М. Г. Дмитриев, Д. А. Макаров, Итерационный алгоритм синтеза управления в сингулярно возмущенной нелинейной задаче на основе SDRE техники, *ИТиВС*, 2020, выпуск 1, 76–84

DOI: 10.14357/20718632200108

Итерационный алгоритм синтеза управления в сингулярно возмущенной нелинейной задаче на основе SDRE техники*

М. Г. Дмитриев [I,II], Д. А. Макаров [I,II]

[I] Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия
[II] Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Россия

Аннотация. В работе приводится итерационный метод решения задачи стабилизации для одного класса нелинейных динамических систем с «быстрыми» и «медленными» движениями, где системы являются формально линейными, но их коэффициенты зависят от состояния. Стабилизирующий регулятор строится на основе принципа разделения движений и модификации подхода SDRE, которая состоит в использовании итерационного метода решения матричного уравнения Риккати для сингулярно возмущенной задачи оптимального управления.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, алгоритм стабилизации, нелинейные системы, разделение движений, итерационные методы, система, матричное уравнение Риккати.

DOI 10.14357/20718632200108

Введение

В приложениях часто встречаются задачи, где необходимо построить стабилизирующие регуляторы для динамических объектов, математические модели которых можно представить в виде сингулярно возмущенных управляемых систем [1-3]. Такое представление позволяет предлагать алгоритмы, преодолевающие вычислительные проблемы, связанные с большой размерностью моделей и их «жесткостью». Эти алгоритмы зачастую используют асимптотические представления решений или их структур, что значительно ускоряет нахождение приближенных оптимальных решений вблизи глобального оптимума (например, обзор [4]). Особенно это актуально для нелинейных объектов и управления ими в режиме реального времени.

В последнее время достаточно большую популярность получила SDRE техника построения нелинейного управления [5, 6], которая использует представление нелинейной системы в формально линейном виде, где матрицы являются функциями состояния. Это представление для многомерных систем неоднозначно [7]. При этом задается квадратичный критерий качества и применяется формализм Калмана, согласно которому управление использует матрицу коэффициентов усиления, построенную с помощью решения алгебраического матричного уравнения Риккати, но с коэффициентами, зависящими от состояния (State Dependent Riccati Equation - SDRE), что и

* Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума РАН (подпрограмма №2 программы «Фундаментальные проблемы решения сложных практических задач с помощью суперкомпьютеров»).

дало название этой технике. Отметим, что это решение находится численно. Получаемое таким образом управление, как показывают многочисленные расчеты, является достаточно близким к точному.

Подход SDRE был применен и для сингулярно возмущенных моделей. Так, в работах [8, 9] рассматривалось решение непрерывной задачи нелинейного оптимального управления на конечном интервале времени.

Необходимые условия оптимальности для исходной задачи аппроксимируются соответствующими условиями для двух вариационных задач: с «быстрыми» и «медленными» движениями. Этим условиям оптимальности соответствуют два SDRE. Итоговое (композитное) управление строится на основе управлений для двух выделенных вариационных задач на конечном интервале. В работе [10] решается дискретная сингулярно возмущенная нелинейная задача оптимального управления на полуоси. Здесь также исходная задача разделяется на две подзадачи меньшей размерности, для решения которых используются отдельные SDRE. Полученные для двух подсистем управления объединяются в композитное управление, которое обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия замкнутой системы для исходной задачи.

В работе [11] для одного класса непрерывных слабо нелинейных сингулярно возмущенных управляемых систем приводится численно-аналитический алгоритм построения стабилизирующего управления на основе SDRE. Сначала в предельной линейно-квадратичной задаче строится регулятор Калмана, а затем, как и в [12, 13], формируется нелинейная коррекция полученного в [11] композитного управления с помощью выбора специального критерия качества и решений вспомогательных линейных матричных уравнений. Установлено свойство локальной асимптотической устойчивости в замкнутой системе вдоль полученного регулятора при достаточно малых возмущениях. При этом для повышения точности приближенных решений можно использовать асимптотические приближения высокого порядка. Однако в общем случае рост порядка приближений может не сопровождаться уменьшением ошибки приближения к точному решению. Сходимость приближений можно обеспечить итерационными методами, что демонстрируется в настоящей работе на примере одного из итерационных алгоритмов для решения матричных уравнений Риккати. А именно, используется метод последовательных приближений из [14] в рамках подхода SDRE для непрерывной сингулярно возмущенной задачи оптимального управления на полуоси. Отметим, что итерационный процесс для уточнения асимптотических приближений в сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задачах оптимального управления на конечном интервале был предложен в [15].

1. Постановка задачи

Итак, предположим, что уравнения движения имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt}=A_1(x,\varepsilon)x+A_2(x,\varepsilon)y+B_1(x,\varepsilon)u,\ x(0)=x^0,\\ \varepsilon\frac{dy}{dt}=A_3(x,\varepsilon)x+A_4(x,\varepsilon)y+B_2(x,\varepsilon)u,\ y(0)=y^0,\\ z=\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}^T\in Z\subset\mathbb{R}^{n+m},\ x\in X\subset\mathbb{R}^n,\ y\in Y\subset\mathbb{R}^m,\\ Z=X\times Y,\ u\in\mathbb{R}^r,\ t\in\left[0,\infty\right),0<\varepsilon<<1,\end{gathered}\tag{1}$$

где T означает транспонирование, $Z\subset\mathbb{R}^{n+m}$, $x\in X\subset\mathbb{R}^n$, $y\in Y\subset\mathbb{R}^m$, $Z=X\times Y$ – некие множества допустимых движений, $u\in\mathbb{R}^r$ – вектор управлений, ε – малый положительный параметр, коэффициенты матриц $A_i(x,\varepsilon),B_j(x,\varepsilon)$, $i=\overline{1,4}$, $j=1,2$, являются гладкими и ограниченными по обоим аргументам. Введем функционал качества

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(z^TQ(x,\varepsilon)z+u^T(z,\varepsilon)R(x,\varepsilon)u(z,\varepsilon)\right)dt\to\min_u,\tag{2}$$

где $Q(x,\varepsilon)=\begin{pmatrix}Q_1(x,\varepsilon) & Q_2(x,\varepsilon)\\ Q_2^T(x,\varepsilon) & Q_3(x,\varepsilon)\end{pmatrix}$ и R являются положительно полуопределенной и положительно определенной матрицами соответственно для $x\in X$ и $\varepsilon>0$. Предположим, что выполнено следующее условие, необходимое для применения SDRE техники:

I. Тройка матриц $\left(A(x,\varepsilon),B(x,\varepsilon),Q(x,\varepsilon)\right)$, где

$$A(x,\varepsilon)=\begin{pmatrix} A_1(x,\varepsilon) & A_2(x,\varepsilon) \\ \dfrac{A_3(x,\varepsilon)}{\varepsilon} & \dfrac{A_4(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\end{pmatrix},\ B(x,\varepsilon)=\begin{pmatrix} B_1(x,\varepsilon) \\ \dfrac{B_2(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\end{pmatrix},$$

является стабилизируемой и детектируемой при каждом $x\in X$ и $\varepsilon>0$.

Итак, сформулируем задачу следующим образом: необходимо на основе техники SDRE построить приближенное стабилизирующее управление $u(z,\varepsilon)$ в задаче (1)-(2).

2. Синтез управления

Согласно технике SDRE регулятор в задаче (1)-(2) ищем в виде

$$u(z,\varepsilon)=-R^{-1}(x,\varepsilon)B^T(x,\varepsilon)P(x,\varepsilon)z. \quad (3)$$

В (3) матрица $P(x,\varepsilon)$ есть положительно определенное решение следующего уравнения Риккати с зависящими от состояния коэффициентами

$$-P(x,\varepsilon)A(x,\varepsilon)-A^T(x,\varepsilon)P(x,\varepsilon)+$$
$$+P(x,\varepsilon)B(x,\varepsilon)R^{-1}(x,\varepsilon)B^T(x,\varepsilon)P(x,\varepsilon)-Q(x,\varepsilon)=0. \quad (4)$$

В (4) некоторые матрицы содержат большие коэффициенты из-за чего прямое применение техники SDRE может быть затруднено. Поэтому $P(x,\varepsilon)$, как и в работах [16, 17], представляется в виде $P(x,\varepsilon)=\begin{pmatrix} P_1(x,\varepsilon) & \varepsilon P_2(x,\varepsilon) \\ \varepsilon P_2^T(x,\varepsilon) & \varepsilon P_3(x,\varepsilon)\end{pmatrix}$.

Для решения (1)-(2) применим метод, основанный на итерационном алгоритме из [14], где рассматривалось решение алгебраических уравнений Риккати с постоянными коэффициентами, появляющихся в стационарных линейно-квадратичных сингулярно возмущенных задачах оптимального управления. Приведем этот алгоритм.

Пусть имеется задача (1)-(2), в которой теперь матрицы являются лишь функциями параметра ε: $A_i(\varepsilon),B_j(\varepsilon),Q_k(\varepsilon),R(\varepsilon),\ i=\overline{1,4},\ j=1,2,\ k=\overline{1,3}$.

Уравнение Риккати (4) принимает вид

$$-P(\varepsilon)A(\varepsilon)-A^T(\varepsilon)P(\varepsilon)+$$
$$+P(x,\varepsilon)B(\varepsilon)R^{-1}(\varepsilon)B^T(\varepsilon)P(\varepsilon)-Q(\varepsilon)=0, \quad (5)$$

где

$$P(\varepsilon)=\begin{pmatrix} P_1(\varepsilon) & \varepsilon P_2(\varepsilon) \\ \varepsilon P_2^T(\varepsilon) & \varepsilon P_3(\varepsilon)\end{pmatrix},\ P_j(\varepsilon)=\mathbf{P}_j(\varepsilon)+\varepsilon E_j(\varepsilon),$$

$j=1,2,3$.

Учитывая вид блочной матрицы $P(\varepsilon)$, из (5), как и в [16], для матриц $\mathbf{P}_j(\varepsilon),\ j=1,2,3$ получаются известные уравнения. При этом матрица $\mathbf{P}_3(\varepsilon)$ соответствует подсистеме «быстрых» движений и находится как положительно определенное решение следующего уравнения (ниже зависимость матриц от ε для краткости записи будем опускать)

$$-\mathbf{P}_3A_4-A_4^T\mathbf{P}_3+\mathbf{P}_3S_2\mathbf{P}_3-Q_3=0,\quad S_2=B_2R^{-1}B_2^T. \quad (6)$$

Матрица $\mathbf{P}_1(\varepsilon)$ соответствует подсистеме «медленных» движений (или предельной задаче, отвечающей задаче (1)-(2)) и определяется как положительно определенное решение уравнения

$$-\mathbf{P}_1\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_1\mathbf{B}R^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_1-\mathbf{Q}=0, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{A}=A_1+N_1A_3+SN_2^T+N_1S_2N_2^T,\quad \mathbf{B}=B_1+N_1B_2,$$
$$\mathbf{Q}=-N_2A_3-A_3^TN_2^T-N_2S_2N_2^T+Q_1,$$
$$N_1=(S\mathbf{P}_3-A_2)(A_4-S_2\mathbf{P}_3)^{-1},\ N_2=(A_3^T\mathbf{P}_3+Q_2)(A_4-S_2\mathbf{P}_3)^{-1},$$
$$S=B_1R^{-1}B_2^T.$$

Наконец, матрица $\mathbf{P}_2(\varepsilon)$ выражается следующим образом

$$\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_1N_1-N_2. \quad (8)$$

Для разрешимости (6) и (7) вводятся следующие условия из [16].

II. Тройки матриц $\left(A_4,B_2,Q_3\right)$ и $\left(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{Q}\right)$ являются стабилизируемыми и детектируемыми при каждом $\varepsilon>0$.

2.1. Итерационный алгоритм из [14]

При условиях I, II итерационный алгоритм нахождения $P(\varepsilon)$ из (5) согласно работе [14] имеет вид.

Шаг 1. Найти $\mathbf{P}_j(\varepsilon), j=1,2,3$ по формулам (6)- (8).

Шаг 2. Вычислить следующие постоянные матрицы

$$
\begin{aligned}
&S = B_1R^{-1}B_2^T,\ S_2 = B_2R^{-1}B_2^T,\\
&D_3 = A_4 - S_2\mathbf{P}_3,\ D_{22} = A_3 - S^T\mathbf{P}_1 - S_2\mathbf{P}_2{}^T,\\
&D_{21} = A_2 - S\mathbf{P}_3,\ D = D_3{}^{-1}D_{22},\\
&D_{11} = A_1 - S_1\mathbf{P}_1 - S\mathbf{P}_2{}^T,\ D_1 = D_{11} - D_{21}D_3{}^{-1}D_{22}.
\end{aligned}
$$

Шаг 3. Положить $i = 0$, $E_1{}^{(0)} = 0_{n\times n}$, $E_2{}^{(0)} = 0_{m\times n}$, $E_3{}^{(0)} = 0_{m\times m}$.

Шаг 4. Вычислить i-е значения матриц $P_j(\varepsilon), j=1,2,3$ как $P_j^{(i)} = \mathbf{P}_j + \varepsilon E_j^{(i)},\quad j=1,2,3.$

Шаг 5. Найти $H_j^{(i)}, j=1,2,3$ как

$$
\begin{aligned}
H_1{}^{(i)} &= A_1{}^T P_2{}^{(i)} - P_1^{(i)}S_1P_2^{(i)} - P_2^{(i)}S^TP_2^{(i)} -\\
&\quad - \varepsilon\left(E_1{}^{(i)}SE_3{}^{(i)} + E_2{}^{(i)}S_2E_3{}^{(i)}\right),\\
H_2{}^{(i)} &= E_1{}^{(i)}S_1E_1{}^{(i)} + E_1{}^{(i)}SE_2{}^{(i)T} + E_2{}^{(i)}S^TE_1{}^{(i)} +\\
&\quad + E_2{}^{(i)}S_2E_2{}^{(i)T},\\
H_3{}^{(i)} &= -P_2^{(i)T}A_2 - A_2{}^TP_2^{(i)} + \varepsilon P_2^{(i)T}S_1P_2^{(i)} +\\
&\quad + \varepsilon E_3{}^{(i)}S_2E_3{}^{(i)} + P_2^{(i)T}SP_3^{(i)} + P_3^{(i)}S^TP_2^{(i)}.
\end{aligned}
$$

Шаг 6. Найти $E_j^{(i+1)}, j=1,2,3$ как

$$
\begin{aligned}
&E_3{}^{(i+1)}D_3 + D_3{}^TE_3{}^{(i+1)} = H_3{}^{(i)},\\
&E_1{}^{(i+1)}D_1 + D_1{}^TE_1{}^{(i+1)} = D^TH_1{}^{(i)T} + H_1{}^{(i)}D +\\
&\quad + D^TH_3{}^{(i)}D + \varepsilon H_2{}^{(i)},\\
&E_2{}^{(i+1)} = -\left(H_1{}^{(i)} + E_1{}^{(i+1)}D_{21} + D_{22}{}^TE_3{}^{(i+1)}\right)D_3^{-1}.
\end{aligned}
$$

Шаг 7. Проверить критерий останова. Если выполнен, то конец, иначе $i=i+1$, переход к Шагу 4.

Для приведенного алгоритма имеет место оценка [14]: $\left\|E_j - E_j^{(i)}\right\| = O(\varepsilon^i), j=1,2,3,$ $i = 0,1,2,\ldots$ где E_j – матрицы, для которых блоки $P_j(\varepsilon) = \mathbf{P}_j(\varepsilon) + \varepsilon E_j(\varepsilon)$ формируют точное решение $P(\varepsilon)$ уравнения (5).

Отметим, что в качестве критерия останова могут использоваться величины $\left\|E_j^{(i+1)} - E_j^{(i)}\right\|, j=1,2,3,$ где $\|\bullet\|$ – какая-либо норма. Если эти величины меньше порогового значения, то вычисления прекращаются. Другим критерием, который мы и будем использовать в численных экспериментах, является заданное число итераций $i_{max} \geq 0$. Если $i = i_{max}$, то конец.

2.2. Итерационный алгоритм построения синтеза в задаче (1)-(2)

Таким образом, при условиях I, II на каждом шаге сетки интегрирования имеем следующую процедуру построения управления для исходной задачи (1)-(2) с зависящими от состояния коэффициентами.

Шаг 1. Для текущего значения вектора состояния $\mathbf{z} = [\mathbf{x}\quad \mathbf{y}]^{\mathrm{T}}$ вычисляются матрицы $A(\varepsilon) = A(\mathbf{x},\varepsilon), B(\varepsilon) = B(\mathbf{x},\varepsilon), Q(\varepsilon) = Q(\mathbf{x},\varepsilon),$ $R(\varepsilon) = R(\mathbf{x},\varepsilon).$

Шаг 2. Находим матрицы $P_j(\varepsilon), j=1,2,3$ по приведенному выше алгоритму из подраздела 2.1; формируем матрицу $P(\varepsilon) = \begin{pmatrix} P_1(\varepsilon) & \varepsilon P_2(\varepsilon)\\ \varepsilon P_2^T(\varepsilon) & \varepsilon P_3(\varepsilon)\end{pmatrix}.$

Шаг 3. Определяем управление по формуле (3), где $z = \mathbf{z}$, $x = \mathbf{x}$.

3. Численный эксперимент

Рассмотрим взятую из [11] модельную задачу стабилизации слабо нелинейной системы вида (1),(2) со следующими матрицами и начальными условиями

$$
\begin{gathered}
A_i(x,\varepsilon) = A_{i0} + \varepsilon A_{i1}(x),\ B_j(x,\varepsilon) = B_{j0} + \varepsilon B_{j1}(x),\\
Q_k(x,\varepsilon) = Q_{k0} + \varepsilon Q_{k1}(x),\\
A_{10} = 1,\ A_{20} = 2,\ A_{30} = 2,\ A_{40} = 1,\ B_{10} = 1.3,\\
B_{20} = 1,\ A_{11}(x) = \sin(x),\\
A_{21}(x) = \cos(x),\ A_{31}(x) = \cos(x),\\
A_{41}(x) = \sin(x),\ B_{11}(x) = \cos(x),\\
Q_{10} = 10,\ Q_{20} = 0,\ Q_{30} = 15,\ Q_{11}(x) = 100,\\
Q_{21}(x) = 70,\ Q_{31}(x) = 100,\\
B_{21}(x) = \sin(x), R(x,\varepsilon) = 1,\ x(0) = -2,\ y(0) = 2,\\
i = \overline{1,4},\ j = 1,2,\ k = \overline{1,3}.
\end{gathered}
$$

Будем обозначать полученное по алгоритму 2.2 управление как u_G. Сконструируем так же «стандартное» SDRE управление, алгоритм построения которого совпадает с алгоритмом для u_G за исключением Шага 2, где матрица $P(\varepsilon)$ уже ищется как положительно определенное решение уравнения (5) непосредственно. Такое управление обозначим как u_{SDRE}. Наконец, построим так же управление из [11] и обозначим его как u_c. Напомним, что в u_c асимптотическая нелинейная коррекция линейного композитного регулятора выполнена на основе первого члена асимптотики решения SDRE. Отметим, что при сходимости итераций алгоритма 2.1 управление u_G приближается к u_{SDRE}, поскольку последнее реализуется на основе точного решение уравнения (5) для каждого текущего значения состояния системы, а первое – на основе приближенного решения (5).

В Табл. 1-Табл. 3 приводятся значения критерия (2) вдоль трех построенных управлений при $\varepsilon = 0.3$, $\varepsilon = 0.1$ и $\varepsilon = 0.05$ соответственно. Регулятор u_G был реализован для различных значений i_{max}. Интегрирование проводилось на интервале $t \in [0,5]$.

Табл. 1. Значения критерия (2) вдоль различных управлений при ε = 0.3

Регулятор	i_{max}	$J(u)$	$(J\text{-}J(u_{SDRE}))^2$
u_G	0	8,58631417	2,14543E-05
	1	8,59611965	2,67662E-05
	2	8,588959205	3,94753E-06
	3	8,5920504	1,21960E-06
	4	8,590457975	2,38212E-07
	5	8,591187	5,80593E-08
	10	8,590940615	2,94849E-11
	15	8,590946155	1,21000E-14
	20	8,590946045	0,00000E+00
	25	8,590946045	0,00000E+00
u_c	-	9,71725761	1,26858E+00
u_{SDRE}	-	8,590946045	0

Табл. 2. Значения критерия (2) вдоль различных управлений при ε = 0.1

Регулятор	i_{max}	$J(u)$	$(J\text{-}J(u_{SDRE}))^2$
u_G	0	5,651179015	1,19727E-08
	1	5,65186607	6,34372E-07
	2	5,65121643	2,15605E-08
	3	5,650997445	5,20562E-09
	4	5,651087625	3,25081E-10
	5	5,651061765	6,13089E-11
	10	5,651069625	9,00000E-16
	15	5,651069595	0,00000E+00
	20	5,651069595	0,00000E+00
u_c	-	5,682566505	9,92055E-04
u_{SDRE}	-	5,651069595	0

Табл. 3. Значения критерия (2) вдоль различных управлений при $\varepsilon = 0.05$

Регулятор	i_{max}	$J(u)$	$(J\text{-}J(u_{SDRE}))^2$
u_G	0	4,850253388	5,04092E-10
	1	4,850229849	1,18157E-12
	2	4,850230871	4,225E-15
	3	4,850230936	0,00000E+00
	4	4,850230936	0,00000E+00
u_c	-	4,853150068	8,52133E-06
u_{SDRE}	-	4,850230936	0

На Рис. 1 и Рис. 2 представлены траектории замкнутой при $\varepsilon = 0.1$ системы вдоль u_G, $i_{max} = 20$ и соответствующее управление.

Проведенные эксперименты показывают, что траектории и управления качественно подобны для всех трех регуляторов. С ростом числа итераций u_G приближается к u_{SDRE} по

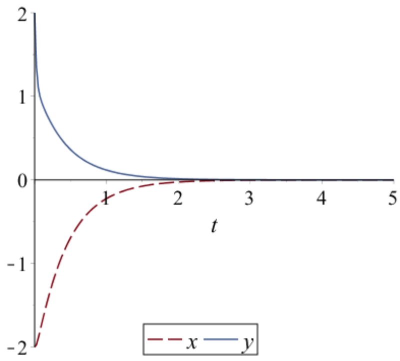

Рис. 1. Траектория системы вдоль u_G, $i_{max} = 20$

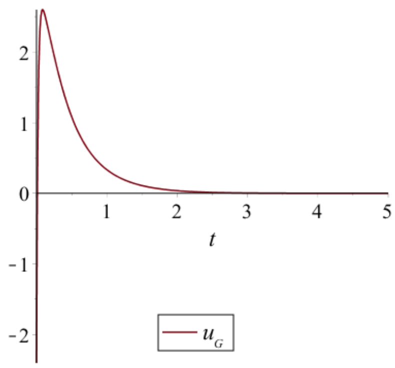

Рис. 2. Управление u_G, $i_{max} = 20$

введенному критерию качества. Наличие сходимости итерационного процесса и ее скорость зависит от величины параметра ε. Это объясняется тем, что в используемом алгоритме из [14] предполагается достаточная малость ε. Допустимая максимальная величина зависит от конкретной задачи, и в рассмотренном примере сходимость нарушалась уже при ε = 0.5.

В некоторых экспериментах значение минимизируемого критерия (2) вдоль управления u_G меньше значения этого критерия вдоль u_{SDRE}. Это объясняется тем, что последнее носит приближенный характер в исходной нелинейной задаче.

Естественно, управление u_c наиболее эффективно с точки зрения необходимых вычислений, поскольку на каждом его шаге решается лишь три вспомогательных матричных уравнения Ляпунова, решения которых имеют аналитические представления, а итерационный алгоритм, формирующий высокоточное приближение u_G, конечно, требует дополнительных вычислений.

Заключение

Предложен метод построения композитных нелинейных алгоритмов стабилизирующего управления для нелинейных систем с формальным выделением двух групп движений («быстрых» и «медленных»). Метод основан на декомпозиции исходной задачи на задачи меньшей размерности и приближенном решении матричных алгебраических уравнений Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния. Проведенные численные эксперименты для сингулярно возмущенной системы управления показали, что с увеличением числа итераций полученное управление приближается к управлению, построенному на основе SDRE подхода, применение которого для этого класса систем может быть затруднено.

Расчеты иллюстрируют, с одной стороны, что применение асимптотических методов позволяет получить достаточно близкое приближение к точному решению. С другой стороны, они иллюстрируют возможность получения более точных приближений с помощью итерационных процедур, где в качестве начального приближения используется асимптотическое представление.

Преимуществом предложенного подхода по сравнению с аналогичным заключается в возможности последовательного улучшения полученного решения с увеличением числа итераций.

Литература

1. Dmitriev M. G., Kurina G. A. Singular perturbations in control problems // Automation and Remote Control. 2006. Vol. 67(1). Pp. 1-43.
2. Kurina G. A., Dmitriev M. G., Naidu D. S. Discrete singularly perturbed control problems (A survey) // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications and Algorithms. 2017. Vol. 24(5). Pp. 335-370.
3. Naidu D. S., Calise A. J. Singular perturbations and time scales in guidance and control of aerospace systems: A survey // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2001. Vol. 24(6). Pp. 1057-1078.
4. Горнов А. Ю., Дмитриев М. Г., Тятюшкин А. И. Опыт решения задач оптимального управления с пограничным слоем, Деп. в ВИНИТИ 27.11.85, 28441-1385, ВЦ СО АН СССР в г. Красноярске.
5. Çimen T. Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. Vol. 35(4). Pp. 1025-1047.
6. Nekoo S. R. Tutorial and Review on the State-dependent Riccati Equation // Journal of Applied Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 8(2). Pp. 109-166.
7. Çimen T. State-dependent Riccati equation (SDRE) control: A survey // IFAC Proceedings Volumes. 2008. Vol. 41 (2). Pp. 3761-3775.
8. Ghadami S. M., Amjadifard R., Khaloozadeh H. Designing SDRE-based controller for a class of nonlinear singularly perturbed systems // International Journal of Robotics and Automation. 2013. Vol. 4. Pp. 1-18.
9. Ghadami S. M., Amjadifard R., Khaloozadeh H. Optimizing a class of nonlinear singularly perturbed systems using SDRE technique // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. 2014. Vol. 136 (1). Pp. 011003-1 - 011003-13.
10. Zhang Y. Naidu D.S, Caia C., Zoua Y. Composite control of a class of nonlinear singularly perturbed discrete-time systems via D-SDRE //International Journal of Systems Science. 2016. Vol. 47(11). Pp. 2632-2641.
11. Dmitriev M.G., Makarov D.A. The stabilizing composite control in a weakly nonlinear singularly perturbed control system // 21st International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC 2017), Sinaia, Romania, October 19 - 21, 2017. Pp. 594-599. 10.1109/ICSTCC.2017.8107099.
12. Дмитриев М.Г., Макаров Д.А. Гладкий нелинейный регулятор в лабо нелинейной системе управления с коэффициентами, зависящими от состояния. // Труды Института системного анализа РАН. 2014. Т. 64. №4. С. 53-58.
13. Даник Ю.Э., Дмитриев М.Г., Макаров Д.А. Один алгоритм построения регуляторов для нелинейных систем с формальным малым параметром // Информационные технологии и вычислительные системы. 2015. №4. С. 35-44.
14. Gajic Z., Shen X. Parallel algorithms for optimal control of large scale linear systems. Springer Science & Business Media, 2012. ISBN-13: 978-1-4471-3221-9. DOI: 10.1007/978-1-4471-3219-6.
15. Dmitriev M.G., Klishevich A.M. Iterative solution of optimal control problems with fast and slow motions // Systems & control letters. 1984. Vol. 4(4). Pp. 223-226
16. Kokotovic P.V., Yackel R.A. Singular perturbation on linear regulators: basic theorems // IEEE Trans. Automat. Control. 1972. Vol. 17(1). Pp. 29-37.
17. Глизер В.Я., Дмитриев М.Г. Сингулярные возмущения в линейной задаче оптимального управления с квадратичным функционалом // ДАН СССР. 1975. Т. 225. №5. С. 997-1000.

Дмитриев Михаил Геннадьевич. Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН), г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9. Главный научный сотрудник. Московского физико-технический института (МФТИ), г. Долгопрудный, Институтский пер., 9, Россия. Количество печатных работ: свыше 250. Область научных интересов: асимптотические методы в теории оптимального управления, нелинейный синтез, моделирование социально – экономических систем. E-mail: mdmitriev@mail.ru

Макаров Дмитрий Александрович. Старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН), г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9. Старший научный сотрудник Московского физико-технический института (МФТИ), г. Долгопрудный, Институтский пер., 9, Россия. Кандидат физико-математических наук. Окончил Рыбинскую государственную авиационную технологическую академию им. П.А. Соловьева в 2008. Автор более 50 научных публикаций. Область научных интересов: управление сложными динамическими системами, робастные методы устойчивости и стабилизируемости, искусственный интеллект, экспертные системы. E-mail: makarov@isa.ru.

Iterative Control Synthesis Algorithm in a Singular Perturbed Nonlinear Problem Based on the SDRE Technology

M. G. Dmitriev[I,II], D. A. Makarov[I,II]

[I] Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
[II] Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

Abstract. The paper presents an iterative method for solving the stabilization problem for one class of nonlinear dynamical systems with "fast" and "slow" motions, where the systems are formally linear, but their coefficients depend on the state. The stabilizing controller is constructed on the basis of the movements separation principle and modification of the SDRE approach, which consists in using the iterative method of solving the Riccati matrix equation for a singularly perturbed optimal control problem.
Keywords: singular perturbations, stabilization algorithm, nonlinear systems, separation of motions, iterative methods, system, Riccati matrix equation.

DOI 10.14357/20718632200108

References

1. Dmitriev M. G., Kurina G. A. Singular perturbations in control problems // Automation and Remote Control. 2006. Vol. 67(1). Pp. 1-43.
2. Kurina G. A., Dmitriev M. G., Naidu D. S. Discrete singularly perturbed control problems (A survey) // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications and Algorithms. 2017. Vol. 24(5). Pp. 335-370.
3. Naidu D. S., Calise A. J. Singular perturbations and time scales in guidance and control of aerospace systems: A survey // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2001. Vol. 24(6). Pp. 1057-1078.
4. Gornov A. Yu., Dmitriev M. G., Tyatyushkin A. I. Experience in solving optimal control problems with a boundary layer [Opyt resheniya zadach optimal'nogo upravleniya s pogranichnym sloem], Deposited in Dep. in VINITI [Dep. v VINITI] 27.11.85, 28441-1385, Computing Center of the Siberian Branch of the Academy of Sciences of the USSR in Krasnoyarsk [VC SO AN SSSR v g. Krasnoyarske], in Russian.
5. Çimen T. Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. Vol. 35(4). Pp. 1025-1047.
6. Nekoo S. R. Tutorial and Review on the State-dependent Riccati Equation // Journal of Applied Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 8(2). Pp. 109-166.
7. Çimen T. State-dependent Riccati equation (SDRE) control: A survey // IFAC Proceedings Volumes. 2008. Vol. 41(2). Pp. 3761-3775.
8. Ghadami S. M., Amjadifard R., Khaloozadeh H. Designing SDRE-based controller for a class of nonlinear singularly perturbed systems // International Journal of Robotics and Automation. 2013. Vol. 4. Pp. 1-18.
9. Ghadami S. M., Amjadifard R., Khaloozadeh H. Optimizing a class of nonlinear singularly perturbed systems using SDRE technique // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. 2014. Vol. 136 (1). Pp. 011003-1 - 011003-13.
10. Zhang Y. Naidu D.S, Caia C., Zoua Y. Composite control of a class of nonlinear singularly perturbed discrete-time systems via D-SDRE // International Journal of Systems Science. 2016. Vol. 47(11). Pp. 2632-2641.
11. Dmitriev M.G., Makarov D.A. The stabilizing composite control in a weakly nonlinear singularly perturbed control system // 21st International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC 2017), Sinaia, Romania, October 19 - 21, 2017. Pp. 594-599. 10.1109/ICSTCC.2017.8107099.
12. Dmitriev M.G., Makarov D.A. Smooth nonlinear controller in a weakly nonlinear control system with state-dependent coefficients [Gladkij nelinejnyj regulyator v slabo nelinejnoj sisteme upravleniya s koefficientami, zavisyashchimi ot sostoyaniya]. // Proceedings of the Institute for System Analysis of RAN [Trudy Instituta sistemnogo analiza RAN]. 2014. Vol. 64(4). Pp. 53-58. In Russian.
13. Danik YU.E., Dmitriev M.G., Makarov D.A. An algorithm for constructing regulators for nonlinear systems with the formal small parameter [Odin algoritm postroeniya regulyatorov dlya nelinejnyh sistem s formal'nym malym parametrom] // Information Technology and Computing Systems [Informacionnye tekhnologii i vychislitel'nye sistemy]. 2015. №4. Pp. 35-44.
14. Gajic Z., Shen X. Parallel algorithms for optimal control of large scale linear systems. Springer Science & Business Media, 2012. ISBN-13: 978-1-4471-3221-9. DOI: 10.1007/978-1-4471-3219-6.

15. Dmitriev M.G., Klishevich A.M. Iterative solution of optimal control problems with fast and slow motions // Systems & control letters. 1984. Vol. 4(4). Pp. 223-226.
16. Kokotovic P.V., Yackel R.A. Singular perturbation on linear regulators: basic theorems // IEEE Trans. Automat. Control. 1972. Vol. 17(1). Pp. 29-37.
17. Glizer V.YA., Dmitriev M.G. Singular perturbations in the linear optimal control problem with a quadratic functional [Singulyarnye vozmushcheniya v linejnoj zadache optimal'nogo upravleniya s kvadratichnym funkcionalom] // Reports of the USSR Academy of Sciences [DAN SSSR]. 1975. Vol. 225(5). Pp. 997-1000, in Russian.

Mikhail Gennadievich Dmitriev. Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, pr-t 60-letiya Oktyabrya, 9, Moscow, 117312, Russia. Moscow Institute of Physics and Technology, senior researcher, Dolgoprudny, Institutsky per., 9. Russia. Doctor of Sciences. Research interests: asymptotic methods in the theory of optimal control, nonlinear synthesis, modeling of social and economic systems. Number of publications: over 250. E-mail: mdmitriev@mail.ru

Makarov Dmitry Alexandrovich. Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, senior researcher**,** Moscow, pr-t 60-letiya Oktyabrya, 9, 117312**,** Russia**.**Moscow Institute of Physics and Technology, senior researcher, Dolgoprudny, Institutsky per., 9. Russia. Cand. Sci. (Physics and Mathematics). Author of 50 scientific papers. Research interests: nonlinear and robust control, composite control, artificial intelligence. E-mail: makarov@isa.ru