_{n-1},p_{n-2},\ldots,p_1)}\equiv$$

$$\equiv M\left\|\left\|\sum_{k_n=-\infty}^{\infty}c_k e^{ik_np_n}\right\|_{L_{q_n}(0,2\pi)}\right\|_{(p_{n-1},p_{n-2},\ldots,p_1)}. \tag{16}$$

Так как по условию теоремы $1<p_n\leqslant 2\leqslant q_n<\infty$ и $1/p_n+1/q_n=1$, то, применяя снова к внутренней норме (16) теорему Хаусдорфа — Юнга, получим

$$\|f\|_{L_q(G)}\leqslant M\|c\|_{(p_n,p_{n-1},\ldots,p_1)}=M\|c\|_p. \tag{17}$$

Учитывая условие (12), на основании обобщенного неравенства Минковского получаем (14).

Ряд $\sum\limits_{k=-\infty} c_k e^{i(k,x)}$ сходится в пространстве $L_q(G)$ к функции $f(x)$ и $c_k = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_G f(x)\, e^{-i(k,x)}\,dx$ являются коэффициентами Фурье функции $f(x)$.

Следующий пример для случая функций двух переменных показывает, что невыполнение (12) хотя бы для двух координат p_i, $i=\overline{1,n}$, влечет нарушение неравенства (14).

Пример 1. Пусть $1<p_1<p_2\leqslant 2\leqslant q_i<\infty$, $1/p_i+1/q_i=1$, $i=1,2$. Рассмотрим функцию $h(x_1,x_2)=|x_1|\,|x_2-x_1|^{-\beta}$, $\beta>0$, заданную в области $G=\{-\pi\leqslant x_1,\ x_2\leqslant\pi\}$.

Для коэффициентов Фурье функции $h(x)$ имеем $|c_{k_1k_2}|=O(k_1^{-1}\,k_2^{-1+\beta})$. Покажем существование чисел β таких, что $\|h(x)\|_{L_q(G)}=\infty$ при $p<p_2$, хотя $\|c\|_p<\infty$. Очевидно,

$$\|c\|_p=\Big\{\sum_{k_2=1}^{\infty}\Big[\sum_{k_1=1}^{\infty}|k_1^{-1}k_2^{-1+\beta}|^{p_1}\Big]^{p_2/p_1}\Big\}^{1/p_2}\leqslant$$

$$\leqslant\Big(\sum_{k_2=1}^{\infty}k^{(-1+\beta)p_2}\Big)^{1/p_2}\Big(\sum_{k_1=1}^{\infty}k_1^{-p_1}\Big)^{1/p_1}<\infty,\quad \beta<(p_2-1)/p_2=1/q_2.$$

Оценим

$$\|h(x)\|_{L_q(G)}=\Big\{\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{\pi}|x_1|^{q_1}\frac{dx_1}{|x_2-x_1|^{\beta q_1}}\Big]^{q_2/q_1}dx_2\Big\}^{1/q_2}.$$

Выполняя замену переменной $x_1=x_2v$ во внутреннем интеграле, получим

$$\|h(x)\|_{L_q(G)}\geqslant\Big\{\int_0^{\pi/2}\Big[\int_{x_2}^{\pi}\frac{|x_1|^{q_1}dx_1}{|x_1-x_2|^{\beta q_1}}\Big]^{q_2/q_1}dx_2\Big\}^{1/q_2}=$$

$$=\Big\{\int_0^{\pi/2}\Big[\int_1^{\pi/2}\frac{x_2^{q_1-\beta q_1}\,v^{q_1}}{(v-1)^{\beta q_1}}\,dv\Big]^{q_2/q_1}dx_2\Big\}^{1/q_2}\geqslant$$

$$\geqslant\Big\{\int_0^{\pi/2}\Big[\int_1^{2}\frac{x_2^{q_1-\beta q_1}\,v^{q_1}}{(v-1)^{\beta q_1}}\,dv\Big]^{q_2/q_1}dx_2\Big\}^{1/q_2}\geqslant$$

$$\geqslant\Big(\int_0^{\pi/2}x_2^{q_2(1+1/q_1-\beta)}dx_2\Big)^{1/q_2}\Big(\int_1^{2}\frac{dv}{(v-1)^{\beta q_1}}\Big)^{1/q_1}=\infty,$$

если $\beta q_1\geqslant 1$, $\beta\geqslant 1/q_1$. Так как $p_1<p_2$, то $1/q_1<1/q_2$, поэтому, выбирая β так, чтобы $1/q_1\leqslant\beta<1/q_2$, получим $\|h\|_{L_q(G)}=\infty$, а $\|c\|_p<\infty$.

§ 3. Теорема об ограниченности тригонометрических полиномов в метрике L

Доказательство теоремы 1. Для оценки интеграла $J^{(m)}(\Omega)$ (см. (6)) разобьем область Ω на 2^n n-мерных параллелепипедов следующим образом. Пусть $e_n=\{1, 2, \ldots, n\}$, e — любое подмножество множества e_n, $e\subseteq e_n$, причем e может быть и пустым. Тогда $\Omega=\bigcup\limits_{e\subseteq e_n}\Omega_e$, где $\Omega_e=\{0\leqslant x_i\leqslant\pi/(2m_i+1),\ i\in e_n-e;\ \pi/(2m_i+1)\leqslant x_i\leqslant\pi,\ i\in e\}$.

Если e — пустое множество, то получим область

$$\Omega_e=\Omega_\varnothing=\{x:\ 0\leqslant x_i\leqslant\pi/(2m_i+1),\ i\in e_n\},\tag{18}$$

а при $e=e_n$

$$\Omega_e=\Omega_{e_n}=\{x:\ \pi/(2m_i+1)\leqslant x_i\leqslant\pi,\ i\in e_n\}.\tag{19}$$

Наконец, если $e\subset e_n$, $e=\varnothing$, $e\neq e_n$, то будем рассматривать области Ω_e как прямое произведение областей

$$\Omega_e=\Omega^e\times\Omega^{e_n-e},\tag{20}$$

где $\Omega^e=\{\pi/(2m_i+1)\leqslant x_i\leqslant\pi,\ i\in e\}$, $\Omega^{e_n-e}=\{0\leqslant x_i\leqslant\pi/(2m_i+1),\ i\in e_n-e\}$. Таким образом,

$$J^{(m)}(\Omega)\leqslant\sum_{e\subseteq e_n}\int_{\Omega_e}|K_m(x)|\,dx.$$

Доказательство теоремы 1 сведем к оценке интеграла $J^{(m)}$ по областям (18)—(20). Оценка интеграла по остальным областям производится тем же методом, что и по произвольной области (20).

Учитывая обозначения, введенные в § 1, имеем

$$J^{(m)}(\Omega_\varnothing)=\int_{\Omega_\varnothing}\left|\sum_{k=0}^{m}\Delta^{\omega_n}\lambda_k^{(m)}D_k(x)\right|dx\leqslant\int_{\Omega_\varnothing}\sum_{k=0}^{m}|\Delta^{\omega_n}\lambda_k^{(m)}|\,|D_k(x)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant M\prod_{i=1}^{n}(2m_i+1)\sum_{k=0}^{m}|\Delta^{\omega_n}\lambda_k^{(m)}|\int_{\Omega_\varnothing}dx=M\sum_{k=0}^{m}|\Delta^{\omega_n}\lambda_k^{(m)}|.\tag{21}$$

Здесь мы использовали неравенства

$$|\sin kx|\leqslant|kx|,\quad \frac{2}{\pi}|x|\leqslant|\sin x|,\quad x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right).\tag{22}$$

Далее,

$$J^{(m)}(\Omega_{e_n})=\int_{\Omega_{e_n}}\left|\sum_{k=0}^{m}\Delta^{\omega_n}\lambda_k^{(m)}D_k(x)\right|dx=$$

$$=M\int_{\Omega_{e_n}}\left(\prod_{i=1}^{n}\left|\sin\frac{x_i}{2}\right|\right)^{-1}|T(x)|\,dx,$$

где

$$M=2^{-n},\quad T(x)=\sum_{k=0}^{m}\Delta^{\omega_n}\lambda_k^{(m)}\prod_{i=1}^{n}\sin(2k_i+1)\frac{x_i}{2}.$$

Применяя второе из неравенств (22), получим

$$J^{(m)}(\Omega_{e_n})\leqslant M\int\limits_{\pi/(2m_n+1)}^{\pi}\frac{dx_n}{x_n}\ldots\left(\int\limits_{\pi/(2m_1+1)}^{\pi}\frac{1}{x_1}|T(x)|\,dx_1\right).$$

Используя последовательно n раз неравенство Гёльдера для интегралов с показателями p_i, q_i, $1/p_i+1/q_i=1$, $1<p_i\leqslant 2\leqslant q_i<\infty$, $i\in e_n$ (причем к $|T(x)|$ применяем показатели q_i), оценивая

$$\left(\int\limits_{\pi/(2m_i+1)}^{\pi}\frac{dx_i}{x_i^{p_i}}\right)^{1/p_i}\leqslant M(p_i)\,m_i^{(p_i-1)/p_i},\quad i\in e_n,$$

и в оставшихся интегралах увеличивая промежуток интегрирования до $[0,\,2\pi]$, получим

$$J^{(m)}(\Omega_{e_n})\leqslant M(p)\prod_{i=1}^{n}m_i^{(p_i-1)/p_i}\|T(x)\|_{L_q(D)},\tag{23}$$

где $D=\{x:\ 0\leqslant x_i\leqslant\pi,\ i\in e_n\}$.

Преобразуем

$$\|T(x)\|_{L_q(D)}\leqslant\left\|\sum_{k=0}^{m}\Delta^{\omega_n}\lambda_k^{(m)}\prod_{i=1}^{n}\sin k_ix_i\cos\frac{x_i}{2}\right\|_{L_q(D)}+\ldots$$

$$\ldots+\left\|\sum_{k=0}^{m}\Delta^{\omega_n}\lambda_k^{(m)}\prod_{i=1}^{n}\cos k_ix_i\sin\frac{x_i}{2}\right\|_{L_q(D)}\leqslant$$

$$\leqslant M\left(\left\|\sum_{k=0}^{m}\Delta^{\omega_n}\lambda_k^{(m)}\prod_{i=1}^{n}\sin k_ix_i\right\|_{L_q(D)}+\ldots+\left\|\sum_{k=0}^{m}\Delta^{\omega_n}\lambda_k^{(m)}\prod_{i=1}^{n}\cos k_ix_i\right\|_{L_q(D)}\right).\tag{24}$$

Замечая, что в (24) под знаком норм стоят ряды Фурье с коэффициентами $\Delta^{\omega_n}\lambda_k^{(m)}$, а также учитывая упорядоченность координат p_i, $i\in e_n$, применим теорему 2 (II) к каждой норме в (24). Тогда

$$\|T(x)\|_{L_q(D)}\leqslant M(n,\,p)\|\Delta^{\omega_n}\lambda^{(m)}\|_p.\tag{25}$$

Подставляя (25) в (23), получим

$$J^{(m)}(\Omega_{e_n})\leqslant M(p)\prod_{i=1}^{n}m_i^{(p_i-1)/p_i}\|\Delta^{\omega_n}\lambda^{(m)}\|_p.\tag{26}$$

Наконец, оценим $J^{(m)}$ по произвольной области $\Omega_e=\Omega^e\times\Omega^{e_n-e}$. Для этого введем некоторые обозначения. Пусть по-прежнему

$$e_n=\{1,2,\ldots,n\},\ e\subset e_n,\ e\neq\varnothing,\ e\neq e_n,$$

$x^e = (x_1^e, x_2^e, \ldots, x_n^e)$ — вектор с координатами $x_i^e = \{x_i$ при $i \in e$; 0 при $i \in e_n - e\}$. Тогда $dx^e = dx_1^e dx_2^e \ldots dx_n^e$, где $dx_i^e = \{dx_i$ при $i \in e$, 1 при $i \in e_n - e\}$.

В связи с такими обозначениями

$$J^{(m)}(\Omega_e) = \int_{\Omega_e} |K_m(x)|\, dx = \int_{\Omega^e} \int_{\Omega^{e_n - e}} |K_m(x)|\, dx^e\, dx^{e_n - e} =$$

$$= \int_{\Omega^e} \int_{\Omega^{e_n-e}} \Bigl| \sum_{k^{e_n-e}=0}^{m^{e_n-e}} \sum_{k^e=0}^{m^e} \Delta^{\omega_n} \lambda_k^{(m)} \prod_{i \in e_n - e} D_{k_i}(x_i) \prod_{j \in e} D_{k_j}(x_j) \Bigr| \, dx^e\, dx^{e_n-e} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k^{e_n-e}=0}^{m^{e_n-e}} \int_{\Omega^{e_n-e}} \prod_{i \in e_n - e} |D_{k_i}(x_i)|\, dx^{e_n-e} \int_{\Omega^e} \Bigl| \sum_{k^e=0}^{m} \Delta^{\omega_n} \lambda_k^{(m)} \prod_{i \in e} D_{k_i}(x_i) \Bigr| dx^e.$$

Оценивая интеграл по области Ω^{e_n-e} так же, как и по области $\Omega_{\varnothing}$, а интеграл по Ω^e — как по области Ω_{e_n}, получим

$$J^{(m)}(\Omega_e) \leqslant M(p^e) \prod_{i \in e} m_i^{(p_i - 1)/p_i} \sum_{k^{e_n-e}=0}^{m^{e_n-e}} \| \Delta^{\omega_n} \lambda_{k^{e_n-e}}^{(m)} \|_{p^e}, \tag{27}$$

причем оценку (27) можно свести к (26) путем последовательного применения (столько раз, какова мощность множества $e_n - e$) неравенства Гёльдера для сумм и затем последовательного применения обобщенного неравенства Минковского для сумм.

Таким образом, учитывая (21), (26), (27), имеем полное доказательство теоремы.

Следствие 1. Если $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, то из теоремы 1 как частный случай получается неравенство

$$J^{(m)} = \int_{\Omega} |K_m(x)|\, dx \leqslant M \sum_{k=0}^{m} |\Delta^{\omega_n} \lambda_{\vec{k}}^{(m)}| + M \prod_{i=1}^{n} m_i^{(p_i - 1)/p_i} \| \Delta^{\omega_n} \lambda^{(m)} \|_p,$$

где $1 < p \leqslant 2$, $\| \Delta^{\omega_n} \lambda_k^{(m)} \|_p = \Bigl(\sum_{k_n=0}^{m_n} \ldots \sum_{k_1=0}^{m_1} \| \Delta^{\omega_n} \lambda_k^{(m)} |^p \Bigr)^{1/p}$.

Следствие 2. При $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 2$ мы получаем известный результат Фомина [7] для многомерного случая.

Замечание 1. Если

$$\prod_{i=1}^{n} m_i^{p_i - 1/p_i} \| \Delta^{\omega_n} \lambda^{(m)} \|_p = O(1), \tag{28}$$

то

$$\lim_{m_i \to \infty} \Delta^{\omega_n} \lambda_k^{(m_1, \ldots, m_n)} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Предполагая $\lambda_k^{(m)} \to 1$, $m_i \to \infty$, если хотя бы один из индексов $k_i = 0$, получим, что

$$\lim_{m_i \to \infty} \lambda_k^{(m_1, \ldots, m_n)} = 1, \quad i = \overline{1, n},$$

для любых фиксированных k_i. Отсюда вытекает

Теорема 3. *Для любой непрерывной и периодической по каждой из переменных с периодом* 2π *функции* $f(x)$ *последовательность линейных операторов* (4) *равномерно сходится к функции* $f(x)$ *для всех* $x=(x_1, \ldots, x_n)$, *если при некоторых* p_i, $1 < p_n \leqslant p_{n-1} \leqslant \ldots \ldots \leqslant p_1 \leqslant 2$, *выполняется условие* (27) *и тот факт, что* $\lambda_k^{(m)} \to 1$, $m_i \to \infty$ $(i=\overline{1,\ n})$, *если хотя бы один из индексов* $k_i = 0$.

г. Москва

Поступило
19 III 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Тиман А. Ф. Теория функций действительного переменного. М., Физматгиз, 1960.
2. Ефимов А. В. О линейных методах суммирования рядов Фурье. ИАН СССР. Сер. матем., т. 24, № 5, 1960, с. 743—756.
3. Фомин Г. А. О линейных методах суммирования рядов Фурье. Матем. сб., т. 65, (107) : 1, 1964, с. 144—152.
4. Никольский С. М. О линейных методах суммирования рядов Фурье. ИАН СССР. Сер. матем., т. 12, 1948, с. 259—278.
5. Бесов О. В. Оценки производных в смешанной L_p норме на области и распространение функций. Матем. заметки, т. 8, № 2, 1970, с. 147—154.
6. Теляковский С. А. Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами. Матем. сб., т. 63 (105) : 3, 1964, с. 426—444.
7. Фомин А. А. О линейных методах суммирования двойных рядов Фурье. Изв. вузов, Матем., 1969, № 2, с. 106—116.
8. Кучерова К. И. О линейных методах суммирования двойных рядов Фурье. Изв. вузов, Матем., 1968, № 6, с. 45—54.
9. Бугров Я. С. Об ограниченности тригонометрических интегралов и полиномов в метрике L. Матем. заметки, т. 8, № 6, 1970, с. 811—822.
10. Benedek A., Panzone R. The spaces L^P with mixed norm. Duke Math. J., v. 28, № 3, 1961, p. 301—324.
11. Бугров Я. С. О существовании решения линейного интегрального уравнения. Матем. заметки, т. 8, № 2, 1970, с. 181—185.
12. Бугров Я. С. К теоремам вложения для H-классов С. М. Никольского. Сиб. матем. журн., т. 4, № 5, 1963, с. 1012—1028.
13. Бугров Я. С. Теорема о представлении одного класса функций. Сиб. матем. журн., т. 8, № 2, 1966, с. 242—251.
14. Буренков В. И. Теоремы вложения и продолжения для классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных на всем пространстве. Итоги науки, Матем. анализ, 1965. М., Изд. АН СССР, 1966, с. 71—155.
15. Насонова Л. В. Неравенства для алгебраических полиномов многих переменных в смешанной норме. Материалы 6-й межвузовск. физико-матем. научн. конф. Дальнего Востока, т. 3, 1967, Хабаровск, с. 135—141.
16. Никольский С. М. Об одной задаче Соболева. Сиб. матем. журн., т. 3, № 6, 1962, с. 845—851.
17. Унинский А. П. Теоремы вложения для классов функций со смешанной нормой. Сиб. матем. журн., т. 10, № 1, 1969, с. 158—171.
18. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. II. М., „Мир“, 1965.