В. К. Захаров, О функциональном представлении инъективной оболочки и критерии инъективности некоторых модулей, *Изв. вузов. Матем.*, 1973, номер 9, 27–30

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1973 МАТЕМАТИКА № 9 (136)

УДК 519.4

*В. К. Захаров*

# О ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИНЪЕКТИВНОЙ ОБОЛОЧКИ И КРИТЕРИИ ИНЪЕКТИВНОСТИ НЕКОТОРЫХ МОДУЛЕЙ

В работе устанавливается представление инъективной оболочки $I(A)$ модуля $A$ без кручения относительно фильтра $\mathfrak{F}_R$ всех плотных идеалов кольца $R$ посредством сечений пучка $\mathfrak{A}$ над фильтром плотных открытых подмножеств в пространстве максимальных идеалов полупримитивного отделимого кольца $R$ (теорема 1). Это представление является некоторым аналогом для модулей результата Банашевского [3] о представлении полупервичных колец. С помощью функционального представления $A$ и $I(A)$ получается алгебраическая характеризация инъективных модулей без кручения относительно $\mathfrak{F}_R$ (теорема 2), представляющая собой обобщение критерия Андерсона [5] самоинъективности регулярного $F$-кольца.

Определение всех используемых понятий можно найти в [1] и [2].

Приведем некоторые факты из [1] и [4], относящиеся к функциональным представлениям колец и модулей. Пусть $R$ — коммутативное полупримитивное кольцо, для которого пространство максимальных идеалов $\mathfrak{M}(R)$ хаусдорфово. Такое кольцо будем называть отделимым. Пусть $O_P \equiv \{r \in R \mid \exists s \notin P rs = 0\}$ — компонента идеала $P \in \mathfrak{M}$. Кольцо $R$ можно подпрямо вложить в $\Pi\{R/O_P \mid P \in \mathfrak{M}\}$, полагая $\hat{r}(P) \equiv r \bmod O_P$. Множество $\mathfrak{R} \equiv \bigcup\{R/O_P \mid P \in \mathfrak{M}\}$ можно превратить в пучок, рассматривая в качестве базиса открытых множеств $\hat{r}(V) \equiv \{\hat{r}(P) \mid P \in V\}$, где $r \in R$ и $V$ — открытое множество в $\mathfrak{M}$.

Пусть $A$ есть $R$-модуль. Пусть $T_P(A) \equiv \{a \in A \mid \exists s \in R,\ s \notin P,\ sa = 0\}$ — компонента идеала $P$ в $A$. Модуль $A$ можно подпрямо вложить в $\Pi\{A/T_P(A) \mid P \in \mathfrak{M}\}$, полагая $\hat{a}(P) \equiv a \bmod T_P(A)$. Множество $\mathfrak{A} \equiv \bigcup\{A/T_P(A) \mid P \in \mathfrak{M}\}$ можно превратить в пучок, рассматривая в качестве базиса открытых множеств $\hat{a}(V) \equiv \{\hat{a}(P) \mid P \in V\}$. Для любого элемента $r \in R$ обозначим $Sr \equiv \{P \in \mathfrak{M} \mid r \notin P\}$.

Напомним, что идеал $D \subset R$ называется плотным, если $rD \neq 0$ для любого $0 \neq r \in R$. Фильтр всех плотных идеалов обозначим $\mathfrak{F}_R$. Дадим характеризацию модулей $A$ без кручения относительно $\mathfrak{F}_R$, т. е. таких модулей, что $T_{\mathfrak{F}_R}(A) \equiv \{a \in A \mid a^{-1}0 \in \mathfrak{F}_R\} = \{0\}$.

Лемма. *Пусть $A$ — модуль над полупримитивным отделимым кольцом $R$. Следующие условия эквивалентны:* а) *$A$ — модуль без кручения относительно $\mathfrak{F}_R$;* в) *для любого $0 \neq a \in A$ $\operatorname{supp} \hat{a}$ является регулярным замкнутым множеством в $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого $0\neq b\in A$ $\operatorname{supp}\hat{b}$ не является регулярным множеством. Тогда найдется точка $P\in\operatorname{supp}\hat{b}$ и окрестность $W\ni P$ такие, что $W$ не пересекается с $\operatorname{Int}\operatorname{supp}\hat{b}$. Рассмотрим элемент $r\in R$ такой, что $\overline{Sr}\subset W$ и $r\notin P$. Ясно, что $a\equiv rb\neq 0$ и $\operatorname{supp}\hat{a}\subset W$. Предположим, что существует открытое множество $V\subset\operatorname{supp}\hat{a}$. Так как для всех $P'\in V$ $\hat{r}(P')\hat{b}(P')\neq 0$, то $\hat{b}(P')\neq 0$, что противоречит выбору окрестности $W$. Значит, $\operatorname{supp}\hat{a}$ является нигде не плотным множеством. Поэтому множество $U\equiv\bigcup\{Sr\,|\,r\in a^{-1}0\}$ является плотным в $\mathfrak{M}$. Следовательно, $a^{-1}0$ является плотным идеалом и $a\neq 0$. Так как $A$ — модуль без кручения, то это невозможно.

Обратно, пусть для любого $0\neq a\in A$ $\operatorname{supp}\hat{a}$ является регулярным множеством. Пусть $a\in T_{\mathfrak{F}_R}(A)$ и $U\equiv\bigcup\{Sr\,|\,r\in a^{-1}0\}$. Тогда для любой точки $P\in U$ существует $r\in R$ такой, что $r\notin P$ и $ra=0$. Значит, $\hat{a}(P)=0$ и поэтому $\hat{a}\,|\,U=0$. Так как $a^{-1}0$ — плотный идеал, то $U$ — плотное множество. Следовательно, по предположению, $a=0$. Значит, $A$—модуль без кручения относительно $\mathfrak{F}_R$.

Пусть $\mathfrak{U}$ обозначает направленное по убыванию множество всех плотных открытых подмножеств в $\mathfrak{M}$. Пусть $\varinjlim\{\Gamma(U,\mathfrak{A})\,|\,U\in\mathfrak{U}\}$ обозначает индуктивный предел по направлению $\mathfrak{U}$ модулей $\Gamma(U,\mathfrak{A})$ относительно отображений сужения. Если $A$ — модуль без кручения относительно $\mathfrak{F}_R$, то в силу леммы $A$ мономорфно вкладывается в этот предел.

Теорема 1. *Пусть $A$ — модуль без кручения относительно $\mathfrak{F}_R$ над полупримитивным отделимым кольцом $R$ и $I(A)$ — инъективная оболочка $A$. Тогда*

$$I(A)\cong\varinjlim\{\Gamma(U,\mathfrak{A})\,|\,U\in\mathfrak{U}\}.$$

Доказательство. Пусть $K$ — произвольный идеал в $R$ и $V\equiv\bigcup\{Sr\,|\,r\in K\}$. Пусть $f\in\operatorname{Hom}_R(K,S(A))$, где $S(A)$ обозначает описанный индуктивный предел. Пусть $\sigma(fr)\in\Gamma(U,\mathfrak{A})$ — некоторый элемент из класса эквивалентности $fr$, $r\in K$. Пусть $P\in Sr$, т. е. $\hat{r}(P)\notin P/O_P$. Так как $R/O_P$ — локальное кольцо, то $P/O_P$ — единственный максимальный идеал в этом кольце, следовательно, $\hat{r}(P)$ обратим в $R/O_P$, т. е. существует $s\in R$ такой, что $\hat{r}(P)\hat{s}(P)=\hat{1}(P)$. Поэтому мы можем корректно определить некоторое сечение $\sigma(h)$ пучка $\mathfrak{A}$ над плотным открытым подмножеством в множестве $V$, положив $\sigma(h)(P)\equiv\sigma(fr)(P)/\hat{r}(P)$ для $P\in U\cap Sr$.

Пусть $\sigma(fr')\in\Gamma(U',\mathfrak{A})$ для $r'\in K$. Так как для всех $P\in U\cap Sr\cap\cap U'\cap Sr'$ выполнено $\sigma(fr)(P)/\hat{r}(P)=\hat{r}'(P)\sigma(fr)(P)/\hat{r}'(P)\hat{r}(P)=\hat{r}(P)\sigma(fr')(P)/\hat{r}(P)\hat{r}'(P)=\sigma(fr')(P)/\hat{r}'(P)$, то приведенное определение корректно. Доопределим $\sigma(h)$ нулем вне $\overline{V}$. Итак, $\sigma(h)$ определено на плотном открытом подмножестве в $\mathfrak{M}$ и, следовательно, определяет элемент $h\in S(A)$.

Для любых $r \in K$ и $P_0 \in V$ найдутся окрестность $Sr' \ni P_0$ и плотное открытое подмножество $U \cap U' \cap Sr'$ этой окрестности такие, что для всех $P \in U \cap U' \cap Sr'$ выполнено

$$\sigma(fr)(P) = \hat{r'}(P)\sigma(fr)(P)/\hat{r'}(P) = \hat{r}(P)\sigma(fr')(P)/\hat{r'}(P) =$$
$$= \hat{r}(P)\sigma(h)(P).$$

Для любой точки $P \in \mathfrak{M} \setminus \overline{V}$ найдется $s \in R$ такой, что $P \in Ss \subset \mathfrak{M} \setminus \overline{V}$. Тогда из $rs = 0$ следует $sf(r) = f(rs) = 0$. Так как $\sigma(\hat{s}fr) = s\sigma(fr)$, то $\sigma(fr)(P') = 0$ для всех $P'$ из некоторого плотного открытого подмножества в $\mathfrak{M} \setminus \overline{V}$. Значит, для этих точек $P'$ имеем $\sigma(fr)(P') = = \hat{r}(P')\sigma(h)(P')$.

Окончательно получаем, что $\sigma(fr)$ и $\hat{r}\sigma(h)$ совпадают на плотном открытом подмножестве в $\mathfrak{M}$, следовательно, $fr = rh$. По критерию Бэра это означает, что $R$-модуль $S(A)$ инъективен.

Пусть $B$ — подмодуль в $S(A)$ и $A \cap B = 0$. Предположим, что существует $0 \neq b \in B$. Пусть $\sigma \in \Gamma(U, \mathfrak{A})$ — некоторый элемент из класса эквивалентности $b$. Тогда существует $r \in R$ такой, что $\hat{r}\sigma \neq 0$ и $r\sigma \in A$. Следовательно, $0 \neq rb \in A \cap B$, что невозможно. Итак, $B = 0$. Значит, $S(A)$ — существенное расширение $A$ и, следовательно, инъективная оболочка.

Теорема 2. *Пусть $A$ — модуль без кручения относительно $\mathfrak{F}_R$ над полупримитивным отделимым кольцом $R$. Следующие утверждения эквивалентны*: а) *$A$ — инъективный модуль над $R$*; в) *для любого максимального множества $\{r_\gamma \in R \mid \gamma \in \Gamma\}$ попарно ортогональных элементов и любого множества $\{a_\gamma \in A \mid \gamma \in \Gamma\}$ такого, что из $s \in R$ и $sr_\gamma = 0$ следует $sa_\gamma = 0$, существует элемент $a \in A$ такой, что $r_\gamma a = a_\gamma$ для каждого $\gamma \in \Gamma$.*

Доказательство. Предположим, что выполнено утверждение в). Пусть $K$ — произвольный идеал в $R$ и $f \in \mathrm{Hom}_R(K, A)$. Рассмотрим открытое подмножество $U \equiv \bigcup\{Sr \mid r \in K\}$ и максимальную систему попарно ортогональных элементов из $K$. Дополним ее до максимальной системы $\{r_\gamma\}$ в $R$. Рассмотрим элементы $a_\gamma \equiv fr_\gamma \in A$. По условию, найдется элемент $a \in A$ такой, что $r_\gamma a = a_\gamma$. Тогда для каждого $r \in K$ и любой точки $P \in \bigcup\{Sr_\gamma \mid r_\gamma \in K\}$ будет выполнено

$$\widehat{fr}(P) = \hat{r}_\gamma(P)\widehat{fr}(P)/\hat{r}_\gamma(P) = \hat{r}(P)\widehat{fr_\gamma}(P)/\hat{r}_\gamma(P) =$$
$$= \hat{r}(P)\hat{r}_\gamma(P)\hat{a}(P)/\hat{r}_\gamma(P) = \hat{r}(P)\hat{a}(P).$$

Для любой точки $P \notin \overline{U}$ будет выполнено $\widehat{fr}(P) = 0 = \hat{r}(P)\hat{a}(P)$. Так как $\bigcup\{Sr_\gamma \mid r_\gamma \in K\}$ плотно в $U$, то получилось, что для всех точек $P$ из плотного открытого подмножества в $\mathfrak{M}$ имеем $fr(P) = = \widehat{r}(P)\hat{a}(P)$. Так как $A$ — модуль без кручения относительно $\mathfrak{F}_R$, то по лемме $fr = ra$. По критерию Бэра, модуль $A$ инъективен.

Обратно, предположим, что выполнено утверждение а). Пусть $\{r_\gamma\}$ — максимальное множество попарно ортогональных элементов из $R$ и $\{a_\gamma\}$ — соответствующее множество из $A$. Рассмотрим сечение $\sigma \in \Gamma(\bigcup Sr_\gamma, \mathfrak{A})$ такое, что $\sigma \mid Sr_\gamma = \hat{a}_\gamma/\hat{r}_\gamma \mid Sr_\gamma$. По теореме 1 имеем $\sigma \in I(A) = A$. Значит, $\sigma = \hat{a}$ для некоторого $a \in A$. Так как $\hat{r}_\gamma(P)\hat{a}(P) = \hat{r}_\gamma(P)\sigma(P) = \hat{r}_\gamma(P)\hat{a}_\gamma(P)/\hat{r}_\gamma(P) = \hat{a}_\gamma(P)$ для каждой точки $P \in Sr_\gamma$ и $\hat{r}_\gamma(P)\hat{a}(P) = 0 = \hat{a}_\gamma(P)$ для всех $P \notin \overline{Sr_\gamma}$, то в силу леммы получается $r_\gamma a = a_\gamma$. Это и означает выполнимость утверждения в).

г. Ленинград

Поступило
10 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламбек И. Кольца и модули. М., „Мир", 1971.
2. Мишина А. П., Скорняков Л. А. Абелевы группы и модули. М., „Наука", 1969.
3. Banaschewski B. Maximal rings of quotients of semi-simple commutative rings. Arch. Math., v. 16, № 6, 1965, p. 414—420.
4. Lambek J. On the representation of modules by sheaves of factor modules. Canad. Math. Bull., v. 14, № 3, 1971.
5. Anderson F. Lattice-ordered rings of quotients. Canad. J. Math., v. 17, № 3, 1965, p. 434—448.