Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Х. И. Хакми, Сильно регулярные и слабо регулярные кольца и модули, *Изв. вузов. Матем.*, 1994, номер 5, 60–65

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.226.98.93
1 ноября 2024 г., 22:26:54

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1994 МАТЕМАТИКА № 5 (384)

УДК 512.80

Х.И.ХАКМИ

# СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫЕ И СЛАБО РЕГУЛЯРНЫЕ КОЛЬЦА И МОДУЛИ

В данной статье рассматриваются ассоциативные кольца с единицей и унитарные модули над ними.

Будем обозначать через $J(R)$, $J(M)$ соответственно радикал Джекобсона кольца $R$, правого $R$-модуля $M$, через $S=\mathrm{End}_R(M)$ - кольцо эндоморфизмов правого $R$-модуля $M$, $H=\mathrm{Hom}_R(M, J(M))$. В данной статье слабо регулярным модулем называется $I$-подобный модуль, введенный в [1]-[3], и поэтому напомним

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Правый $R$-модуль $M$ называется слаборегулярным ($I$-подобный в [1]-[3]), если всякий его подмодуль, не содержащийся в радикале $J(M)$, содержит нерадикальное циклическое прямое слагаемое модуля $M$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Правый $R$-модуль $M$ называется сильно регулярным, если всякий его подмодуль, не содержащийся в радикале $J(M)$, выделяется в $M$ прямым слагаемым.

В этой работе продолжается изучение как слабо регулярных модулей и колец, так и сильно регулярных модулей и колец.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3** ([4], с.109). Подмодуль $A$ правого $R$-модуля $M$ называется косущественным в $M$, если для любого подмодуля $U$ модуля $M$ такого, что $M=A+U$ вытекает $M=U$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4** ([4], с.211). Пересечение всех максимальных подмодулей модуля $M$ называется его радикалом Джекобсона и обозначается через $J(M)$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5** ([4], с.216). Правый $R$-модуль $M$ называется радикальным, если $M=$ $=J(M)$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6** ([7], с.439). Правый $R$-модуль $M$ называется квазипроективным, если для любого подмодуля $T$, модуля $M$ и всякого гомоморфизма $f$: $M \longrightarrow M/T$ существует гомоморфизм $h$: $M \longrightarrow M$ такой, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "\pi"] & M/T \arrow[r] & 0 \end{tikzcd},$$

где $\pi$ есть естественный эпиморфизм.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7** ([6], с.554). Правый $R$-модуль $M$ называется малопроективным, если для любого подмодуля $N$ модуля $M$ и любого эндоморфизма $\overline{\varphi}$: $M/N \longrightarrow M/N$ найдется эндоморфизм $\varphi$-модуля $M$ такого, что $\overline{\varphi}\pi=\pi\varphi$, где $\pi$ - естественный эпиморфизм $\pi$: $M \longrightarrow M/N$. Каждый квазипроективный модуль является малопроективным.

**ТЕОРЕМА 1.** *Пусть $M \neq J(M)$ - сильно регулярный правый $R$-модуль, тогда радикал Джекобсона $J(M)$ является косущественным подмодулем в $M$.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть $U$ - подмодуль модуля $M$ такой, что $M=U+J(M)$. Если $M=U$, то утверждение очевидно.

Предположим, что $M \neq U$. Тогда ясно, что $U \not\subset J(M)$, $U$ не максимален. Докажем в этом случае, что $U$ является максимальным подмодулем в $M$. Пусть $D \neq M$ - подмодуль в $M$ такой, что $U \subset D$, тогда $M=U+J(M) \subset D+J(M) \subset M$. Отсюда следует, что

$$U+J(M) = D+J(M). \tag{1}$$

Докажем, что $U \cap J(M) = D \cap J(M)$. Так как $U \subset D$, то $U \cap J(M) \subset D \cap J(M)$. Докажем обратное включение. Пусть $a \in D \cap J(M)$, тогда $a \in D$, $a \in J(M)$. Предположим, что $a \notin U$, поскольку $U \not\subset J(M)$, то $U+aR \not\subset J(M)$. Тогда из сильнорегулярности модуля $M$ следует, что $U+aR$ выделяется в $M$ прямым слагаемым, т.е. $M=(U+aR)\oplus U_0$ для некоторого подмодуля $U_0$. Так как $(U+aR)\cap U_0=0$, то в силу закона модулярности для подмодулей $U \subset U+aR$, $U_0$ имеем

$$(U+aR)\cap(U+U_0) = U+[(U+aR)\cap U_0] = U.$$

Поскольку $a \in J(M)$, то $aR$ является косущественным подмодулем в $M$, тогда $M=U\oplus U_0$. Отсюда следует, что $U=(U+aR)\cap(U+U_0)=(U+aR)\cap M=aR+U$. Итак, получили $a \in aR \subset U$. Пришли к противоречию, следовательно, $a \in U \cap J(M)$ $\forall a \in D \cap J(M)$. Отсюда следует, что $D \cap J(M) \subset U \cap J(M)$. Тогда

$$D \cap J(M) = U \cap J(M). \tag{2}$$

Из $U \subset D$ и (1), (2) согласно лемме 1.4 ([5], с.75) имеем, что $U=D$, т.е. $U$ – максимальный подмодуль в $M$. Получено противоречие с предположением, что $M \neq U$. Это значит, что $J(M)$ – косущественный подмодуль в $M$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $M \neq J(M)$ – малопроективный правый $R$-модуль. Тогда эквивалентны следующие условия.*

(1) *Модуль $M$ слабо регулярный.*

(2) *Для любого эндоморфизма $\varphi \in S$ такого, что $\mathrm{Im}\,\varphi \not\subset J(M)$, $\mathrm{Im}\,\varphi$ содержит нерадикальное прямое слагаемое модуля $M$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Longrightarrow$ (2) следует из определения.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Пусть $A$ – подмодуль модуля $M$ такой, что $A \not\subset J(M)$. Тогда существует максимальный подмодуль $D$ модуля $M$ такой, что $A \not\subset D$. Отсюда следует, что $M=A+D$. В силу леммы 2.1 ([6], с.558) существуют гомоморфизмы $f_1$: $M \longrightarrow D$, $f_2$: $M \longrightarrow A$ такие, что $1 = f_1+f_2$. Тогда $\mathrm{Im} f_2 \not\subset J(M)$. Если $\mathrm{Im} f_2 \subset J(M)$, то поскольку $1=f_1+f_2$, следует, что $M=\mathrm{Im}\, f_1+\mathrm{Im}\, f_2 \subset D+J(M) \subset D \subset M$, т.е. $D=M$. Пришли к противоречию с максимальностью $D$. Это значит, что $\mathrm{Im}\, f_2 \not\subset J(M)$. В силу условия (2) теоремы 2 имеем, что $\mathrm{Im}\, f_2$ содержит нерадикальное прямое слагаемое $M_0$ модуля $M$, т.е. $M_0 \subseteq \mathrm{Im}\, f_2 \subseteq A$. Следовательно, модуль $M$ слабо регулярный. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $P \neq J(P)$ – малопроективный правый $R$-модуль такой, что $J(P)$ косущественен в $P$. Тогда, если $S=\mathrm{End}_R(P)$ – слабо регулярное кольцо, то модуль $P$ является слабо регулярным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A$ – подмодуль модуля $P$ такой, что $A \not\subset J(P)$. Тогда существует максимальный подмодуль $D$ модуля $P$ такой, что $A \not\subseteq D$. Отсюда следует, что $P=A+D$. Тогда согласно лемме 2.1 ([6], с.558) существуют гомоморфизмы $\varphi_1$: $P \longrightarrow A$, $\varphi_2$: $P \longrightarrow D$ такие, что $1=\varphi_1+\varphi_2$. Кроме того, $\varphi_1 \notin J(S)$. Если $\varphi_1 \in J(S)$, то из равенства $1=\varphi_1+\varphi_2$ следует, что $S=\varphi_1 S+ +\varphi_2 S$. Тогда существует $\lambda \in S$ такой, что $1=\varphi_2\lambda$. Отсюда $P=\mathrm{Im}\,\varphi_2\lambda \subseteq \mathrm{Im}\,\varphi_2 \subseteq D$, т.е. $P=D$, что противоречит максимальности $D$. Тогда $\varphi_1 \notin J(S)$. Из слаборегулярности кольца $S$ имеем, что $\varphi_1 S$ содержит идемпотентный элемент $e \neq 0$. Тогда $e=\varphi_1\mu$ для некоторого $\mu \in S$. Значит, $\mathrm{Im}\, e \subset \subset \mathrm{Im}\,\varphi_1$, где $\mathrm{Im}\, e$ – прямое слагаемое в $P$ и $\mathrm{Im}\, e \neq J(\mathrm{Im}\, e)$. Что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $P \neq J(P)$ – конечно порожденный квазипроективный правый $R$-модуль. Тогда эквивалентны следующие условия.*

(1) *Модуль $P$ слаборегулярный.*

(2) *Для любого $\varphi\in S$ такого, что $\varphi\notin J(S)$, $\operatorname{Im}\varphi$ содержит нерадикальное прямое слагаемое модуля $P$.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку $P$ – конечно порожденный правый $R$-модуль, то согласно следствию 2.30 ([8], с.319) следует, что $J(S)=\{f: f\in S;\ \operatorname{Im} f$ косуществен в $P\}$. Так как любой косущественный подмодуль в $P$ содержится в $J(P)$, то $J(S)\subseteq \operatorname{Hom}_R(P, J(P))$. Так как модуль $P$ конечно порожден, то из теоремы 9.2 ([4], с.216) вытекает, что $J(P)$ – косущественный подмодуль в $P$. Тогда, если $\psi\in S$ такой, что $\operatorname{Im}\psi\subset J(P)$, следует, что $\operatorname{Im}\psi$ косущественен в $P$. Отсюда $\operatorname{Hom}_R(P, J(P))\subseteq J(S)$. Итак, $J(S)=\operatorname{Hom}_R(P, J(P))$.

(1) $\Longrightarrow$ (2) следует из определения.

(2) $\Longrightarrow$ (1) следует из теоремы 2, поскольку всякий квазипроективный модуль является мало проективным.

**ЛЕММА.** *Пусть $M$ – правый $R$-модуль, $A$ – минимальный подмодуль в $M$ такой, что $A\not\subseteq J(M)$. Тогда имеет место следующее.*

(1) $J(A)=A\cap J(M)$.

(2) *$J(A)$ – косущественный подмодуль в $A$.*

(3) *Если $M$ – слабо регулярный модуль, то $A$ является прямым слагаемым в $M$.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (1) Ясно, что $J(A)\subseteq A\cap J(M)$. Пусть $a\in A\cap J(M)$. Докажем, что $aR$ косуществен в $A$. Пусть $U$ – подмодуль модуля $A$ такой, что $aR+U=A$. Отсюда следует, что $U\not\subseteq J(M)$. В противном случае получим, что $A=aR+U\subset J(M)$, приходим к противоречию с условием $A\not\subseteq J(M)$. В силу минимальности $A$ следует, что $A=U$, т.е. $aR$ косущественен в $A$. Отсюда $aR\subseteq J(A)$, т.е. $J(A)=A\cap J(M)$.

(2) Докажем, что $J(A)$ косущественен в $A$. Пусть $B$ – подмодуль модуля $A$ такой, что $J(A)+B=A$. Из $A\neq J(A)$ следует, что $B\not\subseteq J(A)$. Тогда из (1) следует, что $B\not\subseteq J(M)$. В силу минимальности $A$ получим, что $B=A$. Это значит, что $J(A)$ косущественен в $A$.

Утверждение (3) следует непосредственно из слабой регулярности модуля $M$. Лемма доказана.

**ТЕОРЕМА 5.** *Пусть $M$ – слаборегулярный правый $R$-модуль, $M\neq J(M)$ и радикал $J(M)$ – косущественный подмодуль в $M$. Тогда эквивалентны следующие условия.*

(1) *$R$-модуль $M$ имеет минимальный подмодуль $A$, не содержащийся в радикале $J(M)$.*

(2) *Кольцо эндоморфизмов $S=\operatorname{End}_R(M)$ имеет примитивный идемпотентный элемент.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (1) $\Longrightarrow$ (2). Пусть $A$ – минимальный подмодуль модуля $M$, удовлетворяющий условию $A\not\subseteq J(M)$. Тогда согласно лемме модуль $A$ выделяется прямым слагаемым в $M$. Пусть $f: M\longrightarrow A$ – проекция, тогда $f$ является идемпотентом, т.е. $f=f^2$, $f\in S$. Покажем, что $f$ – примитивный идемпотент. Действительно, если $f=e_1+e_2$, $e_1=e_1^2$, $e_2=e_2^2$, $e_1e_2=e_2e_1=0$, то $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} e_1\oplus\operatorname{Im} e_2$, ибо $u\in\operatorname{Im} e_1\cap\operatorname{Im} e_2$ влечет $u=e_1(m_1)=e_1^2(m_1)=e_1e_2(m_2))=0$. Если $\operatorname{Im} e_1\subseteq J(M)$ $\operatorname{Im} e_2\subseteq J(M)$, то $A=\operatorname{Im} f\subseteq J(M)$, что противоречит условию, поэтому либо $\operatorname{Im} e_1\not\subseteq J(M)$, либо $\operatorname{Im} e_2\not\subseteq J(M)$. Пусть $\operatorname{Im} e_1\not\subseteq J(M)$. Поскольку $\operatorname{Im} e_1\subseteq A$, $\operatorname{Im} e_1\not\subseteq J(M)$, то из минимальности $A$ и свойства $A\not\subseteq J(M)$ вытекает, что $\operatorname{Im} e_1=A$. Отсюда в силу $\operatorname{Im} e_2\subseteq A$, $\operatorname{Im} e_1=A$ и $\operatorname{Im} e_1\cap\operatorname{Im} e_2=0$ имеет место, что $\operatorname{Im} e_2=0$, $e_2=0$, $f=e_1$. Следовательно, $f$ – примитивный идемпотент.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Пусть $0\neq f\in S$, $f$ – примитивный идемпотент, тогда

$$M = \operatorname{Im} f\oplus\operatorname{Im}(1-f). \tag{3}$$

Положим $B=\operatorname{Im} f$. Покажем, что $B$ – минимальный подмодуль в $M$ со свойством $B\not\subseteq J(M)$.

Во-первых, если $B \subseteq J(M)$, то в силу косущественности радикала $J(M)$ из (3) следует, что $M=\mathrm{Im}(1-f)$, $\mathrm{Im}\, f \subseteq J(M)$. Отсюда $\mathrm{Im}\, f=0$, $f=0$. А так как по предположению $f \neq 0$, то $B \not\subseteq J(M)$.

Во-вторых, если $B$ – не минимальный подмодуль в $M$ со свойством $B \not\subseteq J(M)$, то существует подмодуль $k \neq 0$, $k \subset B$, $k \neq B$ такой, что $k \not\subseteq J(M)$. В силу слаборегулярности модуля $M$ следует, что $M=k_0 \oplus k_0^*$, $k=k_0 \oplus \tilde{k}_1$, $k_0 \not\subseteq J(M)$ и $B=k_0 \oplus k_1$. Пусть $k_1 \not\subseteq J(M)$. Так как $M=\mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Im}(1-f)= =B \oplus \mathrm{Im}(1-f)=k_0 \oplus k_1 \oplus \mathrm{Im}(1-f)$, то положив $f_1$, $f_2$ проекцию модуля $M$ соответственно на подмодули $k_0$ и $k_1$, получим $1=f_1+f_2+(1-f)$, $f=f_1+f_2$, $f_1=f_1^2 \neq 0$, $f_1=f_2^2 \neq 0$, что противоречит примитивности элемента $f$. Значит, $k_1 \subseteq J(M)$. Тогда $M=B \oplus \mathrm{Im}(1-f)=k_0 \oplus k_1 \oplus \mathrm{Im}(1-f)$ и в силу косущественности радикала $J(M)$ имеем $M=k_0 \oplus k_1 \oplus \mathrm{Im}(1-f)=k_0 \oplus \mathrm{Im}(1-f)$, т.е. $k_1=0$, $B=k_0$ и $B=k$. Получено противоречие с предположением $k \neq B$. Следовательно, $B=\mathrm{Im}\, f$ – минимальный подмодуль модуля $M$ со свойством $B \not\subseteq J(M)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6 ([1], с.368). *Для кольца $R$ эквивалентны следующие условия.*

(1) *$R$ – полусовершенное кольцо.*

(2) *$R$ – слабо регулярное кольцо и удовлетворяет условию максимальности идемпотентных элементов.*

ТЕОРЕМА 7. *Если кольцо $R$ удовлетворяет условию максимальности идемпотентных элементов, тогда эквивалентны следующие условия.*

(1) *Всякий $M \in \mathrm{mod}\text{-}R$ является слаборегулярным.*

(2) *Всякий $M \in \mathrm{mod}\text{-}R$ является суммой локальных $R$-модулей и всякий локальный подмодуль $aR$ модуля $M$ такого, что $aR \not\subseteq J(M)$, выделяется прямым слагаемым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1)$\Longrightarrow$(2). Согласно теореме 6 кольцо $R$ является полусовершенным. Тогда согласно предложению 22.19 ([9], с.250) кольцо $R$ является полулокальным $SBI$-кольцом. Отсюда и из 18.25 ([9], с.77) следует, что любой правый $R$-модуль $M$ представляется в виде суммы локальных подмодулей, т.е. $M=\sum_{i \in I} u_i R$, $u_i R$ – локальный подмодуль в $M$.

Пусть $aR$ – локальный подмодуль в $M$ такой, что $aR \not\subseteq J(M)$, тогда в силу слаборегулярности модуля $M$ следует, что $aR$ содержит нерадикальное прямое слагаемое $vR$ модуля $M$. Поскольку $aR$ неразложим, то $aR=vR$.

(2)$\Longrightarrow$(1). Пусть $M$ – правый $R$-модуль. Если $M=J(M)$, доказательство очевидно. Пусть $M \neq J(M)$ и $bR$ – подмодуль в $M$ такой, что $bR \not\subseteq J(M)$, тогда в силу условия (2) теоремы 7 вытекает, что $bR=\sum_{i \in I} b_i R$, где $b_i R$ – локальные $R$-модули. Так как $bR \not\subseteq J(M)$, то $\exists i_0 \in I$ такой, что $b_{i_0} R \not\subseteq J(M)$. Тогда $b_{i_0} R$ выделяется в $M$ прямым слагаемым. Следовательно, $M$ является слабо регулярным модулем. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть $M$ – нётеров слабо регулярный $R$-модуль. Тогда $M$ имеет разложение $M=\sum_{i=1}^{n} \oplus M_i$, где $M_i$ неразложимый и $S_i=\mathrm{End}_R(M_i)$ – локальное кольцо ($i=1,2,\dots,n$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $M$ нётеров, то согласно теореме 7.2.9 ([4], с.177) имеем, что $M=\sum_{i=1}^{n} \oplus M_i$ и $M_i$ неразложимый ($i=1,2,\dots,n$). Пусть $S_i=\mathrm{End}_R(M_i)$. Докажем, что $J(S_i)= =\mathrm{Hom}_R(M_i, J(M_i))$. Пусть $\varphi \in J(S_i)$, предположим, что $\mathrm{Im}\,\varphi \not\subseteq J(M_i)$. Тогда из слаборегулярности модуля $M_i$ следует, что $\mathrm{Im}\,\varphi$ содержит нерадикальное прямое слагаемое $A_0$ модуля $M_i$. Так как $M_i$ неразложим, то $M_i=A_0 \subseteq \mathrm{Im}\,\varphi$. Отсюда $M_i=\mathrm{Im}\,\varphi$. Тогда из теоремы 6.4.1 ([4], с.156) следует, что $\varphi$ – автоморфизм. Пришли к противоречию. Следовательно,

$$J(S_i) \subseteq \mathrm{Hom}_R(M_i, J(M_i))$$

– обратное включение. Пусть $\varphi \in S_i$ такой, что $\mathrm{Im}\,\varphi \subseteq J(M_i)$. Тогда $M_i = \mathrm{Im}\, s\varphi + \mathrm{Im}(1-s\varphi)$ для всякого $s \in S_i$. Так как $M_i$ конечно порожден, то $J(M_i)$ – косущественный подмодуль в $M_i$. Отсюда следует , что $\mathrm{Im}\, s\varphi$ – косущественный подмодуль в $M_i$. Тогда $M_i = \mathrm{Im}(1-s\varphi)$. Опять в силу теоремы 6.4.1 ([4], с.156) $(1-s\varphi)$ – автоморфизм для любого $s \in S_i$. Это значит, что $\varphi \in J(S_i)$, т.е.

$$J(S_i) = \mathrm{Hom}_R(M_i, J(M_i)).$$

Пусть $f \in S_i$. Если $f \in J(S_i)$, то $(1-f)$ обратим. Пусть $f \notin J(S_i)$, тогда $\mathrm{Im}\, f \not\subseteq J(M_i)$, откуда в силу слаборегулярности модуля $M_i$ следует, что $\mathrm{Im}\, f$ содержит нерадикальное прямое слагаемое $B$ модуля $M_i$; поскольку $M_i$ неразложим, то $M_i = B \subseteq \mathrm{Im}\, f \subseteq M_i$, т.е. $\mathrm{Im}\, f = M_i$ и $f$ – эпиморфизм. Снова из теоремы 6.4.1 ([4], с.156) следует, что $f$ – автоморфизм, т.е. $f$ – обратим. Отсюда $S_i$ – локальное кольцо $(i=1,2,\ldots,n)$.

**ТЕОРЕМА 9.** *Пусть $P$ – конечно порожденный проективный правый $R$-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(1) *$P$ – полусовершенный модуль.*

(2) *$P$ слабо регулярный и удовлетворяет условию максимальности прямых слагаемых.*

(3) *Если $A$ – подмодуль в $P$, то $A = P_0 + D$, где $P_0$ – прямое слагаемое модуля $P$ и модуль $D \subseteq J(P)$.*

(4) *$P$ слабо регулярный и $P/J(P)$ полупростой.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (1) $\Longrightarrow$ (2). Поскольку $P$ – полусовершенный модуль, то согласно следствию 2.3 ([10], с.348) имеем, что всякий подмодуль модуля $P$ либо содержится в радикале $J(P)$, либо содержит некоторое прямое слагаемое модуля $P$, т.е. $P$ слабо регулярный. Так как $P$ конечно порожден, полусовершенен, то в силу теоремы 6.1 ([10], с.355) имеем, что $S = \mathrm{End}_R(P)$ – полусовершенное кольцо. Пусть $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \ldots \subseteq P_k \subseteq \ldots$ – возрастающая цепочка прямых слагаемых модуля $P$. Обозначим через $f_i\colon P \to P_i$ проекции. Тогда $f_i = f_i^2$ $(i=1,2,\ldots)$ и имеем $\mathrm{Im}\, f_1 \subseteq \mathrm{Im}\, f_2 \ldots \subseteq \mathrm{Im}\, f_k \subseteq \ldots$ В силу леммы 2.1 ([11], с.77) имеем, что $f_1 S \subseteq f_2 S \subseteq \ldots \subseteq f_k S \subseteq \ldots$, поскольку $S$ – полусовершенное кольцо, то существует $n$ такой, что $f_n S = f_{n+1} S \ldots$ Отсюда $\mathrm{Im}\, f_{n+1} \subseteq \mathrm{Im}\, f_n$, т.е. $\mathrm{Im}\, f_n = \mathrm{Im}\, f_{n+1} = \ldots$ Итак, получили $P_n = P_{n+1} = \ldots$

(2) $\Longrightarrow$ (3). Пусть $A$ – подмодуль модуля $P$. Если $A \subseteq J(P)$, то утверждение очевидно. Пусть $A \not\subseteq J(P)$. Тогда из слаборегулярности модуля $P$ следует, что $A$ содержит ненулевое прямое слагаемое модуля $P$. В силу условия максимальности пусть $P_0$ – максимальное прямое слагаемое модуля $P$, содержащееся в $A$. Тогда $P = P_0 \oplus L$ и $A = P_0 \oplus (L \cap A)$. Докажем, что $(L \cap A) \subseteq J(P)$. Предположим, что $(L \cap A) \not\subseteq J(P)$, тогда $(L \cap A)$ содержит ненулевое прямое слагаемое модуля $P$. Итак, $B \subseteq (L \cap A) \subseteq L$, следовательно, $L = B \oplus B_0$, где $B_0$ – подмодуль в $P$. Тогда $P = P_0 \oplus B \oplus B_0$ и $P_0 \oplus B \subseteq A$. Пришли к противоречию с максимальностью модуля $P_0$. Отсюда следует, что $(L \cap A) \subseteq J(P)$, т.е. $A = P_0 + D$ и $D = (L \cap A) \subseteq J(P)$.

(3) $\Longrightarrow$ (4). Очевидно.

(4) $\Longrightarrow$ (1). Имеем, что $P/J(P)$ полупрост и $J(P)$ косущественен в $P$, поскольку $P$ конечно порожден. Докажем, что всякое прямое слагаемое модуля $P/J(P)$ является образом некоторого прямого слагаемого модуля $P$ при гомоморфизме $P \to P/J(P)$. Пусть $\alpha\colon P \to P/J(P)$ – ес-

тественный эпиморфизм. Поскольку $\overline{P} = P/J(P)$ полупрост, то $\overline{P} = \sum_{i=1}^{n} \oplus \overline{P}_i$, где $\overline{P}_i$ – простые $R$-модули. С другой стороны, гомоморфизм $\alpha$ является проективной оболочкой модуля $\overline{P}$. Обозначим через $\alpha_i$: $P_i \to P_i/J(P)$ естественные эпиморфизмы, поскольку $\overline{P}_i$ – простой $R$-модуль, то $\overline{P}_i = P_i + J(P)$ и $P_i$ подмодуль в $P$, который не разложим, и $P_i \not\subseteq J(P)$. Тогда в силу слаборегулярности модуля $P$ следует, что $P_i$ является прямым слагаемым модуля $P$, т.е. $P_i$ проективен, $i=1,2,\ldots,n$, кроме того, $\ker \alpha_i = P_i \cap J(P) = J(P_i)$. Тогда согласно теореме 11.2.2 ([4], с.273) всякое разложение модуля $P/J(P)$ можно поднять относительно $\alpha$. Отсюда и в силу теоремы 11.3.1 ([4], с.274) модуль $P$ является полусовершенным.

Выражаю благодарность своему руководителю доценту И.И.Сахаеву за помощь в работе над статьей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Nicholson W.K. *I-rings* // Trans. Amer. Math. Soc. - 1975. - V.207. - P.361-373.

2. Хакми Х. *О некоторых свойствах I-подобных колец.* - 1991. - 28 с. - Деп. в ВИНИТИ 9.10.91, № 2920-B91.

3. Хакми Х. *I-подобные модули* // Изв. вузов. Математика. - 1993. - №9. - С.65-70.

4. Каш Ф. *Модули и кольца.* - М.: Мир, 1981. - 368 с.

5. Fisher J.W. *Nil subrings of endomorphism rings of modules* // Proc. Amer. Math. Soc. - 1972. - V.34. - № 1. - P.75-78.

6. Туганбаев А.А. *Строение модулей, близких к проективным* // Матем. сб. - 1978. - Т.106. - № 4. - С.554-565.

7. Wu L.E.T., Jans J.P. *On quasi projectives* // Illinois J. Math. - 1967. - V.11. - № 3. - P.439-448.

8. Varadarajan K., Wani P.R. *Modules over endomorphism rings* II // Acta Math. hung. - 1989. - V.53. - № 3-4. - P.309-337.

9. Фейс К. *Алгебра: кольца, модули и категории.* Т.2. - М.: Мир, 1979. - 464 с.

10. Mares E. *Semi-Perfect modules* // Math. Z. - 1963. - Bd. 82. - S.347-360.

11. Azumaya G. *F-semi-perfect modules* // J. Algebra. - 1991. - V.136. - № 1. - P.73-85.

г. Казань

Поступила
18.10.1993