Ю. В. Обносов, О нелинейной краевой задаче типа Гильберта, *Изв. вузов. Матем.*, 1973, номер 10, 42–49

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1973 МАТЕМАТИКА № 10 (137)

УДК 517.544

Ю. В. Обносов

О НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ГИЛЬБЕРТА

В данной работе рассматривается следующая граничная задача: отыскивается аналитическая внутри и непрерывная на границе единичного круга функция $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, предельные значения действительной и мнимой части которой удовлетворяют на контуре C краевому условию

$$G_n[u(s),\ v(s)]=g(s), \tag{1}$$

где $g(s)$ — заданная на C функция, удовлетворяющая условию Гёльдера, и $g(0)=g(2\pi)$, а $G_n(u,v)$ — изотермический полином степени n, т. е. полином, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$\frac{\Delta G_n(u,\ v)}{[\nabla G_n(u,\ v)]^2}=\varphi\left[G_n(u,\ v)\right]. \tag{2}$$

В работах В. К. Наталевича [1], [2] эта задача решена в случаях, когда $G_n(u,v)$ — полином второй степени или однородный полином третьей степени. Позднее в работах Е. П. Аксентьевой [3], [4] результаты В. К. Наталевича были обобщены на случай, когда краевое условие задается в виде

$$F[u(s),\ v(s),\ \lambda(s)]=0, \tag{3}$$

где $F(u,v,\lambda)$ — полином относительно u, v с коэффициентами, мероморфным образом зависящими от λ; кроме того, заранее предполагалось, что параметр λ выбран таким образом, чтобы решение уравнения (3) относительно λ удовлетворяло уравнению Лапласа. Оба автора проводили исследование по единой схеме: используя свойства гармонических функций, они получили общий вид изотермического полинома, входящего в граничное условие. Это позволило введением вспомогательной аналитической функции привести исходную нелинейную задачу к простейшей линейной граничной задаче — задаче Шварца. При получении общего вида изотермического полинома более сложный случай Е. П. Аксентьевой потребовал применения аппарата симметричных римановых поверхностей.

В настоящей работе рассматривается краевая задача в постановке В. К. Наталевича в предположении, что $G_n(u,v)$ — однородный изотермический полином произвольной степени. Исследование проводится по той же схеме, но путем применения иного математического аппарата, чем в работах [1] — [4].

§ 1. О структуре однородного изотермического полинома

Пусть однородный полином

$$G_n(u, v) = \sum_{j=0}^{n} a_j u^{n-j} v^j \tag{4}$$

удовлетворяет условию изотермичности (2). В этом случае имеет место

Теорема 1. *Условие изотермичности для однородного изотермического полинома степени n имеет вид*

$$\frac{\Delta G_n(u, v)}{[\nabla G_n(u, v)]^2} = \frac{-k}{G_n(u, v)}, \tag{5}$$

где k — некоторая константа.

При доказательстве можно считать, что $\Delta G_n(u, v) \neq 0$, так как в противном случае равенство (5) выполняется. Переходя к полярным координатам $u = \rho \cos \theta$, $v = \rho \sin \theta$, получим

$$G_n(u, v) = \rho^n \sum_{j=0}^{n} a_j \cos^{n-j} \theta \sin^j \theta = \rho^n Y(\theta), \tag{6}$$

$$\Delta G_n(u, v) = \rho^{n-2} [n^2 Y(\theta) + Y''(\theta)] = \rho^{n-2} Y_1(\theta), \tag{7}$$

$$[\nabla G_n(u, v)]^2 = \rho^{2n-2} [n^2 Y^2(\theta) + Y'^2(\theta)] = \rho^{2n-2} Y_2(\theta). \tag{8}$$

Подставляя (6) — (8) в (2) и обозначая $Y_2(\theta)/Y_1(\theta) = Z(\theta)$, найдем $1/\rho^n Z(\theta) = \varphi[\rho^n Y(\theta)]$. Последнее равенство говорит о том, что функции $\rho^n Y(\theta)$ и $\rho^n Z(\theta)$ зависимы и их якобиан по переменным ρ и θ равен нулю. Отсюда, учитывая, что $\rho \neq 0$, получим $Y'(\theta) Z(\theta) = Y(\theta) Z'(\theta)$. Общее решение этого уравнения относительно $Z(\theta)$ имеет вид $Z(\theta) = k_1 Y(\theta)$, что и доказывает теорему.

Подставляя теперь (6) — (8) в (5) и производя необходимые операции, получим

$$n^2(k+1) Y^2 + kY'^2 + YY'' = 0. \tag{9}$$

Решая уравнение (9) при начальных условиях $Y(0) = a_0 = a$, $Y'(0) = a_1 = nb$, найдем $Y(\theta)$; затем, домножая найденное выражение на ρ^n и возвращаясь к старым переменным u, v, получим

$$G_n(u, v) = a^{k/(k+1)} [\operatorname{Re}(a - ib) w^{n(k+1)}]^{1/(k+1)}, \quad k \neq -1, \tag{10}$$

$$G_n(u, v) = a \,| w^{(a-ib)/a} |^n, \quad k = -1.$$

Правые части формул (10), вообще говоря, при произвольных значениях n, a, b и k не являются полиномами. Простой анализ показывает, что полиномы здесь будут в том случае, когда k принимает следующие значения: или $k = -(p-1)/p$, где p — целый делитель n и a, b, n — произвольны; или, если $k = -1$, то необходимо $b = 0$, $n = 2p$.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Однородный изотермический полином может иметь лишь две формы:*

$$G_n(u, v) = a^{1-p} [\operatorname{Re}(a - ib) w^q]^p, \quad n = pq, \tag{11}$$

$$G_n(u, v) = a \,| w |^n, \quad n = 2p. \tag{12}$$

§ 2. Решение задачи (1)

В соответствии с теоремой 2 краевое условие задачи (1) сводится к одному из следующих:

$$\operatorname{Re}(a-ib)\,w^q(s)=\sqrt[p]{a^{p-1}g(s)}=g_1(s), \tag{13}$$

$$|w(s)|=\sqrt[2p]{a^{-1}g(s)}=g_2(s). \tag{14}$$

Рассмотрим отдельно каждый из этих двух случаев.

а) Пусть краевое условие (1) приводится к виду (13). Тогда, если p четно, то для разрешимости задачи (13) необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$a^{p-1}g(s)\geqslant 0. \tag{15}$$

Обозначим через $\{s_k\}$ множество всех нулей функции $g(s)$ в интервале $[0, 2\pi)$. Если $g(s)\equiv 0$ на некотором интервале, целиком принадлежащем данному, то к множеству $\{s_k\}$ отнесем лишь его начальную точку. В дальнейшем будем предполагать, что число h точек множества $\{s_k\}$ конечно. Тогда $g_1(s)$ может принимать 2^h различных вещественных значений, удовлетворяющих условию Гёльдера и условию $g_1(0)=g_1(2\pi)$ [1]. Если множество $\{s_k\}$ пусто, то $g_1(s)$ может принимать лишь два различных вещественных значения. Причем каждое решение задачи (13) при любом выбранном значении $g_1(s)$ будет решением исходной задачи (1) и, наоборот, каждое решение задачи (1) будет удовлетворять краевому условию (13), где $g_1(s)$ принимает одно из перечисленных выше значений. Таким образом, если p четно, то задача (1) в общем случае оказывается эквивалентой 2^h задачам типа (13), где свободные члены отличаются лишь знаком на некоторой совокупности интервалов из числа $[0, s_1]$, $[s_1, s_2], \ldots, [s_h, 2\pi]$. Если p нечетно, то для $g_1(s)$ возможно единственное вещественное значение радикала. Полагая теперь

$$(a-ib)\,w^q(z)=w_1(z), \tag{16}$$

исходную задачу сведем к вспомогательной — задаче Шварца: $\operatorname{Re} w_1(s)=g_1(s)$. Очевидно, что каждому аналитическому решению задачи (13) соответствует аналитическое же решение вспомогательной задачи Шварца. Обратное не всегда верно, так как функция $w(z)$, найденная на основании равенства (16), может иметь точки ветвления. Для того, чтобы функция $w(z)=\sqrt[q]{(a-ib)^{-1}w_1(z)}$ не имела точек ветвления, решение задачи Шварца следует искать в классе аналитических функций, для кратностей нулей которых q являлось бы целым делителем. В дальнейшем этот класс функций будем обозначать через M_q. Очевидно, для любого $q\geqslant 1$ справедливо включение $M_0\subset M_q$, где M_0 — класс аналитических функций, вообще не имеющих нулей в рассматриваемой области $D: |z|<1$.

Как известно, общее решение задачи Шварца в классе аналитических функций определяется формулой

$$w_1(z)=S(g_1(s))+ic, \tag{17}$$

где $S(g_1(s))$ есть интеграл Шварца с плотностью $g_1(s)$, а c — произвольная вещественная константа. Покажем, что за счет соответствующего выбора константы c всегда можно добиться того, чтобы

[1] На возможность появления более двух вещественных значений радикала при наличии нулей у $g(s)$ обратил мое внимание Г. В. Аржанов.

функция $w_1(z)$, определяемая равенством (17), принадлежала классу M_q, в частности, классу M_0.

Поставим в соответствие каждому из 2^h возможных значений $g_1(s)$ подмножество $\{s_{k_i}\}$, $i=\overline{1,2r}$, точек множества $\{s_k\}$ так, чтобы $g_1(s)$ сохраняла знак на любой дуге окружности C, не содержащей точек, соответствующих точкам множества $\{s_{k_i}\}$. Число точек каждого из множеств $\{s_{k_i}\}$ будет четным, так как $g_1(0)=g_1(2\pi)$. Обозначим, далее, через $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_r, \beta_r$ предельные значения мнимой части $S(g_1(s))$ в точках множества $\{s_{k_i}\}$, пронумерованные в порядке неубывания, так что $\alpha_1 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_r \leqslant \beta_r$. Тогда, если функция $S(g_1(s))$ однолистна в области D, то функция $\omega_1(z)$ не обращается там в нуль, когда c изменяется в следующих пределах:

$$-\alpha_1 \leqslant c, \ -\alpha_2 \leqslant c \leqslant -\beta_1, \ldots, -\alpha_r \leqslant c \leqslant -\beta_{r-1}, \ c \leqslant -\beta_r. \tag{18}$$

Если же функция $S(g_1(s))$ неоднолистна в D, то в общем случае $w_1(z) \in M_0$ лишь при $-\alpha_1 \leqslant c$ или $c \leqslant -\beta_r$. Однако, в частности, в допустимую область изменения константы c могут входить некоторые или даже все интервалы из числа $[-\alpha_i, -\beta_{i-1}]$. Кроме того, в этом случае для c допустимы все те значения, при которых функция (17) имеет нуль своей lq кратной точкой. Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Если однородный изотермический полином имеет вид* (11) *и p четно, то в случае выполнения условия* (15) *задача* (1) *имеет в общем случае 2^h групп решений по q решений в каждой, причем решения внутри каждой из групп отличаются лишь множителем* $\exp 2\pi ki/q$, $k=\overline{0, q-1}$. *Если p нечетно, то задача* (1) *имеет ровно q решений. В каждое решение, как в случае четного, так и в случае нечетного p, нелинейным образом входит одна вещественная константа, произвол которой ограничен указанными выше условиями.*

b) Пусть теперь краевое условие имеет вид (14). Здесь мы имеем дело с задачей о восстановлении аналитической функции по заданным на контуре значениям ее модуля. Для разрешимости задачи в этом случае необходимо потребовать, чтобы всюду на C выполнялось неравенство

$$a^{-1}g(s) > 0. \tag{19}$$

Решение поставленной задачи в классе аналитических функций, не принимающих нулевых значений внутри единичного круга, уже рассматривалось ([5], с. 306). В общем случае, как легко видеть, решение дается формулой

$$w(z) = e^{ic} \prod_{k=1}^{l} (z-c_k) \exp S(g_2^*(s)), \tag{20}$$

где $S(g_2^*(s))$ — интеграл Шварца с плотностью

$$g_2^*(s) = \ln g_2(s) - \sum_{k=1}^{l} \ln |e^{is} - c_k|, \quad |c_k| > 1,$$

c — произвольная вещественная константа. Отметим, что некоторые или даже все константы c_k могут совпадать друг с другом. Таким образом, если не накладывать на искомую функцию дополнительных ограничений, касающихся расположения и числа ее нулей, то формула (20) дает бесконечное число решений исходной задачи при произвольных значениях c_k и l. В дальнейшем будем допускать у искомой аналитической функции лишь нуль порядка l в начале координат; тогда из (20) получим

$$w(z) = e^{ic} z^l \exp S(\ln g_2(s)). \tag{21}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 4. *Если задача* (1) *приводится к задаче* (14), *то для существования решения необходимо и достаточно выполнения условия* (19). *Если условие* (19) *выполнено, то задача* (1) *имеет единственное решение, которое определяется по формуле* (21) *и в которое входит одна произвольная константа.*

§ 3. Об одном обобщении задачи (1)

Рассмотренную выше задачу можно несколько обобщить, если считать коэффициенты полинома (4) переменными, т. е. положить $a_j = a_j(s)$, где $a_j(s)$ — заданные на C вещественные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, $a_j(0) = a_j(2\pi)$, $j = \overline{1, n}$, и $a_0^2(s) + a_1^2(s) \neq 0$. Пусть, по-прежнему, полином (4) по переменным u, v удовлетворяет условию (2). Следует отметить, что при этих предположениях полином $G_n(u, v, s)$ изотермическим, вообще говоря, не будет. Равенство $G_n(u, v, s) = g(s)$ при каждом фиксированном значении $s = s_0$ определяет в общем случае кривые, принадлежащие различным изотермическим семействам. В силу вышесказанного и на основании теоремы 1, можем утверждать, что полином $G_n(u, v, s)$ удовлетворяет дифференциальному соотношению

$$\frac{\Delta G_n(u, v, s)}{[\nabla G_n(u, v, s)]^2} = \frac{-k(s)}{G_n(u, v, s)}, \tag{22}$$

где $k(s)$ — либо константа, либо кусочно-постоянная функция. Покажем, что последнее невозможно. На самом деле, из равенства (22) найдем $k(s) = -G_n \Delta G_n / [\nabla G_n]^2$. Левая часть последнего равенства от u, v не зависит, поэтому можем рассматривать его при некоторых фиксированных значениях этих переменных. Если положить, например, $u = 1$, а $v = 0$, то получим $k(s) = [n(n-1) a_0^2(s) + 2a_2(s) a_0(s)] : [n^2 \; a_0^2(s) + a_1^2(s)]$. Отсюда, в силу свойств функций $a_j(s)$, сразу следует, что $k(s)$ удовлетворяет условию Гёльдера всюду на C. Полученное противоречие доказывает наше предположение. Поступая далее аналогично тому, как и в первом параграфе, найдем общий вид полинома $G_n(u, v, s)$, который будет совпадать с (11) или (12), где надо считать a и b функциями от s. Краевое условие, соответственно, сведется к виду (13) или (14).

Если краевое условие имеет вид (14), то, как и в случае полинома с постоянными коэффициентами, имеет место теорема 4.

Случай, когда краевое условие имеет вид (13), подстановкой $w_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y) = w^q(z)$ приводится к линейной краевой задаче Гильберта

$$\operatorname{Re}[a(s) - ib(s)] w_1(s) = g_1(s), \tag{23}$$

где $g_1(s) = \sqrt[p]{a^{p-1}(s) g(s)}$. Если p четно, то требуем, чтобы выполнялось условие (15). Если условие (15) выполнено, то $g_1(s)$ может принимать 2^h различных вещественных значений, где h — число нулей функции $a^{p-1}(s)g(s)$ в интервале $[0, 2\pi)$. Здесь, как и в случае полинома с постоянными коэффициентами, каждому аналитическому решению задачи (13) соответствует единственное аналитическое же решение вспомогательной задачи (23). Обратное верно лишь тогда, когда $w_1(z) \in M_q$, причем каждому такому решению соответствует q решений задачи (13).

В соответствии с последним замечанием рассмотрим прежде всего *решение однородной задачи Гильберта в классе* M_q. Считаем, что в (23) $g_1(s) \equiv 0$. Пусть $\varkappa = \operatorname{Ind}[a(s) + ib(s)]$. Тогда при $\varkappa < 0$ однородная задача Гильберта, как известно ([5], с. 252), в классе аналитических функций, а тем более в классе M_q, неразрешима. При $\varkappa \geqslant 0$ решение, следуя работе [6], будем искать в виде $w_1(z) = B^q(z)\, w_2(z)$, где $w_2(z) \in M_0$, а функция Бляшке

$$B(z) = z^{\mu} \prod_{k=1}^{\nu} \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z}$$

имеет нули в точках $z = a_k$, $|a_k| < 1$, среди которых могут быть и одинаковые. Для определения функции $w_2(z)$ получим краевую задачу

$$\operatorname{Re}[a(s) - ib(s)]\, B^q(s)\, w_2(s) = 0$$

с индексом $\varkappa_1 = \operatorname{Ind}[a(s) + ib(s)]/B^q(s) = \varkappa - q(\mu + \nu)$. Будем считать, что числа μ и ν подобраны таким образом, что $\varkappa_1 \geqslant 0$; итак, эта задача разрешима. Ее общее решение в классе аналитических функций имеет вид

$$w_2(z) = z^{\varkappa_1} e^{i\gamma(z)} [P_{\varkappa_1}(z) - \overline{P_{\varkappa_1}}(1/z)],$$

где $\gamma(z)$ — интеграл Шварца с плотностью $[\arg[a(s)+ib(s)]/B^q(s) - \varkappa_1 s]$. В работе [6] показано, что функция $w_2(z) \neq 0$ всюду в D, если все корни полинома $P_{\varkappa_1}(z)$ одновременно лежат либо в области $|z| \leqslant 1$, либо в области $|z| \geqslant 1$. Таким образом, общее решение исходной однородной задачи Гильберта в классе M_q представимо в виде

$$w_1(z) = z^{\varkappa_1 + \mu q} \prod_{k=1}^{\nu} \left(\frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z}\right)^q e^{i\gamma(z)} \left[c \prod_{k=1}^{\varkappa_1} (z - b_k) - \bar{c} \prod_{k=1}^{\varkappa_1} \left(\frac{1}{z} - \bar{b}_k\right)\right],$$

где $|a_k| < 1$, $k = \overline{1, \nu}$, $|b_k| \leqslant 1$, $k = \overline{1, \varkappa_1}$, или $|b_k| \geqslant 1, k = \overline{1, \varkappa_1}$, c — произвольная комплексная константа, а $\mu = \overline{0, [\varkappa/q]}$ и $\nu = \overline{0, [\varkappa/q]}$ — целые числа, причем такие, что $\mu + \nu = \overline{0, [\varkappa/q]}$. Значит, в общее решение входит $\nu + \varkappa_1 + 1 \leqslant \varkappa + 1$ комплексных констант, ограниченных в совокупности (кроме c) по модулю единицей, а в остальном абсолютно произвольных, если не накладывать дополнительных ограничений на расположение и число нулей у искомой функции.

Найдем *решение неоднородной задачи Гильберта в классе* M_q. Пусть, по-прежнему, $\varkappa$ есть индекс комплекснозначной функции $a(s) + ib(s)$.

1°. $\varkappa < 0$. Неоднородная задача имеет в этом случае единственное решение в аналитических функциях лишь тогда, когда $g_1(s)$ удовлетворяет $-2\varkappa - 1$ необходимым и достаточным условиям разрешимости

$$\int_0^{2\pi} g_1(\sigma)\, e^{\omega_1(\sigma)} \begin{Bmatrix} \cos k\sigma \\ \sin k\sigma \end{Bmatrix} d\sigma = 0, \quad k = \overline{0, -\varkappa - 1}, \tag{24}$$

где $\omega_1(z)=\operatorname{Im}\gamma(z)$, а $\gamma(z)$ — интеграл Шварца с плотностью $\operatorname{arctg}(b(s)/a(s))-\varkappa s$. Это решение $w_1(z)=z^{\varkappa}e^{i\gamma(z)}S(g_1(s)e^{\omega_1(s)})$ будет принадлежать классу M_q только тогда, когда $g_1(s)$ будет удовлетворять некоторым дополнительным условиям разрешимости. Например, если наряду с условиями (24) выполняется условие $\int\limits_0^{2\pi}g_1(\sigma)e^{\omega_1(\sigma)+\varkappa\sigma}d\sigma\neq$ $\neq 0$ и нуль не принадлежит отрезку $[\alpha_1,\beta_r]$, где α_i, β_i — предельные значения мнимой части функции $z^{\varkappa}S(g_1(s)\exp\omega_1(s))$ в точках множества $\{s_{k_i}\}$, пронумерованные в порядке неубывания. Оба последних условия являются лишь достаточными и обеспечивают принадлежность функции $w_1(z)$ более узкому классу M_0. Более подробно заниматься характером ограничений, накладываемых на функцию $g_1(s)$, мы здесь не будем.

2°. $\varkappa=0$. В этом случае общее решение задачи Гильберта в аналитических функциях $w_1(z)=e^{i\gamma(z)}[S(g_1(s)e^{\omega_1(s)})+ic]$ будет принадлежать классу M_q, если соответствующим образом (как и для полинома с постоянными коэффициентами) распорядиться вещественной константой c.

3°. $\varkappa>0$. Чтобы аналитическое решение задачи (23)

$$w_1(z)=z^{\varkappa}e^{i\gamma(z)}[S(g_1(s)e^{\omega_1(s)})+P_{\varkappa}(z)-\overline{P}_{\varkappa}(1/z)] \tag{25}$$

принадлежало классу M_q, необходимо наложить некоторые ограничения на коэффициенты полинома $P_{\varkappa}(z)$. Покажем, прежде всего, что этого всегда можно добиться, если $\varkappa$ есть целое кратное q. Действительно, поступая как и при решении однородной задачи и выбирая числа μ и ν так, чтобы $\varkappa_1=0$, решение задачи (23) получим в виде

$$w_1(z)=z^{\mu q}\prod_{k=1}^{\nu}\left(\frac{z-a_k}{1-\overline{a}_k z}\right)^q e^{i\gamma(z)}[S(g_1(s)e^{\omega_1(s)})+ic]. \tag{26}$$

Вещественную константу c, как мы видели, всегда можно выбрать так, чтобы выражение, стоящее в квадратных скобках формулы (26), принадлежало классу M_q, причем здесь пределы изменения c будут зависеть от значений констант a_k, так как от последних зависит плотность интеграла Шварца.

Если же q не является целым делителем $\varkappa$, то неоднородная задача Гильберта в классе функций M_q при произвольных значениях $g_1(s)$, вообще говоря, неразрешима. Так, например, если $2\varkappa\leqslant q$, а $S(g_1(s)\exp\omega_1(s))$ есть полином степени не выше $\varkappa-1$, то при любых значениях коэффициентов полинома $P_{\varkappa}(z)$ функция, стоящая в квадратных скобках формулы (25), будет иметь нули в D, причем кратности меньше q. Покажем это. Пусть $S(g_1(s)\exp\omega_1(s))\equiv$ $\equiv A_1z^{\varkappa-1}+A_2z^{\varkappa-2}+\ldots+A_{\varkappa}$. Тогда

$$z^{\varkappa}[S(g_1(s)\exp\omega_1(s))+P_{\varkappa}(z)-\overline{P}_{\varkappa}(1/z)]\equiv c_{\varkappa}z^{2\varkappa}+(c_{\varkappa-1}+A_1)z^{2\varkappa-1}+\ldots$$
$$\ldots+(c_1+A_{\varkappa-1})z^{\varkappa+1}+(A_{\varkappa}+ic)z^{\varkappa}-\overline{c}_1z^{\varkappa-1}-\ldots-\overline{c}_{\varkappa}. \tag{27}$$

Ясно, что либо все корни полинома (27) лежат на окружности C, либо по крайней мере один из корней, кратность которого заведомо меньше q, лежит в D. Пусть все корни $z_k=\exp i\varphi_k$, $k=\overline{1,2\varkappa}$, лежат на C. Составим симметричные функции S_k корней полинома (27). Учитывая, что в нашем случае $S_k/S_{2\varkappa}=\overline{S_{2\varkappa-k}}$ и $S_k=(-1)^k(c_{\varkappa-k}+A_k)/c_\varkappa$, $k=\overline{1, \varkappa-1}$, $S_\varkappa=(-1)^\varkappa(A_\varkappa+ic)/c_\varkappa$, $S_{2\varkappa-k}=-(-1)^k\overline{c}_{\varkappa-k}/c_\varkappa$, $k=\overline{0, \varkappa-1}$, получим $c_{\varkappa-k}+A_k=c_{\varkappa-k}$, $k=\overline{1, \varkappa-1}$ и $A_\varkappa+ic=-(A_\varkappa-ic)$, откуда $A_k=0$, $k=\overline{1, \varkappa-1}$, $\operatorname{Re} A_\varkappa=0$. Следовательно, $S(g_1(s)\exp\omega_1(s))\equiv \equiv i\operatorname{Im} A_\varkappa$, отсюда $g_1(s)\equiv 0$, но, по предположению, $g_1(s)\not\equiv 0$, что и доказывает наше утверждение. Таким образом, при $\varkappa=q[\varkappa/q]+\varkappa_1$ и $0<\varkappa_1<q$ задача Гильберта в классе функций M_q разрешима лишь тогда, когда $g_1(s)$ удовлетворяет некоторым условиям разрешимости, например, если интеграл Шварца $S(g_1(s)\exp\omega_1(s))$ имеет единственный нуль в начале координат порядка в точности равного $q-\varkappa_1$, т. е. эти условия совпадают с теми, которые мы накладывали на функцию $g_1(s)$ в случае отрицательного индекса. Когда эти условия выполнены, решение получим на основании формулы (25), если положим $P_\varkappa(z)\equiv 0$. Тем самым доказана

Теорема 5. *Однородная нелинейная задача* (1), *приводящаяся к задаче вида* (13), *имеет ровно q решений, если индекс $\varkappa$ комплексной функции $a(s)+ib(s)$ неотрицателен, и неразрешима при $\varkappa<0$.*

Неоднородная задача безусловно разрешима лишь при $\varkappa=ql$, где $l\geqslant 0$ — целое число, и имеет в этом случае $q2^h$ решений при p четном и q решений при нечетном p. Во всех остальных случаях задача разрешима лишь тогда, когда $g_1(s)$ удовлетворяет некоторым условиям разрешимости.

В заключение выражаю глубокую благодарность своему руководителю профессору Л. И. Чибриковой за постоянное внимание к работе.

г. Казань

Поступило
29 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Наталевич В. К. Нелинейные сингулярные интегральные уравнения и нелинейные краевые задачи теории аналитических функций. Учен. зап. Казанск. ун-та, т. 112, кн. 10, 1952, с. 155—190.
2. Наталевич В. К. Об одной нелинейной краевой задаче аналитических функций. Научн. тр. Новочеркасск. политехн. ин-та, т. 26, 1955, с. 455—459.
3. Аксентьева Е. П. К исследованию нелинейной граничной задачи, I. Изв. вузов, Матем., 1970, № 5, с. 14—23.
4. Аксентьева Е. П. К исследованию нелинейной граничной задачи, II. Изв. вузов, Матем., 1970, № 6, с. 16—21.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
6. Чибрикова Л. И., Салехов Л. Г. К решению краевой задачи Гильберта. Тр. Семин. по краевым задачам. Изд. Казанск. ун-та, вып. 8, 1971, с. 155—175.