Ю. Э. Даник, Стабилизирующий регулятор для нелинейных систем на основе нечеткой матричной Паде аппроксимации, *ИТиВС*, 2021, выпуск 1, 42–49

DOI: 10.14357/20718632210105

Стабилизирующий регулятор для нелинейных систем на основе нечеткой матричной Паде аппроксимации

Ю. Э. Даник

Федеральное государственное учреждение "Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук", г. Москва, Россия
Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Россия

Аннотация. В работе предложен подход к построению стабилизирующего регулятора для нелинейной системы управления на основе приближенного решения уравнения Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния (SDRE) и использовании нечеткой (fuzzy) матричной Паде аппроксимации. Нечеткая матричная Паде аппроксимация порядка [3/3] строится на основе нечетких одноэлементных функций принадлежности. Приводятся численные эксперименты, где проводится сравнение построенного регулятора с регулятором на основе решения SDRE.

Ключевые слова: нечеткая матричная Паде аппроксимация, уравнение Риккати, параметр, нелинейная система управления, нечеткая одноэлементная функция принадлежности.

DOI 10.14357/20718632210105

Введение

Большое внимание в литературе уделяется задаче стабилизации нелинейных управляемых систем и использованию интеллектуальных технологий в управлении. При этом рассматриваются специфические подходы и методы к конструированию нелинейных регуляторов для систем, отличающихся структурой и характером нелинейности. Кроме того, во многих задачах управления присутствуют параметры, меняющиеся на некоторых интервалах и определяющие допустимые движения объекта. Отсюда возникают задачи рационального выбора параметров, использования возможных символьных аналитических описаний семейств допустимых решений (управлений и траекторий) и применения интерполяционных и экстраполяционных процедур, для которых могут быть использованы идеи и методы теории приближений [1-2].

В настоящее время перспективным подходом к получению параметрических семейств регуляторов является использование Паде аппроксимаций (ПА), которые представляют собой рациональные функции одной или нескольких переменных в виде отношения двух полиномов, степени m в числителе и степени n в знаменателе. Это простой подход к приближению функций, который зачастую обеспечивает большую область сходимости и лучшее качество аппроксимации, чем степенные раз-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № №20-57-00011-Бел_а.

ложения в ряд. Использованию ПА в теории управления посвящены такие работы как [3-4, 5-9], где в последних строятся регуляторы на основе нечеткой логики. В частности, в работе [5] приводится алгоритм построения Паде регулятора на основе использования нечетких одноэлементных функций принадлежности. В этом случае база правил содержит классические четкие правила «если…то», т.е. пару данных вход-выход, не требующие операций фаззификации и дефаззификации. Это позволяет снизить вычислительную сложность по сравнению с нечеткими правилами, используя при этом метод наименьших квадратов с учетом различных ограничений на переменные, в частности, на отсутствие нулей в знаменателях Паде аппроксимаций.

Использование одноэлементных функций принадлежности для управления перевернутым маятником представлено в работе [6], а также в [7], где для построения нечеткого регулятора предлагается процедура сокращения числа параметров, т.е. числа входных элементов для нечетких правил, для уменьшения вычислительной сложности и использования регулятора в реальном времени. При этом результаты моделирования показывают, что предлагаемый упрощенный нечеткий регулятор может полностью стабилизировать систему для различных начальных условий и обладает свойством робастности.

В [8] используются наборы правил с одним входом (SIRMs, single input rule modules) и динамически связанные нечеткие модели логического вывода (dynamically connected fuzzy inference model) для стабилизации двойного перевернутого маятника параллельного типа. Использование SIRMs и динамических степеней важности позволяет автоматически пересматривать приоритеты управлений в зависимости от конкретной ситуации управления.

Также отметим работу [9], где предлагается упрощенный нечеткий контроллер Паде на основе одноэлементных функций принадлежности для управления ориентацией квадрокоптера. Так как зачастую число полученных одноэлементных правил может быть меньше, чем количество коэффициентов Паде аппроксимации (система недоопределенная), и не все коэффициенты могут быть определены с их помощью, оставшиеся неизвестные коэффициенты для простоты могут быть заданы или найдены с помощью оптимизации по таким показателям как время установления, интегральная абсолютная ошибка, скорость сходимости и т.д. Результаты моделирования в [9] показали, что в каждом рассмотренном случае предлагаемый нечеткий стабилизирующий Паде регулятор демонстрирует улучшенные характеристики по сравнению со стандартным нечетким регулятором и при этом доказывается теорема об асимптотической устойчивости замкнутой системы вдоль этого регулятора с помощью некоторой функции Ляпунова.

В данной работе для задачи стабилизации нелинейной управляемой SDC системы с параметром при управлении [4], который может принимать как большие, так и малые значения, т.е. система может быть как слабоуправляемой, так и системой управления с большим коэффициентом усиления, строится стабилизирующий регулятор на основе нечеткой логики, используя подход SDRE, основанный на решении уравнения Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния. Здесь строится нелинейный регулятор на основе матричной ПА и нечеткой логики с использованием одноэлементных функций принадлежности. Приводятся вычислительные эксперименты, иллюстрирующие асимптотическую устойчивость положения равновесия в соответствующей замкнутой системе.

1. Нечеткие одноэлементные функции принадлежности

Одним из основополагающих понятий в нечеткой логике является понятие нечеткого множества и нечеткой функции принадлежности. Функция принадлежности нечеткому множеству *A*, $\mu_A(x)$, имеет область определения $x \in E$, область значений – отрезок [0,1]. Каждому элементу универса *E* сопоставлена степень принадлежности этого элемента множеству *A*. Нечеткое множество полностью определяется заданием функции принадлежности. Чем выше значение $\mu_A(x)$, тем выше оценивается степень принадлежности элемента

$x \in E$ нечеткому множеству *A*. Частным случаем нечетной функции принадлежности является нечеткая одноэлементная функция принадлежности (fuzzy singleton membership function), которая имеет только один член со степенью членство равной 1 (максимальная степень принадлежности множеству), в то время как нечеткие функции принадлежности принимают значения в диапазоне [0,1]. Нечеткие одноэлементные правила, которые основаны на нечетких одноэлементных функциях принадлежности, являются четкими правилами, образующими пары данных. Здесь эти пары данных используются для определения неизвестных параметров нечеткого Паде регулятора. Поскольку правила в нечетком Паде регуляторе в этом случае четкие, несмотря на нечеткую структуру регулятора, операции фаззификации и дефаззификации не требуются. При этом структура регулятора рассчитывается на некоторой крупной сетке, где узлами выступают элементы соответствующих одноэлементных нечетких множеств.

Здесь предлагается перенести нечеткий Паде алгоритм, представленный в [5] на векторный случай и использовать нечеткие одноэлементные множества для задачи построения решения уравнения Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния.

В скалярном случае Паде аппроксимация представляет собой функцию в виде отношения двух полиномов степени *m* в числителе и степени *n* в знаменателе

$$Pade[m,n] = \frac{a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n}.$$

Неизвестные коэффициенты Паде аппроксимации находятся из приравнивания данного представления к разложению Тейлора, а именно:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n} + O(x^{m+n+1}),\ b_0 = 1.$$

В отличие от предыдущих работ в настоящей статье строится не скалярная Паде аппроксимация для нечеткой функции управления, а матричная Паде аппроксимация для матрицы коэффициентов усиления нечеткого регулятора, где неизвестные коэффициенты Паде аппроксимации являются матрицами. Для их нахождения представление Паде приравнивается к решению матричного уравнения Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния, при выбранных комбинациях параметров.

2. Построение нечеткого Паде регулятора на основе подхода SDRE

Рассмотрим следующую задачу управления для нелинейной регулярно возмущенной системы

$$\dot{x} = A(x)x + \varepsilon B(x)u,\ x(0) = x^0, \tag{1}$$

$x(t) \in X \subset R^n$, $u(t) \in R^r$, $t \in (0, \infty)$, $X \subset R^n$ – ограниченное множество пространства состояния, $A(x) \in R^{n \times n}$, $B(x) \in R^{n \times r}$, $\varepsilon \in (0, \infty)$ – параметр, принимающий как большие, так и малые значения.

Согласно подходу, основанному на решении уравнения Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния (SDRE), управление для (1) в виде обратной связи имеет форму регулятора Калмана

$$u = -\varepsilon R^{-1} B^T(x) P(x,\varepsilon) x, \tag{2}$$

где $P(x,\varepsilon)$ решение матричного алгебраического уравнения Риккати

$$\begin{aligned} &-A^T(x)P(x,\varepsilon) - P(x,\varepsilon)A(x) + \\ &+\varepsilon^2 P(x,\varepsilon)B(x)R_0^{-1}B^T(x)P(x,\varepsilon) - Q(x,\varepsilon) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

для некоторых $Q(x,\varepsilon) \in R^{n \times n}$, $Q(x,\varepsilon) > 0\ \forall x \in X, \varepsilon \in (0,\infty)$, $R_0 \in R^{r \times r}, R_0 > 0$.

Регулятор (2) используется структуру регулятора Калмана в линейно-квадратичной задаче оптимального управления, но он не является оптимальным для нелинейной системы (1) с критерием

$$\int_0^{\infty} \left(x^T Q(x,\varepsilon) x + u^T R_0 u \right) dt \to \inf_u. \tag{4}$$

Для приближенного решения уравнения (3) используется Паде аппроксимация. Обозначим $y = \begin{pmatrix} x \\ \varepsilon \end{pmatrix} \in Y \subset R^{n+1}$ и будем строить матричную Паде аппроксимацию порядка [3/3] для решения уравнения Риккати (3) в виде [5]:

$$PA_{fuzzy}^{[3/3]}(y)=\left(\mathrm{M}_0+\sum_{i=1}^{n+1}\mathrm{M}_i y_i+\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1(j\le i)}\mathrm{M}_{ij}y_i y_j+\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1(j\le i)}\sum_{k=1}^{n+1(k\le j)}\mathrm{M}_{ijk}y_i y_j y_k\right)\times$$
$$\times\left(E+\sum_{i=1}^{n+1}\mathrm{N}_i y_i+\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1(j\le i)}\mathrm{N}_{ij}y_i y_j+\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1(j\le i)}\sum_{k=1}^{n+1(k\le j)}\mathrm{N}_{ijk}y_i y_j y_k\right)^{-1}, \qquad (5)$$

где M,N – неизвестные матричные коэффициенты. Для выбранного порядка требуется найти 20 матричных коэффициентов числителя и 19 матричных коэффициентов знаменателя Паде аппроксимации. Здесь в отличие от [5] рассматривается задача с параметром и строится Паде аппроксимация для векторного, а не скалярного случая.

Сначала описываются одноэлементные функции принадлежности для каждого элемента вектора параметров y в (1) и сформируем набор нечетких одноэлементных правил вида

Правило 1: $(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\varepsilon^{(1)},P_{SDRE}(x^{(1)},\varepsilon^{(1)}))$.

При этом число правил должно быть больше числа неизвестных матричных коэффициентов Паде аппроксимации. Для определения неизвестных коэффициентов используется метод наименьших квадратов (МНК) с ограничениями на положительность коэффициентов неизвестных матриц. При этом знаменатель не должен иметь нулей при рассматриваемых значениях параметров.

Так как здесь при использовании нечеткой логики используются правила, представляющие собой пары «комбинация значений параметров – решение уравнения Риккати», предложенный метод аналогичен расчету на некоторой дискретной сетке. Полученные в узлах сетки значения используются для построения Паде аппроксимации с постоянными коэффициентами числителя и знаменателя, интерполирующие решение на другие значения входных параметров.

При этом нечеткая Паде аппроксимация (5) имеет постоянные матричные коэффициенты и представляет собой параметрический синтез. В отличие от SDRE метода она не требует расчета нелинейного уравнения Риккати для всех значений вектора состояния на разностной сетке при интегрировании замкнутой системы.

3. Численный эксперимент

Пример 1

Построение нечеткого Паде регулятора с коэффициентом усиления (5) демонстрируется на следующем модельном примере

$$A(x)=-\begin{pmatrix}2+x_1 & 0.5\\ 1 & 0.7+x_2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0.4\\ 0.5 & 1.4\end{pmatrix},$$

$$Q_0=\begin{pmatrix}5 & 0.5\\ 0.5 & 5\end{pmatrix},\ Q_1(x)=\begin{pmatrix}45+x_1^2 & 35+0.1x_1^2x_2^2\\ 35+0.1x_1^2x_2^2 & 47+x_2^2\end{pmatrix},$$

$$Q_2(x)=\begin{pmatrix}2+x_1^2 & 1+0.1x_1^2x_2^2\\ 1+0.1x_1^2x_2^2 & 2+x_2^2\end{pmatrix},$$

$$Q(x,\varepsilon)=Q_0+\varepsilon Q_1(x)+\varepsilon^2 Q_2(x),$$

$$R_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},x_0=\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}^T.$$

Опишем одноэлементные функции принадлежности для каждого элемента вектора параметров y в (1) и сформируем набор нечетких одноэлементных правил. Введем следующие множества для первой координаты вектора состояния, x_1

$$A_1=-0.5, A_2=-0.2, A_3=0, A_4=0.2, A_5=0.5.$$

Здесь функции принадлежности для множеств A_i имеют вид $\mu_{A_i}(x)=1$ (значение аргумента функции принадлежности единственно).

Пусть множества для второй координаты вектора состояния, x_2, имеют вид

$$B_1=-0.5, B_2=-0.2, B_3=0, B_4=0.2, B_5=0.5.$$

Множества для параметра ε

$$C_1=0.01, C_2=0.1, C_3=1, C_4=3, C_5=5, C_6=10.$$

Выбранной сетке значений параметров соответствует *150* решений матричного уравнения Риккати, $P_{SDRE}(x,\varepsilon)$, то есть *150* нечетких правил вида.

Правило 1:

$$(x_1^{(1)} = -0.5, x_2^{(1)} = -0.5, \varepsilon^{(1)} = 0.01, P_{SDRE}([x_1^{(1)}, x_2^{(1)}], \varepsilon^{(1)})), \ldots$$

В данном примере для нечеткой Паде аппроксимации (5) порядка [3/3] имеем 39 неизвестных. Дополнительно введем условие на то, что все коэффициенты матриц M, N были положительны. Для неизвестных матриц используются единичные начальные условия. Сравнение построенного нечеткого Паде регулятора с SDRE регулятором и регулятором, основанным на четкой двухточечной матричной Паде аппроксимации [4, 10] по значению критерия качества (4) приводится в Табл. 1. Предложенная в [4, 10] двухточечная матричная Паде аппроксимация порядка [2/2] строится на основе объединения двух локальных асимптотических разложений в окрестности малых и больших значений параметра, соответственно.

Пример 2

В этом примере рассматривается задача стабилизации перевернутого маятника. Матрицы системы имеют вид

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g\sin(x_1)}{Lx_1} & -\dfrac{\gamma}{ML} \end{bmatrix}, \ B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q_1(x) = \begin{bmatrix} 1+x_1^2 & 0 \\ 0 & 1+x_2^2 \end{bmatrix}, \quad Q_2(x) = \begin{bmatrix} 1+x_1^2 & 0 \\ 0 & 1+x_2^2 \end{bmatrix},$$

$R_0 = 1$, где первая координата x_1 отвечает углу отклонения маятника (*рад*), а вторая координата x_2 – угловой скорости (*рад / сек*); $u(t)$ – скалярное управление, сила, действующая на маятник ($N, кг \cdot м / сек^2$); другие параметры принимают значения $M = 0.1 кг$, $L = 0.1\ м$, $g = 9.8\ м / сек^2$, $\gamma = 0.05 кг \cdot м / сек$, $t \in [0, 6]$.

Введем следующие множества для координат вектора состояния x_1, x_2 и параметра ε

$A_1 = -1, A_2 = -0.5, A_3 = -0.3, A_4 = 0.01, A_5 = 0.3,$
$A_6 = 0.5, A_7 = 1,$
$B_1 = -0.5, B_2 = -0.1, B_3 = 0, B_4 = 0.1, B_5 = 0.5,$
$C_1 = 0.5, C_2 = 1, C_3 = 1.5.$

Число соответствующих нечетких одноэлементных правил равно 105. Построенная на основе базы правил Паде аппроксимация с постоянными коэффициентами может быть использована в реальном времени для разных начальных условий. При этом увеличение числа узлов сетки не связано с точностью нечеткой Паде аппроксимации, и их число может быть сокращено. Сравнение нечеткого Паде регулятора и SDRE регулятора по значению критерия при разных начальных условиях представлены в Табл. 2 и 3.

Из таблиц видно, что:

а) при возрастании начальных отклонений маятника от положения равновесия значения критерия качества, естественно, возрастают;

Табл. 1. Сравнение регуляторов по значению критерия

	SDRE	**Двухточечная Паде аппроксимация [2/2]**	**Fuzzy Паде [3/3]**
0.01	7.62637344331901	7.62635820914502	7.63125713351083
0.03	8.01381233072540	8.01298625959910	8.06011904408759
0.1	8.95387754693974	12.2630245419821	9.49961351324193
0.2	9.31698897330558	9.83608663059254	11.1715023525756
0.3	9.06031538777601	9.68727752404052	12.2213028546053
0.4	8.58540549172357	9.20311736743248	12.6579668001235
0.5	8.07862890672472	8.64257251686276	12.6240708412300
0.6	7.60713049382834	8.09589132087657	12.3040536218827
1	6.22172807425004	6.46731365540416	10.3885178292456
5	3.28443674192417	3.28880503763705	4.31325588695600
7	2.96926826730138	2.97067185908151	3.67100576175420
10	2.71282141628285	2.71317755115168	3.17442200153057

Табл. 2. Сравнение регуляторов по значению критерия

$x_0 = [0.6; 0]$	**SDRE**	**Fuzzy Паде [3/3]**
1	854.018418578736	871.341660361412
1.1	708.153320940486	736.324259536905
1.2	597.491261408466	660.292721860889
1.3	511.632934569495	611.815531151815

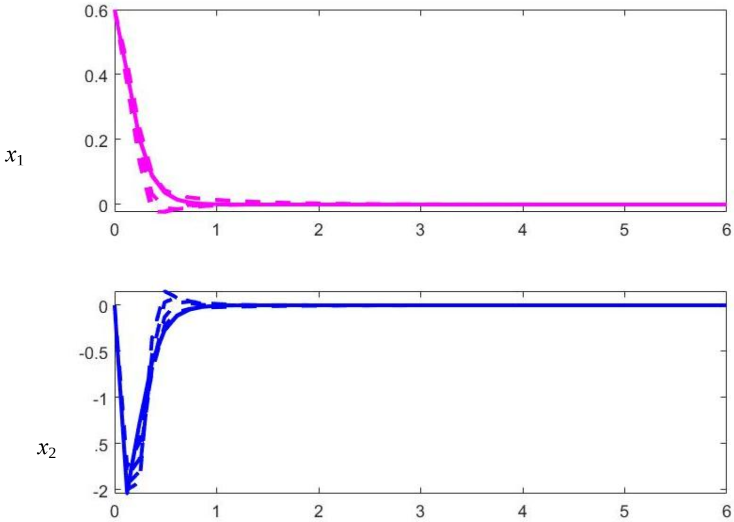

Рис. 1. Траектории замкнутой системы (SDRE – сплошная линия, нечеткий Паде регулятор – пунктирная линия)

Табл. 3. Сравнение регуляторов по значению критерия

$x_0 = [1; 0]$	**SDRE**	**Fuzzy Паде [3/3]**
1	2161.56552277850	2473.04223144190
1.10000000000000	1799.14217540336	2112.21937527830
1.20000000000000	1524.80078135271	1861.37955276882
1.30000000000000	1312.43830543587	1679.35539384146

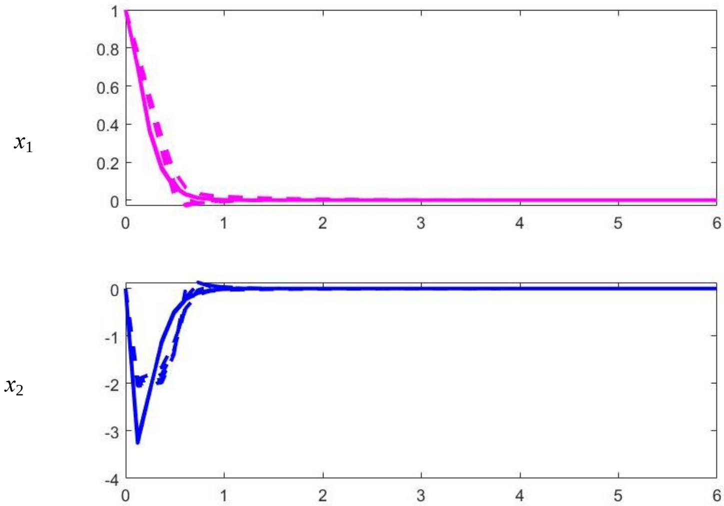

Рис. 2. Траектории замкнутой системы (SDRE – сплошная линия, нечеткий Паде регулятор – пунктирная линия)

б) при возрастании ε (коэффициент усиления обратной связи возрастает), функционал, естественно, убывает;

в) имеются различия по значению критерия между рассматриваемыми регуляторами, но при этом траектории качественно близкие.

Заключение

В работе построена нечеткая матричная Паде аппроксимация для решения матричного уравнения Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния, определяющего стабилизирующую обратную связь, а также соответствующий нечеткий Паде регулятор на основе использования нечетких одноэлементных функций принадлежности, обобщающая известные конструкции на случай векторного управления и наличия параметра при управлении. Численные эксперименты показали близость построенного регулятора к регулятору SDRE по значению квадратичного критерия качества. При этом, так как коэффициенты Паде аппроксимации постоянны и не требуют пересчета решения уравнения Риккати для разных значений параметра, достигается значительное снижение объема вычислений по сравнению с регулятором SDRE при достаточной близости траекторий замкнутых систем.

Литература

1. Бейкер Д., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде: Основы теории. Обобщения и приложения. Мир, 1986.
2. Бердышев В.И., Субботин Ю.Н. Численные методы приближения функций. Свердловск: Средне-Уральское книжное издательство, 1979. 119 с.
3. Belyaeva N.P., Dmitriev M.G., Komarova E.V. Pade-Approximation as a "Bridge" Between Two Parametric Boundary Asymptotics // IFAC Proceedings Volumes. 2001. № 6. С. 605-609.
4. Danik Yu., Dmitriev M. The construction of stabilizing regulators sets for nonlinear control systems with the help of Padé approximations // Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems. Springer International. 2021. P. 45-62. DOI: 10.1007/978-3-030-53006-8
5. Abedinnasab M.H., Yoon Y.J., Saeedi-Hosseiny M.S. High performance fuzzy-Padé controllers: introduction and comparison to fuzzy controllers // Nonlinear Dynamics. 2013. №. 1-2. P. 141-157.
6. Fujita K., Mizumoto M. Fuzzy controls of parallel inverted-pendulum under fuzzy singleton-type reasoning method using genetic algorithm // Proc. 11th Fuzzy System Symp. 1995. P. 267–292.
7. Zhang S.Y. et al. A new fuzzy controller for stabilization of double inverted pendulum system // 2010 International Conference on Computer and Communication Technologies in Agriculture Engineering. IEEE. 2010. P. 300-303.
8. Yi J., Yubazaki N., Hirota K. A new fuzzy controller for stabilization of parallel-type double inverted pendulum system // Fuzzy Sets and Systems. 2002. №. 1. P. 105-119.
9. Abdollahi T. et al. Simplified fuzzy-Padé controller for attitude control of quadrotor helicopters // IET Control Theory & Applications. 2017. №. 2. P. 310-317.
10. Danik Yu.E., Dmitriev M.G. Construction of Parametric Regulators for Nonlinear Control Systems Based on the Pade Approximations of the Matrix Riccati Equation Solution // IFAC-PapersOnLine. 2018. Issue 32. P. 815-820. DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.11.445.

Даник Юлия Эдуардовна. Федеральное государственное учреждение "Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук" г. Москва, Россия. Научный сотрудник, кандидат физико-математических наук. Количество печатных работ: 39. Область научных интересов: асимптотические методы, нелинейные системы управления, системный анализ. E-mail: yuliadanik@gmail.com

Stabilizing Regulator for Nonlinear Systems Based on Fuzzy Matrix Padé Approximation

Yu. E. Danik

Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

Abstract. In this paper an approach for the construction of a stabilizing regulator for a nonlinear control system based on an approximate solution of the state dependent Riccati equation (SDRE) and the use of a fuzzy matrix Padé approximation is proposed. A fuzzy matrix Padé approximation of order

[3/3] is constructed on the basis of fuzzy singleton membership functions. Numerical experiments where the constructed regulator is compared with the SDRE regulator are presented.
Keywords: fuzzy matrix Padé approximation, Riccati equation, parameter, nonlinear control systems, fuzzy singleton membership function.

DOI 10.14357/20718632210105

References

1. Baker, G.A., Graves-Morris, P. 1986. Approksimacii Pade: Osnovy teorii. Obobshhenija i prilozhenija [Pade approximation: Foundations of the theory. Generalizations and applications]. Moscow: Mir, 1986.
2. Berdyshev, V.I., Subbotin, Yu.N. 1979. Chislennye metody priblizhenija funkcij [Numerical methods for approximating functions]. Sverdlovsk: Middle Ural Book Publishing House, 1979. 119 p. (in Russian).
3. Belyaeva N.P., Dmitriev M.G., Komarova E.V. Pade-Approximation as a "Bridge" Between Two Parametric Boundary Asymptotics // IFAC Proceedings Volumes. 2001. № 6. C. 605-609.
4. Danik Yu., Dmitriev M. The construction of stabilizing regulators sets for nonlinear control systems with the help of Padé approximations // Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems. Springer International. 2021. P. 45-62. DOI: 10.1007/978-3-030-53006-8
5. Abedinnasab M.H., Yoon Y.J., Saeedi-Hosseiny M.S. High performance fuzzy-Padé controllers: introduction and comparison to fuzzy controllers // Nonlinear Dynamics. 2013. №. 1-2. P. 141-157.
6. Fujita K., Mizumoto M. Fuzzy controls of parallel inverted-pendulum under fuzzy singleton-type reasoning method using genetic algorithm // Proc. 11th Fuzzy System Symp. 1995. P. 267–292.
7. Zhang S.Y. et al. A new fuzzy controller for stabilization of double inverted pendulum system // 2010 International Conference on Computer and Communication Technologies in Agriculture Engineering. IEEE. 2010. P. 300-303.
8. Yi J., Yubazaki N., Hirota K. A new fuzzy controller for stabilization of parallel-type double inverted pendulum system // Fuzzy Sets and Systems. 2002. №. 1. P. 105-119.
9. Abdollahi T. et al. Simplified fuzzy-Padé controller for attitude control of quadrotor helicopters // IET Control Theory & Applications. 2017. №. 2. P. 310-317.
10. Danik Yu.E., Dmitriev M.G. Construction of Parametric Regulators for Nonlinear Control Systems Based on the Pade Approximations of the Matrix Riccati Equation Solution // IFAC-PapersOnLine. 2018. Issue 32. P. 815-820. DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.11.445.

Danik Yu. E. PhD, Institute for Systems Analysis Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, 44/2 Vavilova str., Moscow, 119333, Russia, e-mail: yuliadanik@gmail.com