Ю. Э. Даник, Стабилизирующий регулятор для одной линейной дискретной системы с ограничениями на управление, *ИТиВС*, 2021, выпуск 4, 61–69

DOI: 10.14357/20718632210406

Стабилизирующий регулятор для одной линейной дискретной системы с ограничениями на управление*

Ю. Э. Даник

Федеральное государственное учреждение "Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук", г. Москва, Россия

Аннотация. В работе предложен подход к построению стабилизирующего регулятора в дискретной линейно-квадратичной стационарной задаче на полуоси с ограничениями на управление на основе принципа расширения. Установлена асимптотическая устойчивость положения равновесия соответствующей замкнутой системы с помощью теоремы Малкина—Массера—Четаева. Приводятся численные эксперименты, демонстрирующие полученные теоретические результаты.

Ключевые слова: линейно-квадратичная дискретная задача оптимального управления, ограничения на управление, принцип расширения, стабилизация.

DOI 10.14357/20718632210406

Введение

Несмотря на большое количество публикаций по линейно-квадратичным задачам оптимального управления, содержащим обзор теории и методов численного решения непрерывных и дискретных задач [1-4], в литературе поддерживается интерес к изучению этих задач с точки зрения апробации новых подходов и различных частных постановок.

Например, отметим здесь работы [5-6], в которых выводятся соотношения для оптимальных управлений для дискретных линейных задач управления с ограничениями.

В работе [5] рассмотрен специальный класс линейно-квадратичных дискретных терминальных задач оптимального управления на конечном интервале с квадратичным критерием и ограничениями на управление в виде замкнутых неравенств, где приводятся необходимые и достаточные условия оптимальности для линейной дискретной задачи оптимального управления, которые выводятся с помощью теории Дубовицкого – Милютина [7]. Решение получающихся здесь краевых задач сводится к последовательному решению конечного числа систем линейных алгебраических уравнений.

В работе [6] рассматривается задача оптимального управления для линейной дискретной системы на конечном интервале со свободным правым концом и ограничениями на управление и возмущениями в правой части. Предлагается подход к построению синтезирующего управления на основе принципа расширения Кротова В.Ф. [8-10], с помощью которого

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №21-11-00202

выводятся условия оптимальности. Принцип расширения состоит в замене исходной задачи оптимального управления с ограничениями другой задачей, где исключены те или иные связи, решение которой удовлетворяет ограничениям и совпадает с решением исходной задачи. Этот метод был предложен Кротовом В.Ф. и развит Гурманом В. И. в работах [11-12].

Интерес к линейно-квадратичным задачам в последние годы поддерживается также большим количеством работ, в которых схема Калмана-Летова применяется к нелинейным задачам оптимального управления, представленных в виде задач минимизации квадратичного критерия вдоль траекторий формально линейных непрерывных и дискретных систем, где все матрицы в системе и в критерии могут зависеть от координат вектора состояния, так называемый подход SDRE (State-Dependent Riccati equation). Этот подход к построению обратной связи в нелинейных системах приводит к решению соответствующих алгебраических, дифференциальных или разностных уравнений типа Риккати. С основами этого подхода можно познакомиться в [13-15]. Отметим здесь также работы [16-19]. В [16-17] представлены алгоритмы нелинейной коррекции линейного регулятора для квазилинейных непрерывных и дискретных систем путем подбора весовых матриц критерия и приближенного решения алгебраического уравнения Риккати. Подход SDRE успешно применяется для построения параметрического синтеза для разных классов нелинейных управляемых систем [18] на основе асимптотических приближений и аппроксимации Паде. Укажем также работу [19], где предлагается алгоритм построения оптимального регулятора для непрерывной задачи стабилизации на полуоси с ограничениями на управление на основе принципа расширения и подхода SDRE.

В настоящей работе с помощью принципа расширения строится синтез для дискретной линейно-квадратичной стационарной задачи оптимального управления на полуоси с ограничениями на управление и устанавливается асимптотическая устойчивость замкнутой системы с помощью дискретного аналога теоремы Малкина-Массера-Четаева [20]. Полученное синтезирующее управление состоит из двух частей: стандартного линейно-квадратичного регулятора, который строится на основе решения алгебраического уравнения Риккати, и поправки, зависящей от элементов ограничений.

1. Постановка задачи

Пусть задана следующая дискретная стационарная линейная система

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x^0,\ t \in \Omega = \{0,1,...,N,...\}, \tag{1}$$

$$u(t) \in U(t) = \{u(t) \mid \alpha(t) \le u(t) \le \beta(t),\ t \in \Omega\}, \tag{2}$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния, $u \in U(t) \subseteq R^r$ – вектор управления, $\alpha(t) < \beta(t)$. Требуется найти управление в виде обратной связи, удовлетворяющее ограничениям (2), при котором достигается минимум критерию качества

$$J(x,u) = \sum_{t=0}^{\infty}[\frac{1}{2}x^T(t)Qx(\mathrm{t}) + \frac{1}{2}u^T(t)Ru(t)] \to \min, \tag{3}$$

где матрицы $Q \in R^{n\times n}$, $R \in R^{r\times r}$, положительно полуопределенная $Q \ge 0$ и положительно определенная $R > 0$, соответственно.

2. Оптимальный регулятор

С помощью ввода множителей Лагранжа $\lambda_0(x,t), \lambda_1(x,t), \lambda_2(x,t)$ применим принцип расширения, избавляясь от ограничений, и перейдем к новому критерию качества

$$J(x,u)=\sum_{t=0}^{\infty}(\frac{1}{2}x^T(t)Qx(t)+\frac{1}{2}u^T(t)Ru(t)+\lambda_0{}^T(x,t)\times \\ \times[Ax(t)+Bu(t)-x(t+1)]+\lambda_1{}^T(x,t)[\alpha(t)-u(t)]+\lambda_2{}^T(x,t)[u(t)-\beta(t)])\to\min, \tag{4}$$

где первый множитель $\lambda_0(x,t)=\frac{1}{2}Px(t+1)$ отвечает уравнениям динамики системы (1), множитель $\lambda_1(x,t)\geq 0-$ нижнему ограничению на управление, множитель $\lambda_2(x,t)\geq 0-$ верхнему ограничению на управление и при этом $\lambda_1(x,t), \lambda_2(x,t)$ такие, что на оптимальном управлении $u^*(x,t)$ выполняются условия

$$\lambda_1{}^T(x,t)[\alpha(t)-u^*(x,t)]=0,\quad \lambda_2{}^T(x,t)[u^*(x,t)-\beta(t)]=0\,. \tag{5}$$

Для упрощения дальнейших выкладок введем функцию

$$M(x(t),u(t))=\frac{1}{2}x^TQx+\frac{1}{2}u^TRu+[\frac{1}{2}P(Ax(t)+Bu(t))]^T[Ax(t)+Bu(t)]+ \\ +\lambda_1{}^T(x,t)[\alpha(t)-u(t)]+\lambda_2{}^T(x,t)[u(t)-\beta(t)])-\frac{1}{2}\mathrm{x}(t)^TP\,\mathrm{x}(t),$$

которая получается из выражения в (4) прибавлением и вычитанием слагаемого $\frac{1}{2}\mathrm{x}(t)^TP\,\mathrm{x}(t)$ и выделением слагаемого $\frac{1}{2}x(t+1)^TPx(t+1)$. Далее, учитывая, что $\sum_{t=0}^{\infty}(\frac{1}{2}x(t)^TPx(t)-\frac{1}{2}x(t+1)^TPx(t+1))=\frac{1}{2}x(0)Px(0)$, критерий (4) принимает вид

$$J(x,u)=\sum_{t=0}^{\infty}M(x(t),u(t))+\frac{1}{2}x(0)Px(0)\,. \tag{6}$$

Таким образом, от задачи с ограничениями (1)-(3) переходим к задаче минимизации критерия качества (6) без ограничений. В силу гладкости, выпуклости и ограниченности $M(x,u)$ при всех допустимых (x,u) снизу, необходимые условия минимума (6) принимают вид

$$\frac{\partial M(x,u)}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial M(x,u)}{\partial x}=0. \tag{7}$$

Сначала из первых уравнений в (7) имеем

$$\frac{\partial M(x,u)}{\partial u}=Ru+B^TPBu(t)+B^TPAx(t)-\lambda_1(x,t)+\lambda_2(x,t)=0\,,$$

отсюда оптимальное управление для расширенного функционала (4) имеет вид

$$u^*(x,t) = -(R + B^T PB)^{-1}\{B^T PAx(t) - \lambda_1(x,t) + \lambda_2(x,t)\} = \omega(x,t) + \varphi(x,t)\,, \qquad (8)$$

где $\omega(x,t) = -(R + B^T PB)^{-1} B^T PAx(t) -$ линейный регулятор при отсутствии ограничений, а поправка $\varphi(x,t) = -(R + B^T PB)^{-1}\{-\lambda_1(x,t) + \lambda_2(x,t)\}$ связана с выполнением введенных ограничений на управление.

Учитывая (5), неотрицательность $\lambda_1(x,t), \lambda_2(x,t)$ и тот факт, что значение управления в любой момент времени принимает значение либо внутри допустимого множества, либо на его границе, множители Лагранжа можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\lambda_1(x,t) = -(R + B^T PB)\inf(0, \omega(x,t) - \alpha(t)),\\ &\lambda_2(x,t) = -(R + B^T PB)\inf(0, \beta(t) - \omega(x,t)). \end{aligned} \qquad (9)$$

Имеет место

Лемма 1. *Вдоль оптимального управления (8) множители Лагранжа* $\lambda_1(x,t), \lambda_2(x,t)$*, приведенные в (9), удовлетворяют (5) при всех* $t \in \Omega$.

Доказательство. С учетом (8) и (9) получаем, что $\varphi(x,t) = -(R + B^T PB)^{-1}\{-\lambda_1(x,t) + \lambda_2(x,t)\} = -\inf(0, \omega(x,t) - \alpha(t)) + \inf(0, \beta(t) - \omega(x,t)),$ т.е., если $\omega(x,t) \ge \alpha(t)$ и $\beta(t) \ge \omega(x,t)$, то $\varphi(x,t) = 0$, а $u^*(x(t)) = \omega(x,t)$ и удовлетворяет ограничениям $\alpha(t) \le u^*(x(t)) \le \beta(t)$. Далее, если $\omega(x,t) < \alpha(t)$, то $\varphi(x,t) = -(\omega(x,t) - \alpha(t)) = \alpha(t) - \omega(x,t) > 0$, а управление $u^*(x(t)) = \omega(x,t) - \omega(x,t) + \alpha(t) = \alpha(t)$. Аналогично, если $\beta(t) < \omega(x,t)$, то $\varphi(x,t) = \beta(t) - \omega(x,t) < 0$ и управление $u^*(x(t)) = \omega(x,t) + \beta(t) - \omega(x,t) = \beta(t)$ лежит на верхней границе допустимой области. Итак, управление $u^*(x(t))$ всегда находится или на границе или внутри области. Выполняются следующие неравенства $\alpha(t) \le \omega(x,t) + \varphi(x,t) \le \beta(t),\ \omega(x,t) - \alpha(t) \ge -\varphi(x,t), \beta(t) - \omega(x,t) \ge \varphi(x,t)$, и таким образом можно записать, что $\lambda_1(x,t) = -(R + B^T PB)\inf(0, -\varphi),\ \ \lambda_2(x,t) = -(R + B^T PB)\inf(0, \varphi)$. А далее подставляя в (5) выражение для управления (8) и выражения для $\lambda_1(x,t), \lambda_2(x,t)$, получаем

$$\begin{aligned} &-\inf(0, -\varphi^T)(R + B^T PB)^T[\alpha(t) - \omega(x,t) - \varphi(x,t)] = 0,\\ &-\inf(0, \varphi^T)(R + B^T PB)^T[\omega(x,t) + \varphi(x,t) - \beta(t)] = 0. \end{aligned} \qquad (10)$$

Если $\varphi = 0$, то тождество (10) выполняется, если $\varphi > 0$, то получаем $\varphi^T(R + B^T PB)^T[\alpha(t) - \omega(x,t) - \varphi(x,t)] = 0$ и так как в последнем случае $\omega(x,t) < \alpha(t)$ и $\varphi(x,t) = \alpha(t) - \omega(x,t)$, как было показано выше, и имеем $\alpha(t) - \omega(x,t) - \varphi(x,t) = 0$. Если же $\varphi < 0$, то (5) преобразуется к виду $-\varphi^T(R + B^T PB)^T[\omega(x,t) + \varphi(x,t) - \beta(t)] = 0$, где $\beta(t) < \omega(x,t)$, $\varphi(x,t) = \beta(t) - \omega(x,t) < 0$ и поэтому $\omega(x,t) + \varphi(x,t) - \beta(t) = 0$, что и требовалось показать.

Далее преобразуем $M(x,u)$, подставляя в него найденное управления $u^*(x(t))$, доставляющее экстремум критерию (6), и получаем

$$M(x,u)=\frac{1}{2}x^TQx+\frac{1}{2}x^T(t)A^TPAx(t)-\frac{1}{2}\mathrm{x(t)}^TP\,\mathrm{x(t)}-\frac{1}{2}x^T(t)A^T(t)PB(t)(R(t)+B^T(t)PB(t))^{-1}B^TPAx(t)+$$
$$+\frac{1}{2}\varphi^T(R+B^TPB(t))\varphi-\frac{1}{2}\varphi^TB^TPAx(t)-\frac{1}{2}x^T(t)A^TPB\varphi+\frac{1}{2}\varphi^T(t)B^TPAx(t)+\frac{1}{2}x^T(t)A^TPB\varphi(t)$$

или после приведения подобных членов имеем

$$M(x,u)=\frac{1}{2}x^TQx+\frac{1}{2}x^T(t)A^TPAx(t)-\frac{1}{2}\mathrm{x(t)}^TP\,\mathrm{x(t)}-\frac{1}{2}x^T(t)A^TPB(R+B^TPB)^{-1}B^TPAx(t)+$$
$$+\frac{1}{2}\varphi^T(R+B^TPB)\varphi.$$

Далее, используя вторую группу уравнений в (7) имеем

$$\frac{\partial M(x,u)}{\partial x}=Qx-Px+A^TPAx-A^TPB(R+B^TPB)^{-1}B^TPAx=0.$$

То есть, очевидно, что матрицу P коэффициентов усиления регулятора (8) нужно искать как положительно определенное решение алгебраического уравнения Риккати

$$A^TPA-P-A^TPB(R+B^TPB)^{-1}B^TPA+Q=0\,. \tag{11}$$

3. Асимптотическая устойчивость замкнутой системы

Рассмотрим систему (1) при $u(t)=u^*(x(t))$

$$x(t+1)=\{A-B(R+B^TPB)^{-1}B^TPA\}x(t)-B(R+B^TPB)^{-1}\{\lambda_1(x,t)-\lambda_2(x,t)\}=$$
$$=\{A-B(R+B^TPB)^{-1}B^TPA\}\,\mathrm{x}(t)+B\varphi(x,t),\ x(0)=x^0$$

или

$$x(t+1)=A_{cl}x(t)-B(R+B^TPB)^{-1}\{\lambda_1(x,t)-\lambda_2(x,t)\}=A_{cl}x(t)+B\varphi(x,t)\,, \tag{12}$$

где $A_{cl}=\{A-B(R+B^TPB)^{-1}B^TPA\}-$ матрица замкнутой системы.

Имеет место

Лемма 2.

В системе (1) при $u=u^*$ состояние $x\equiv 0$ является положением равновесия, если $a\le 0,\ b\ge 0$ и замкнутая система принимает вид (12).

Доказательство. При $x\equiv 0$, $\omega(x,t)\equiv 0$ и тогда $\varphi(x,t)=-\inf\left(0,-\alpha(t)\right)+\inf\left(0,\beta(t)\right)$. С учетом того, что $\alpha(t)<\beta(t)$, функция $\varphi(x,t)\equiv 0$ равна нулю только при условии $\alpha(t)\le 0,\ \beta(t)\ge 0$. Тогда $x(\mathrm{t}{+}1)\equiv 0,\ t\in\Omega$ и нулевое положение является точкой покоя замкнутой системы (12).

Теперь покажем, что $u^*(x,t)$ обеспечивает асимптотическую устойчивость точки покоя $x(t)\equiv 0$ замкнутой системы (12). Для доказательства асимптотической устойчивости замкнутой системы (12) перепишем ее в виде

$$\begin{aligned}&x(t+1)=A_{cl}x(t)+g(x,t),\\&g(x,t)=B\varphi(x,t),\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $\varphi(x,t)=\begin{cases} 0, \ \alpha(t)\le\omega(x,t)\le\beta(t), u=\omega(x,t) \\ \alpha(t)-\omega(x,t)>0, \ \omega(x,t)<\alpha(t), u=\alpha(t) \\ \beta(t)-\omega(x,t)<0, \ \omega(x,t)>\beta(t), u=\beta(t) \end{cases}$ или

$$\varphi(x,t)=-(R+B^TPB)^{-1}\{-\lambda_1(x,t)+\lambda_2(x,t)\}=-\inf(0,\omega(x,t)-\alpha(t))+\inf(0,\beta(t)-\omega(x,t)).$$

Обозначим через $X(t)$ фундаментальную матрицу линейной системы $x(t+1)=A_{cl}x(t)$. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть выполняются условия*

I. $\det A_{cl}\ne 0$*;*

II. Существуют положительные числа C *и* κ*, окрестность нуля* $\Phi(0)$ *и ограниченная последовательность* $p(s)$ *такие, что имеют место следующие оценки*

$$\|g(x,t)\|\le\kappa\|x\|, \forall t\ge 0, \ x\in\Phi(0),$$

$$\left\|X(t)X(\tau)^{-1}\right\|\le C\prod_{\tau}^{t-1}p(s), \ \forall t>\tau>0,$$

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\prod_{0}^{t-1}(p(s)+C\kappa)<0;$$

III. Пары матриц $(A,B),(A,Q^{\frac{1}{2}})$ *управляемы и наблюдаемы;*

тогда оптимальная обратная связь $u^*(x,t), \ t\in\Omega, x\in\Phi(0)$ *из (8) обеспечивает асимптотическую устойчивость по Ляпунову нулевого положения равновесия* $x(t)\equiv 0$ *замкнутой системы (13).*

Доказательство. Из условия *III* следует разрешимость уравнения Риккати (11), а условия *I, II* обеспечивают асимптотическую устойчивость положения равновесия системы *(13)* согласно дискретному аналогу теоремы Малкина-Массера-Четаева [20].

4. Численный эксперимент

Рассмотрим следующий пример задачи (1)–(3) на линеаризованной модели маятника со следующими данными

$$A=\begin{pmatrix} 1 & T \\ \dfrac{Tg}{L} & 1-\dfrac{T\gamma}{ML} \end{pmatrix}, \ B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R=1, M=0.1, \ T=0.05, \ L=0.1, \gamma=0.05, \ g=9.8,$$

$x^0=\left[0.8;1\right]$ и ограничениями на управление $-4.8\le u(t)\le 5.6$.

Траектории замкнутой системы вдоль регулятора (13) стремятся к нулю, как представлено на Рис. 1 (верхние кривые - $x_1(t)$; $x_2(t)$), а управление (нижняя кривая - $u(t)$) в начале интервала регулирования принадлежит границе допустимой области, а потом стремится к нулю при возрастании времени t.

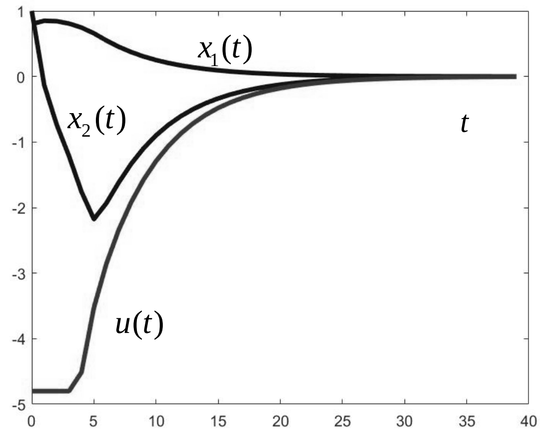

Рис. 1. Траектории замкнутой системы и оптимальное управление

Также проведен эксперимент, показывающий, что с возрастанием нормы начальных условий, т.е. с возрастанием окрестности $\Phi(0)$, система (13) становится неустойчивой. Например, для $x^0 = [1;3]$ имеем расходящиеся траектории, представленные на Рис. 2.

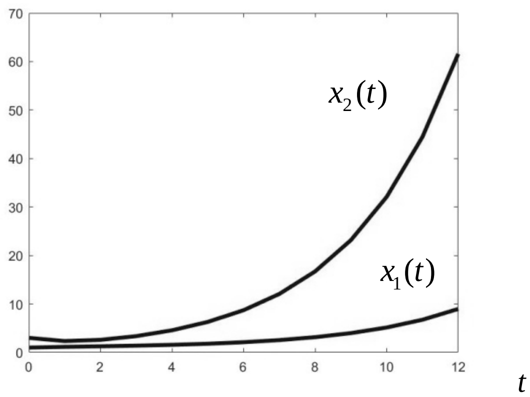

Рис. 2. Траектории замкнутой системы для неустойчивой системы с $x^0 = [1;3]$.

Заключение

В работе предложен метод построения оптимального управления в виде обратной связи для дискретной стационарной линейно-квадратичной задачи на полуоси с ограничениями на управление, которое является стабилизирующим управлением на бесконечном интервале времени. Метод основан на использовании принципа расширения Кротова В.Ф., с помощью которого исходная задача с ограничениями на управление сводится к задаче оптимизации без ограничений. Асимптотическая устойчивость замкнутой системы с учетом ограничений на управление доказывается с помощью дискретного аналога теоремы Малкина-Массера-Четаева.

Литература

1. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
2. Афанасьев В. Н. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1989.
3. Mehrmann V. L. The autonomous linear quadratic control problem: theory and numerical solution. Heidelberg : Springer, 1991.

4. Naidu D. S. Optimal control systems. CRC Press, 2002, 464 p.
5. Трошина Н. Ю. О решении дискретной линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2009. №. 4. С. 52-60.
6. Milosz M. et al. Optimisation of Discrete Processes with Bounded Control. // Information Technology and Control. 2018. №. 4. С. 684-690.
7. Дубовицкий А. Я., Милютина А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. № 3. С. 395–453.
8. Кротов В. Ф. Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума, 1 // Автоматика и телемеханика. 1962. № 12. С. 1571-1583.
9. Кротов В. Ф. Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума, 2 // Автоматика и телемеханика. 1963. № 5. С. 581-598.
10. Кротов В. Ф. Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума, 3 // Автоматика и телемеханика, 1963. № 7. С. 1037–1046.
11. Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. 448 с.
12. Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления. 2-е изд. М.: Наука. Физматлит, 1997. 288 с.
13. Cimen T. State-dependent Riccati Equation (SDRE) control: A Survey // IFAC Proceedings Volumes. 2008. №. 2, pp. 3761–3775.
14. Mracek C., Cloutier J. Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent Riccati equation method // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 1998. № 4–5, pp. 401–433.
15. Афанасьев В. Н. Управление нелинейными объектами с параметрами, зависящими от состояния // Автоматика и телемеханика. 2011. №. 4. С. 43–56.
16. Дмитриев М. Г., Макаров Д. А. Гладкий нелинейный регулятор в слабо нелинейной системе управления с коэффициентами, зависящими от состояния // Труды Института системного анализа Российской академии наук. 2014. Т. 64. №. 4. С. 53-58.
17. Емельянов С. В., Даник Ю. Э., Дмитриев М. Г., Макаров Д. А. Стабилизация нелинейных дискретных динамических систем с параметром и с коэффициентами, зависящими от состояния // Доклады академии наук. 2016. №3. С. 282-284.
18. Danik Yu., Dmitriev M. The construction of stabilizing regulators sets for nonlinear control systems with the help of Padé approximations // Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems. Springer International. 2021. pp. 45-62.
19. Дмитриев М. Г., Мурзабеков З. Н., Мирзахмедова Г. А. Алгоритм нахождения обратной связи в задаче с ограничениями для одного класса нелинейных управляемых систем // Моделирование и анализ информационных систем. 2021. №. 3. С. 220-233.
20. Кузнецов Н. В., Леонов Г. А. Критерии устойчивости по первому приближению нелинейных дискретных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2005. №. 2. С. 55-63.

Даник Юлия Эдуардовна. Федеральное государственное учреждение "Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук" г. Москва, Россия. Научный сотрудник, кандидат физико-математических наук. Количество печатных работ: 40. Область научных интересов: нелинейные стабилизирующие регуляторы для непрерывных и дискретных нелинейных систем управления, оптимальное управление, системный анализ, SDRE, матричные аппроксимации Паде, интеллектуальное управление. E-mail: yuliadanik@gmail.com

Stabilizing Controller for one Linear Discrete System with Control Constraints

Yu. E. Danik

Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. This paper is devoted to the construction of a stabilizing controller in a discrete linear-quadratic stationary problem on a semiaxis with control constraints based on the extension principle. The asymptotic stability of the equilibrium point of the corresponding closed-loop system is established with the help of Malkin-Masser-Chetaev theorem. The results of numerical experiments demonstrating the obtained theoretical results are presented.

Keywords: linear-quadratic discrete optimal control problem, control constraints, extension principle, stabilization.

DOI 10.14357/20718632210406

References

1. Kwakernaak, H., and R. Sivan. 1972. Linear optimal control systems. New York: Wiley-interscience. 608 p.
2. Afanasyev, V. N., V.B. Kolmanovsky and V.R. Nosov. 1989. Matematicheskaja teorija konstruirovanija sistem upravlenija [Mathematical theory of control system design]. Moscow: Higher School.
3. Mehrmann, V. L. 1991. The autonomous linear quadratic control problem: theory and numerical solution. Heidelberg: Springer.
4. Naidu, D. S. 2002. Optimal control systems. CRC press.
5. Troshina, N. Ju. 2009. O reshenii diskretnoj linejno-kvadratichnoj zadachi optimal'nogo upravlenija [About solving a discrete linear-quadratic optimal control problem]. Izvestija Saratovskogo universiteta. Novaja serija. Serija Matematika. Mehanika. Informatika [News of Saratov University. A new series. Mathematics series. Mechanics. Computer science] 1: 52–60.
6. Milosz, M. et al. 2018. Optimisation of Discrete Processes with Bounded Control. Information Technology and Control. 4:684-690.
7. Dubovickij, A. Ja., and A. A. Miljutina. 1965. Zadachi na jekstremum pri nalichii ogranichenij [Extremum problems in the presence of constraints]. Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics] 3:395–453.
8. Krotov, V. F. 1962. Metody reshenija variacionnyh zadach na osnove dostatochnyh uslovij absoljutnogo minimum, I [Methods of solution of variational problems on the basis of sufficient conditions for absolute minimum, I]. Avtomatika i telemehanika [Automation and Remote Control] 12: 1571-1583.
9. Krotov, V. F. 1963. Metody reshenija variacionnyh zadach. II. Skol'zjashhie rezhimy, 2 [Methods for solving variational problems. II. Sliding modes]. Avtomatika i telemehanika [Automation and Remote Control] 5: 581–598.
10. Krotov, V. F. 1963. Metody reshenija variacionnyh zadach na osnove dostatochnyh uslovij absoljutnogo minimum, III [Methods of solution of variational problems on the basis of sufficient conditions for absolute minimum, III]. Avtomatika i telemehanika [Automation and Remote Control] 7: 1037–1046.
11. Krotov, V. F., and V. I. Gurman. 1973. Metody i zadachi optimal'nogo upravlenija [Methods and problems of optimal control.]. M.: Nauka. 448 p.
12. Gurman, V. I. 1997. Princip rasshirenija v zadachah upravlenija [The principle of expansion in management problems]. M.: Nauka. Fizmatlit. 288 p.
13. Cimen, T. 2008. State-dependent Riccati Equation (SDRE) control: A Survey. IFAC Proceedings Volumes. 2: 3761–3775.
14. Mracek, C., and J. Cloutier. 1998. Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent Riccati equation method. International Journal of Robust and Nonlinear Control. 4–5:401–433.
15. Afanas'ev, V. N. 2011. Upravlenie nelinejnymi ob'ektami s parametrami, zavisjashhimi ot sostojanija [Control of nonlinear objects with state-dependent parameters]. Avtomatika i telemehanika [Automation and Remote Control] 4:43–56.
16. Dmitriev, M., and D. A. Makarov. 2014. [A weak nonlinear regulator in a weakly nonlinear control system with efficiency]. [Proceedings of the ISA RAS] 64: 53–58.
17. Emel'yanov, S.V., Yu.E. Danik, M.G. Dmitriev, and D.A. Makarov. 2016. Stabilization of nonlinear discrete-time dynamic control systems with a parameter and state-dependent coefficients. Doklady Mathematics. 1:121–123.
18. Danik, Yu., and M. Dmitriev. 2021. The construction of stabilizing regulators sets for nonlinear control systems with the help of Padé approximations. Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems. Springer International. 45–62.
19. Dmitriev, M. G., Z. N. Murzabekov, and G. A. Mirzakhmedova. 2021. Algoritm nahozhdenija obratnoj svjazi v zadache s ogranichenijami dlja odnogo klassa nelinejnyh upravljaemyh sistem [Algorithm for Finding Feedback in a Problem with Constraints for One Class of Nonlinear Control Systems]. Modelirovanie i analiz informacionnyh sistem [Modeling and analysis of information systems] 3:3220–233.
20. Kuznecov, N. V., and G.A. Leonov. 2005. Kriterii ustojchivosti po pervomu priblizheniju nelinejnyh diskretnyh system [Stability criteria for the first approximation of nonlinear discrete systems]. Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mehanika. Astronomija [Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy] 2:1–9.

Danik Yu. E PhD, Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, 44/2 Vavilova str., Moscow, 119333, Russia, e-mail: yuliadanik@gmail.com