М. Г. Дмитриев, З. Н. Мурзабеков, Д. А. Макаров, Г. А. Мирзахмедова, Стабилизация в макроэкономической формально линейной системе управления с зависящими от состояния коэффициентами, *ИТиВС*, 2019, выпуск 2, 3–13

DOI: 10.14357/20718632190201

Стабилизация в макроэкономической формально линейной системе управления с зависящими от состояния коэффициентами*

М. Г. Дмитриев[I], З. Н. Мурзабеков[II], Д. А. Макаров[I, III], Г. А. Мирзахмедова[II]

[I]Институт системного анализа Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия

[II]Казахский национальный университет им. аль–Фараби, г. Алматы, Казахстан

[III]Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Россия

Аннотация. В работе на примере математической модели трехсекторной экономической системы показывается стабилизация системы в окрестности равновесия на основе построения инвестиционных стратегий управления в виде обратной связи с помощью алгоритма решения нелинейной задачи управления, в которой дифференциальные связи формально линейны по управлению и состоянию, и коэффициенты которой зависят от состояния.

Ключевые слова: оптимальное управление, трехсекторный экономический кластер, метод множителей Лагранжа, нелинейная система, квадратичный функционал, матричное уравнение Риккати.

DOI 10.14357/20718632190201

Введение

В теории управления большое внимание уделяется проблеме исследования устойчивости в нелинейных экономических системах и задаче стабилизации нелинейных систем. В математической экономике встречаются модели задач управления для экономических систем, динамика переменных состояния в которых описывается нелинейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от состояния [1-4]. За последнее время появились новые алгоритмы управления нелинейными системами, основанные на использовании матричных алгебраических уравнений Риккати [5-8] и использующие формальную линейную структуру уравнений. Неоднозначность представления нелинейной системы в виде системы с линейной структурой и отсутствие достаточно универсальных алгоритмов решения уравнения Риккати, коэффициенты которого зависят от состояния, порождают множество возможных субоптимальных решений. В прикладных задачах имеется множество различных типов нелинейностей, поэтому возникают различные подходы к построению законов управления в нелинейных системах с обратной связью рациональных относительно заданного критерия качества.

В данной работе рассматривается задача построения стабилизирующего управления для одного класса нелинейных систем правые, части в которых формально линейные по состоянию и управлению, и с коэффициентами, зависящими от состояния.

* Исследование частично поддержано грантами РФФИ № 18-01-00551, № 16-29-12878 (разделы 1,3,4). Раздел 2 работы выполнен за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01220).

Используя специфику нелинейностей, в работе на примере математической модели трехсекторной экономической системы рассматривается применение подхода SDRE [9-14], основанного на использовании матричного алгебраического уравнения Риккати, появляющегося в алгоритме метода Калмана–Летова при решении задач управления с квадратичным функционалом для поиска стабилизирующего управления на бесконечном интервале времени.

1. Трехсекторная математическая модель экономического кластера

Рассмотрим задачу управления для модели кластера из трех секторов: $i = 0$ (материальный сектор), $i = 1$ (фондосоздающий сектор), $i = 2$ (потребительский сектор). Предполагается, что в каждом секторе производится свой агрегированный продукт: в материальном секторе – предметы труда (топливо, электроэнергия, сырье и другие материалы); в фондосоздающем секторе – средства труда (машины, оборудование, производственные здания, сооружения и т.д.); в потребительском секторе – предметы потребления.

Рассматриваемая математическая модель состоит [15] (а также [16-18]) из:
а) трех функций удельного выпуска типа Кобба – Дугласа:

$$x_i = \theta_i \overline{A}_i k_i^{\alpha_i}, \ \overline{A}_i > 0, \ 0 < \alpha_i < 1, \ (i = 0, 1, 2), \tag{1}$$

б) трех обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику показателей фондовооруженностей отраслей:

$$\frac{dk_i}{dt} = -\lambda_i k_i + (s_i / \theta_i) x_1, \ k_i(0) = k_i^0, \quad \lambda_i > 0, \quad (i = 0, 1, 2), \tag{2}$$

в) трех балансовых соотношений:

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1, \quad s_0 \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \quad s_2 \geq 0, \tag{3}$$

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \quad \theta_0 \geq 0, \quad \theta_1 \geq 0, \quad \theta_2 \geq 0, \tag{4}$$

$$(1 - \beta_0) x_0 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, \ \beta_0 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad \beta_2 \geq 0. \tag{5}$$

Здесь состояние экономической системы (показатели фондовооруженности) описывается вектором (k_0, k_1, k_2), а $(s_0, s_1, s_2, \theta_0, \theta_1, \theta_2)$ – вектор управлений, (s_0, s_1, s_2) – доли секторов в распределении инвестиционных ресурсов, $(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ – доли секторов в распределении трудовых ресурсов); x_i – удельный выпуск (количество выпускаемой продукции в i-м секторе в расчете на одного работающего); β_i – прямые материальные затраты при выпуске продукции в i-м секторе; i = 0,1,2. Начальное состояние системы равно (k_0^0, k_1^0, k_2^0), где $k_i^0 = k_i(0)$ – фондовооруженность i-го сектора $(i = 0, 1, 2)$ при $t = 0$, $k_1^0(0) > 0$.

2. Задача стабилизации

Рассмотрим для экономической трехсекторной структуры задачу управления, уравнения динамики в которой есть система трех обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от состояния. Рассматривается задача перевода нелинейной системы из заданного начального состояния (k_0^0, k_1^0, k_2^0) в любую достаточно малую окрестность состояния (k_0^s, k_1^s, k_2^s) на бесконечном интервале времени $[t_0, \infty)$, где в качестве желаемого конечного состояния выбирается состояние равновесия системы [16]

$$\frac{dy}{dt} = Ay + BD(y)u + B(D(y) - D(k^s))v^s, \ y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0, \infty). \tag{6}$$

Здесь $y=(y_1, y_2, y_3)^T$ означает вектор состояния объекта, u означает вектор управления. Используя следующие обозначения $y_1=k_1-k_1^s$, $y_2=k_2-k_2^s$, $y_3=k_0-k_0^s$, $u_1=s_1-v_1^s$, $u_2=s_2\theta_1/\theta_2-v_2^s$, $u_3=s_0\theta_1/\theta_0-v_3^s$, $v_1^s=s_1^s$, $s_2^s\theta_1^s/\theta_2^s=v_2^s$, $s_0^s\theta_1^s/\theta_0^s=v_3^s$, и вводя матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda_0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\overline{A}_1 & 0 & 0\\ 0 & \overline{A}_1 & 0\\ 0 & 0 & \overline{A}_1\end{pmatrix},$$

$$D(y)=\begin{pmatrix}(y_1+k_1^s)^{\alpha_1} & 0 & 0\\ 0 & (y_1+k_1^s)^{\alpha_1} & 0\\ 0 & 0 & (y_1+k_1^s)^{\alpha_1}\end{pmatrix},\ D(k^s)=\begin{pmatrix}(k_1^s)^{\alpha_1} & 0 & 0\\ 0 & (k_1^s)^{\alpha_1} & 0\\ 0 & 0 & (k_1^s)^{\alpha_1}\end{pmatrix},$$

получаем вид уравнений для положения равновесия

$$Ak^s+BD(k^s)v^s=0. \tag{7}$$

Вектор параметров $(s_0^s, s_1^s, s_2^s, \theta_0, \theta_1, \theta_2)$ считается заданным. Его значение находится в работе [16] как максимальная величина предметов потребления во всех допустимых областях изменения управляющих параметров, которыми являются величины распределения трудовых (θ_i) и инвестиционных (s_i) ресурсов. Значения (k_0^s, k_1^s, k_2^s) находится из (7) как состояния равновесия фондовооруженности секторов.

Введем условие

I. При данных, входящих в (1)-(5), система имеет положительные решение (k^s, v^s).

Будем считать, что ограничения на управления отсутствуют. Так как

$$\dot{y}=Ay+BD(y)\Big(u+\big(E-D^{-1}(y)D(k^s)\big)v^s\Big),\quad y(t_0)=y_0,$$

система (6) принимает вид

$$\dot{y}=Ay+BD(y)w,\quad y(t_0)=y_0, \tag{8}$$

где $w(y)=u+\big(E-D^{-1}(y)D(k^s)\big)v^s$ – обобщенное управление.

Ставится задача: требуется найти стабилизирующее управление $w(y)$, обеспечивающее асимптотическую устойчивость по Ляпунову нулевого положения равновесия системы (8).

Для поиска такого управления будем использовать алгоритм решения конструируемой здесь задачи оптимального управления. А именно, сначала вводим квадратичный функционал

$$J(w)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[y^TQ(y)y+w^TRw]\,dt, \tag{9}$$

где коэффициенты весовой матрицы $Q(y)$, конкретный вид которой определяется ниже, являются функциями состояния, $Q(y)\ge 0,\ y\in\mathbb{R}^3$, $R>0$ – заданная постоянная матрица. Знаками >0 (≥ 0) обозначается положительная определенность (полуопределенность) матрицы.

Задачу (8)–(9) будем решать с помощью техники SDRE [9], в которой ключевое место занимает решение алгебраического матричного уравнения Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния. Покажем, что за счет специфики задачи матрицы $Q(y)$ и R могут быть выбраны так, что соответствующее уравнение Риккати будет иметь постоянные коэффициенты.

Для решения задачи оптимальной стабилизации используем принцип освобождения от дифференциальных связей при решении экстремальных задач, выраженный в широко известном методе множителей Лагранжа. Применим принцип расширения [19] суть которого состоит в замене исходной задачи оптимального управления другой на более широком множестве допустимых управлений. В результате для решения поставленной задачи присоединяем к выражению для функционала (9) систему дифференциальных уравнений (8) с множителем Лагранжа $\lambda = K(t)y$. При этом весовые матрицы $Q(y)$ и R в критерии качества $J(w)$ подбираются так чтобы, с одной стороны, пара (y,w) обеспечивала минимизацию отклонения значений вектора y от нулевого положения равновесия, а с другой – минимизировала затраты на управление.

Итак, считая, что пара (y,w) удовлетворяет уравнению (8), вместо $J(w)$ можно ввести

$$L(y,w) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} \{y^T Q(y)y + w^T Rw - (K(t)y)^T(\dot{y} - Ay - BD(y)w)\}\, dt, \qquad (10)$$

где $K(t)$ – симметрическая положительно определенная матрица. Используя метод интегрирования по частям, представление (10) можно заменить следующим

$$L(y,w) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} \{y^T Q(y)y + w^T R(t)w + 2(K(t)y)^T(Ay + BD(y)w) + y^T \dot{K}(t)y\}\, dt - \frac{1}{2} y^T(t)K(t)y(t)\Big|_0^{\infty}.$$

Предполагая равномерную ограниченность $K(t)$, а также что $y(t) \to 0$ при $t \to \infty$ (при доказательстве теоремы эти допущения выполняются), имеем

$$L(y,w) = -V(y_0,t_0) + \int_{t_0}^{\infty} M(y,w)dt, \qquad (11)$$

где

$$V(y,t) = \frac{1}{2} y^T K(t)y,\; M(y,w) = \frac{1}{2} y^T(Q(y) + \dot{K}(t))y + \frac{1}{2} w^T Rw + (K(t)y)^T(Ay + BD(y)w). \qquad (12)$$

Выбирая $w(t)$ в виде

$$w = -R^{-1}D^T(y)B^T K(t)y \qquad (13)$$

и подставляя $w(t)$ в M, получаем

$$M(y,u,t) = \frac{1}{2} y^T(Q(y) + \dot{K}(t))y + \frac{1}{2}\left(R^{-1}D^T(y)B^T K(t)y\right)^T RR^{-1}D^T(y)B^T K(t)y +$$

$$+(K(t)y)^T(Ay - BD(y)R^{-1}D^T(y)B^T K(t)y) = \frac{1}{2} y^T\left(Q(y) + \dot{K}(t)\right)y + \frac{1}{2}\left(y^T K(t)BD(y)R^{-1}D^T(y)B^T K(t)y\right) +$$

$$+y^T K(t)Ay - y^T K(t)BD(y)R^{-1}D^T(y)B^T K(t)y =$$

$$= \frac{1}{2} y^T\left(\dot{K}(t) + K(t)A + A^T K(t) - K(t)BD(y)R^{-1}D^T(y)B^T K(t) + Q(y)\right)y = 0.$$

Теперь матрицу $K(t)$ будем определять как установившееся решение (14) при $K(T) = K_1 > 0$ для достаточно большого T

$$\frac{dK}{dt} + KA + A^T K - KBD(y)R^{-1}D^T(y)B^T K + Q(y) = 0. \qquad (14)$$

Выбирая в последнем уравнении $Q(y)$ в виде $Q(y) = KBD(y)R^{-1}D^T(y)B^T K - KBD(k^s)R^{-1}D^T(k^s)B^T K + Q_1$, где Q_1 некоторая постоянная положительно определенная матрица, решаем, фактически, обратную задачу нахождения весовой матрицы функционала (9) с целью получения матрицы коэффициентов усиления обратной связи $w(y)$, обеспечивающей стабилизацию системы (8). Подобный прием подбора критерия качества использовался в работах [20-22].

Теперь, подставляя $Q(y)$ в (14), получаем для $K(t)$ дифференцальное матричное уравнение Риккати с постоянными коэффициентами

$$\frac{dK}{dt} = -KA - A^T K + KBD(k^s)R^{-1}D^T(k^s)B^T K - Q_1. \qquad (15)$$

Далее нам потребуется существование стационарного положительно определенного решения уравнения (15). Достаточное условие такой разрешимости можно сформулировать в форме условия.

II. Тройка постоянных матриц $\{A, \widetilde{B}, Q_1^{1/2}\}$ управляема и наблюдаема, где $\widetilde{B} = BD(k^s)$.

Но очевидно, в силу невырожденности всех матриц $A, \tilde{B}, Q_1^{1/2}$ условие II выполняется. Итак, уравнение (15) имеет положительное определенное решение в виде постоянной матрицы - корня алгебраического матричного уравнения Риккати

$$0 = -KA - A^T K + KBD(k^s)R^{-1}D^T(k^s)B^T K - Q_1 \qquad (16)$$

Теперь подставляя в (8) управление (13), в котором в качестве K выступает положительно определенное решение алгебраического уравнения Риккати (16), получаем замкнутую систему

$$\frac{dy}{dt} = A_1(y)y, \qquad y(t_0) = y_0 \qquad (17)$$

где $A_1(y) = A - BD(y)R^{-1}D^T(y)B^T K.$

Введем предположения

III. $k_1(t) \geq 0, \quad t \in [0, \infty).$

IV. $Q(y) = KBD(y)R^{-1}D^T(y)B^T K - KBD(k^s)R^{-1}D^T(k^s)B^T K + Q_1 > 0, \quad y \in \mathbb{R}^3.$

Условие III означает, что в каждый момент фондовооруженность не может быть отрицательной. Нетрудно видеть, что условие IV всегда может быть выполнено, если задать достаточно большую по норме матрицу $Q_1 > 0$.

Для доказательства асимптотической устойчивости положения равновесия в (17) вычислим полную производную по t вдоль траекторий системы (15) от функции Ляпунова $W(y) = \frac{1}{2}y^T Ky,$ в которой постоянная матрица $K > 0$ – решение (16).

Имеем

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^T Ky + \frac{1}{2}y^T K\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{2}\left[A_1(y)y\right]^T Ky + \frac{1}{2}y^T K\left[A_1(y)y\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(A - BD(y)R^{-1}D^T(y)B^T K\right)y\right]^T Ky + \frac{1}{2}y^T K\left[\left(A - BD(y)R^{-1}D^T(y)B^T K\right)y\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[y^T A^T Ky - y^T KBD(y)R^{-1}D^T(y)B^T Ky\right] + \frac{1}{2}\left[y^T KAy - y^T KBD(y)R^{-1}D^T(y)B^T Ky\right] =$$

$$= \frac{1}{2}y^T\left[A^T K + KA - KBD(y)R^{-1}D^T(y)B^T K - KBD(y)R^{-1}D^T(y)B^T K\right]y =$$

$$= -\frac{1}{2}y^T\left[-A^T K - KA\right]y - y^T\left[KBD(y)R^{-1}D^T(y)B^T K\right]y = -\frac{1}{2}y^T\left(F + 2P(y)\right)y < 0, \ \forall y \in \mathbb{R}^3,$$

где $F = -A^T K - KA$ – постоянная положительно определенная матрица в силу отрицательных собственных значений матрицы A и $K > 0$, а $P(y) = KBD(y)R^{-1}D^T(y)B^T K$ – положительно полуопределенная при всех $y \in \mathbb{R}^3$ матрица в силу $K > 0, B > 0, D(y) \geq 0, R^{-1} > 0$ и при условии III. Теперь, очевидно, что найдутся скалярные непрерывные неубывающие функции, $\omega_i(y) > 0$, $\omega_i(0) = 0,\ i = 1,2,3$, удовлетворяющие неравенствам $\omega_1(\| y \|) \leq W(y) \leq \omega_2(\| y \|),\ \dot{W}(y) \leq -\omega_3(\| y \|)$. Следовательно, согласно теореме об асимптотической устойчивости второго метода Ляпунова [21] справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть выполняются условия I-IV. Тогда нулевое положение равновесия в замкнутой системе (17) является асимптотически устойчивым и регулятор (13), в котором $K > 0$ есть решение уравнения Риккати (16), является стабилизирующим.

3. Алгоритм решения задачи оптимальной стабилизации

Опишем алгоритм решения задачи оптимального управления (8)-(9).

1. Находим постоянную матрицу K>0 как решение алгебраического уравнения Риккати (16).

2. Интегрируем систему дифференциальных уравнений (17) на расширяющемся интервале $[t_0, T]$ при начальных условиях $y(t_0) = y_0$. В процессе интегрирования системы (17) выводим графики субоптимальной траектории $y(t)$ и субоптимального управления $u(t)$, найденного как $u = w(y) - \left(E - D^{-1}(y)D(k^s)\right)v^s$.

3. После нахождения $u(t)$ и $y(t)$ приступаем к вычислению удельного выпуска продукции $f_i(y_i),\ i = 0,1,2,$ инвестиционных ресурсов $s_i,\ i = 0,1,2$ и трудовых ресурсов $\theta_i,\ i = 0,1,2$ по следующим формулам

$$f_i(y_i) = (y_i + k_i^s)^{\alpha_i},$$

$$v = \frac{\beta_1 A_1 f_1(y_1) + \beta_2 A_2 f_2(y_2)(1 - u_1 - v_1^s)/(u_2 + v_2^s)}{(1-\beta_0) A_0 f_3(y_3)(1 - u_1 - v_1^s)/(u_3 + v_3^s) + \beta_2 A_2 f_2(y_2)(1 - u_1 - v_1^s)/(u_2 + v_2^s)}, \tag{17}$$

$$s_1 = u_1 + v_1^s, \quad s_2 = (1 - v)(1 - u_1 - v_1^s), \quad s_0 = v(1 - u_1 - v_1^s), \tag{18}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{1 + s_0/(u_3 + v_3^s) + s_2/(u_2 + v_2^s)},\ \theta_2 = \frac{(1-v)(1-s_1)\theta_1}{(u_2 + v_2^s)},\ \theta_0 = \frac{v(1-s_1)\theta_1}{(u_3 + v_3^s)}, \tag{19}$$

которые следуют из (3)-(5).

4. Численные эксперименты

Здесь приводятся результаты расчетов для одного примера в рамках условий теоремы, а также в случае наличия ограничений на управление.

Пусть имеются следующие исходные данные, приведенные в Табл. 1.

Табл. 1. Значения параметров для трехсекторной экономической модели

i	α_i	β_i	λ_i	$\overline{A}_i$	s_i^*	θ_i^*	k_i^*
0	0.46	0.39	0.05	6.19	0.2763	0.3944	966.4430
1	0.68	0.29	0.05	1.35	0.4476	0.2562	2410.1455
2	0.49	0.52	0.05	2.71	0.2761	0.3494	1090.1238

Пусть также задан вектор начальных состояний $y(t_0) = (-700, -300, 300)^T$, а матрицы R, Q_1, K_1 имеют следующий вид

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \; Q_1 = \begin{pmatrix} 16 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 8 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 8 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}, \; K_T = \begin{pmatrix} 0.2033 * 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0.1094 * 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0.1090 * 10^{-2} \end{pmatrix}.$$

На основе (1)-(7) и (8),(13),(14) находим вектор управления $u(t)$ и соответствующий вектор отклонений от состояния равновесия $y(t)$ (Рис. 1). Используя (17)-(19), определяем распределение трудовых $(\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t))$ и инвестиционных ресурсов $(s_1(t), s_2(t), s_3(t))$. Затем показываем (Рис. 2) изменения ресурсов, удовлетворяющие соотношениям (3)-(5).

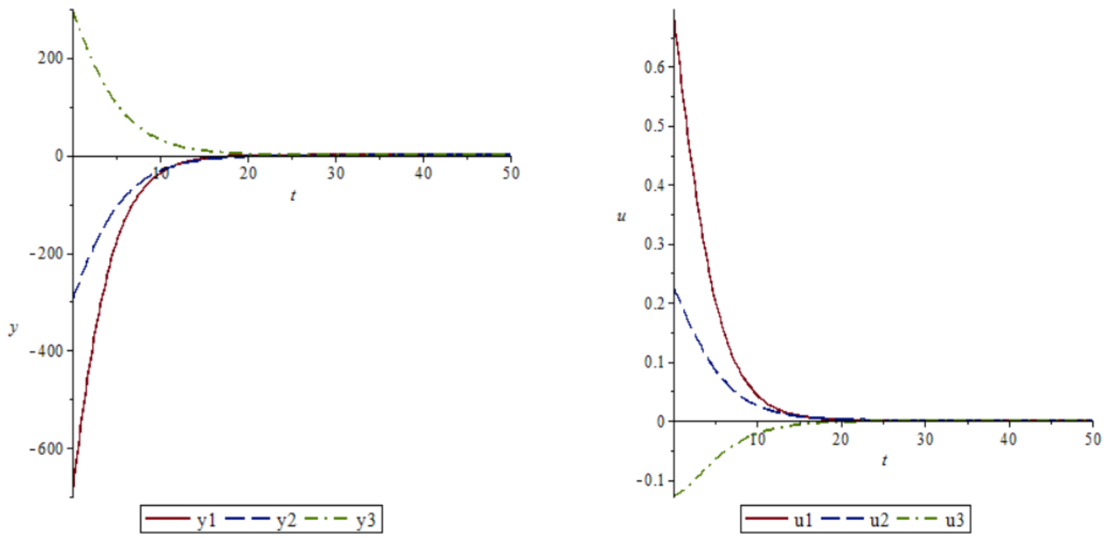

Рис. 1. Графики $y(t)$ и субоптимального управления $u(t)$ без ограничений на управление

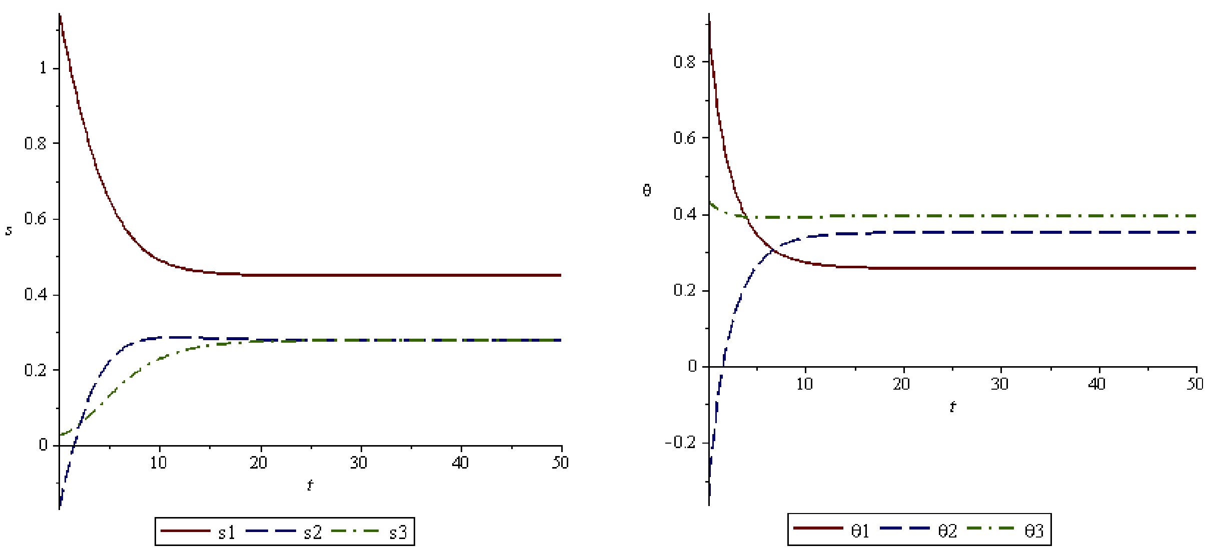

Рис.2. Графики распределения инвестиционных и трудовых ресурсов для балансовых соотношений (3)-(5) без ограничений на управление

Введем ограничения на управления: $-0.41 \le u_1 \le 0.4524$, $-0.41 \le u_2 \le 0.49$, $-0.41 \le u_3 \le 0.49$. Теперь графики $y(t)$, $u(t)$, естественно, изменяются (Рис. 3).

Из Рис. 3 видно, что координаты вектора управления $u_1(t)$ и $u_3(t)$ принимают значения частично на границе области U. На Рис. 4 показаны соответствующие распределения трудовых $(\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t))$ и инвестиционных ресурсов $(s_1(t), s_2(t), s_3(t))$, отвечающие полученному $u(t)$.

Сравнения графиков показывает, что учет ограничения на управление увеличивает адекватность модели: факт стабилизации в обоих случаях с помощью полученного управления присутствует, а распределения инвестиционных и трудовых ресурсов находятся в допустимой области. Также при учете ограничений на управление модель демонстрирует увеличение потребления при уменьшении затрат на фондовооруженность.

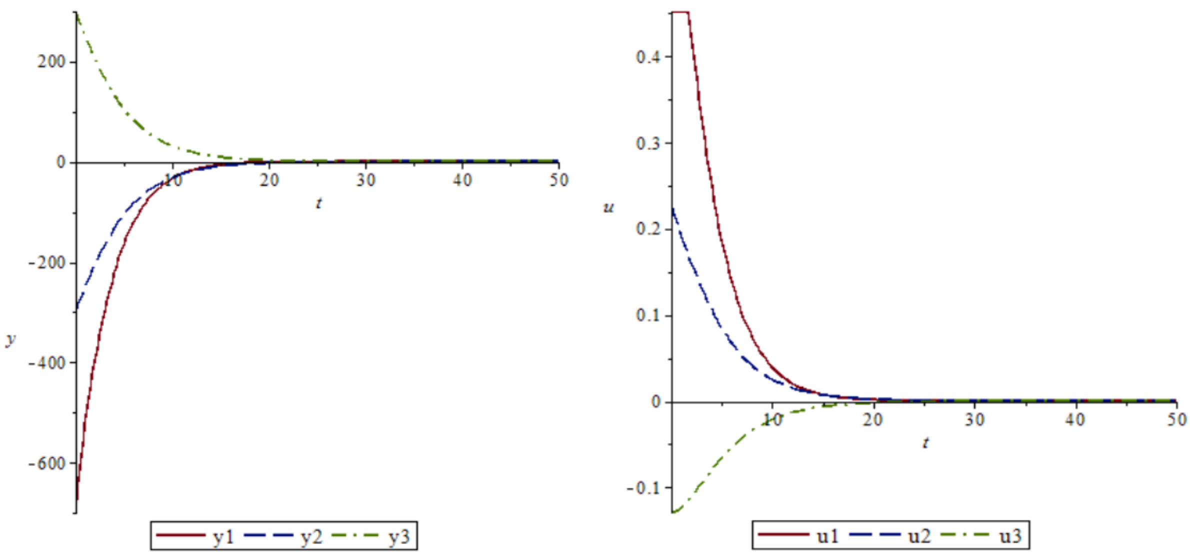

Рис. 3. Графики траекторий и оптимального управления с ограничениями на управления

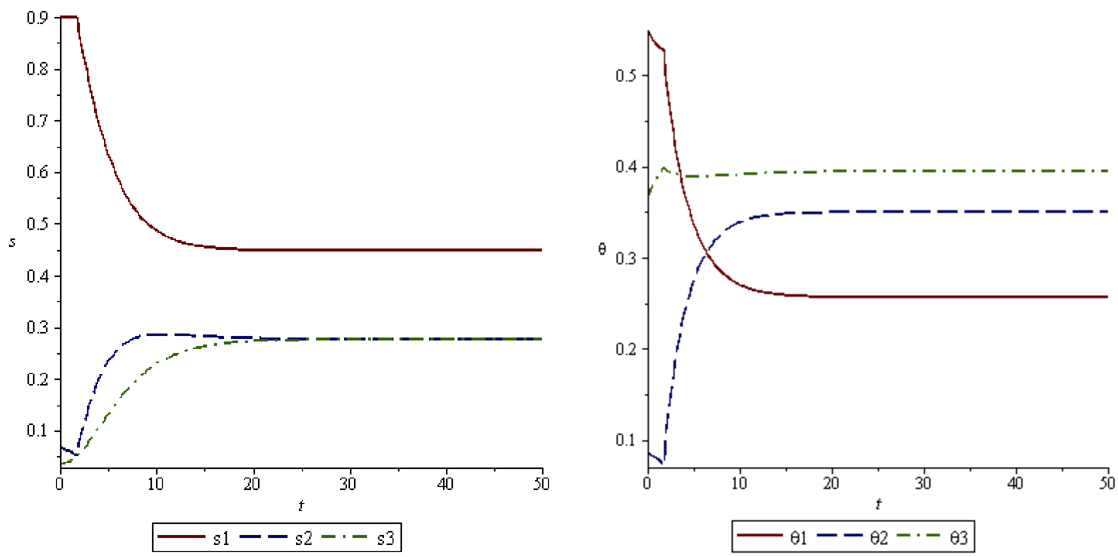

Рис. 4. Графики распределения инвестиционных и трудовых ресурсов для балансовых соотношений (3)-(5) с ограничениями на управление

Заключение

На примере математической макромодели трехсекторной экономической системы, описываемой нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с ограничениями типа равенств и неравенств на коэффициенты, построен стабилизационный инвестиционный регулятор для стабилизации экономической системы в окрестности равновесия. При этом модель представляет собой задачу регулирования для нелинейной системы формально линейной по состоянию и управлению и с коэффициентами, зависящими от состояния. Стабилизирующий регулятор для рассмотренной частной нелинейной системы строится на основе решения обратной задачи, которая заключается в нахождении коэффициентов весовых матриц, зависящих от состояния для квадратичного критерия качествами, приводящих к возможности построению регулятора с помощью алгоритма Калмана–Летова. С помощью второго метода Ляпунова установлена асимптотическая устойчивость замкнутой системы вдоль построенного регулятора. Выполнены вычислительные эксперименты, подтверждающие работоспособность алгоритма.

Литература

1. Гуриев С. М. , Поспелов И. Г. Модель общего равновесия экономики переходного периода // Матем. моделирование, 1994. №2 (6). С. 3–21.
2. Оленев Н. Н., Петров А. А., Поспелов И. Г. Регулирование экологических последствий экономического роста // Матем. моделирование. 1998. №8 (10). С.17–32.
3. Колемаев В.А. Экономико–математическое моделирование // М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. 295 с.
4. Aseev, S. M., Besov, K. O., Kryazhimskii, A.V. Infinite-horizon optimal control problems in economics. // Russian Math. Surveys. 2012. № 67(2). Pp. 195-253.
5. Mracek C.P., Cloutier J.R. Full envelope missile longitudinal autopilot design using the state-dependent Riccati equation method. // In: Proc. of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, New Orleans LA. Pp. 1697-1705.
6. Mracek, C.P. Cloutier J.R. Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent Riccati equation method // International Journal of Robust and Nonlinear Control, № 8. Pp. 401-433.
7. Афанасьев В.Н. Концепция гарантированного управления неопределенными объектами // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. № 1, С. 16-23.
8. Афанасьев В.Н., Орлов П.В. Субоптимальное управление нелинейным объектом, линеаризуемым обратной связью // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 3. С. 13-22.
9. Cimen T. State-dependent Riccati Equation (SDRE) control: A Survey // Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control. Seoul, Korea. (July 6-11. 2008): Pp. 3761-3775.
10. Афанасьев В.Н. Управление нелинейными объектами с параметрами, зависящими от состояния // Автоматика и телемеханика. 2011. № 4, С. 43-56.
11. Андрюхина В.Н., Афанасьев В.Н. Гарантирующее управление в задаче применения антивирусных препаратов и результаты математического моделирования // Проблемы управления. 2012. № 3, С. 41-48.
12. Афанасьев В.Н. Задача вывода и сопровождения нелинейного объекта по заданной траектории // Автоматика и телемеханика. 2015. № 1, С. 3-20.
13. Афанасьев А.П., Дзюба С.М., Емельянова И.И. Оптимальное управление с обратной связью одним классом нелинейных систем по квадратичному критерию // Вестник ТГУ. – 2015. № 20(5). С. 1024-1033.
14. Афанасьев В.Н. Алгоритмический метод построения управлений нелинейным неопределенным объектом // Проблемы управления. 2015. № 3, С. 12-19.
15. Колемаев В.А. Оптимальный сбалансированный рост открытой трехсекторной экономики // Прикладная эконометрика. 2008 № 3(11). С.15-42.
16. Мурзабеков З., Милош М., Тусупова К. Решение задачи поиска стационарного состояния в трехсекторной экономической модели кластера //Актуальніі проблеми економіики 2015. - №3(165). С. 443-452.
17. Murzabekov Z., Milosz M., Tussupova K. Modeling and optimization of the production cluster // Proceedings of 36th International Conference on Information Systems and Architecture and Technology – ISAT-2015 / Part II, Advances in Intelligent Systems and Computing. – Karpacz, 2016. Pp. 99–108.
18. Murzabekov Z., Milosz M., Tussupova K. The optimal control problem with fixed-end trajectories for a three-sector economic model of a cluster // Intelligent Information and Database Systems, ACIIDS 2018, Pp. 382–391
19. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985. 288 с.
20. Дмитриев М. Г., Макаров Д. А. Гладкий нелинейный регулятор в слабо нелинейной системе управления с коэффициентами, зависящими от состояния // Труды ИСА РАН. 2014. № 64(4). С. 53-58.
21. S. V. Emel'yanov, Yu. E. Danik, M. G. Dmitriev, D. A. Makarov. Stabilization of Nonlinear Discrete-Time Dynamic Control Systems with a Parameter and State-Dependent Coefficients //Doklady Mathematics. 2016. Vol. 93(1). Pp. 121–123. DOI: 10.1134/S1064562416010142.
22. Даник Ю.Э., Дмитриев М.Г., Макаров Д.А. Один алгоритм построения регуляторов для нелинейных систем с формальным малым параметром // Информационные технологии и вычислительные системы. 2015. №4. С. 35-44.
23. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003 614 с.

Дмитриев Михаил Геннадьевич. Институт системного анализа Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН. Главный научный сотрудник Количество печатных работ: свыше 250. Область научных интересов: асимптотические методы в теории оптимального управления, нелинейный синтез, моделирование социально – экономических систем. E-mail: mdmitriev@mail.ru

Мурзабеков Заинелхриет Нугманович. Казахский Национальный университет имени аль-Фараби. Профессор кафедры Искусственного интеллекта и Big data факультета информационных технологий. Количество печатных работ: свыше 140. Область научных интересов: теория оптимального управления, дискретная оптимизация, системный анализ и задачи математического программирования, синтез нелинейных систем, моделирование экономических систем. E-mail: murzabekov-zein@mail.ru

Макаров Дмитрий Александрович. Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия. Старший научный сотрудник. Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Россия. Старший научный сотрудник. Кандидат физико-математических наук. Количество печатных работ: 40. Область научных интересов: управление сложными динамическими системами, робастность, устойчивость, искусственный интеллект, экспертные системы. E-mail:makarov@isa.ru

Мирзахмедова Гулбану Абсаматовна. Казахский Национальный университет имени аль-Фараби. Докторант. Количество печатных работ: 17. Область научных интересов: теория оптимального управления, системный анализ и задачи математического программирования, теория оптимального управления, дискретная оптимизация, системный анализ и задачи математического программирования, синтез нелинейных систем, моделирование экономических систем. E-mail:gulbanu.myrzahmedova@mail.ru

Stabilization in the macroeconomic formally linear control system with state-dependent coefficients

M.G. Dmitriev[I], Z.N. Murzabekov[II],D.A. Makarov[I,III], G.A. Mirzakhmedova[II]

[I] Institute for Systems Analysis, Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
[II] Faculty of Information Technology, Al-Farabi Kazakh National University. Almaty, Kazakhstan
[III] Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudnyj, Russia.

Abstract. In the work on the example of the mathematical model of three-sector economic system the stabilization of the system in the vicinity of equilibrium is shown on the basis of the construction of investment management strategies in the form of feedback using an algorithm for solving a nonlinear control problem in which the differential connections are formally linear in control and state, with state-dependent coefficients.

Keywords: optimal control, three-sector economic cluster, Lagrange multiplier method, nonlinear system, quadratic functional, matrix Riccati equation.

DOI 10.14357/20718632190201

References

1. Guriyev S. M., Pospelov I. G. Model' obshchego ravnovesiya ekonomiki perekhodnogo perioda [Model of General Equilibrium for a Transitional Economy] // Matem. modelirovaniye [Matem. modeling]. 1994. №2 (6). 3–21.
2. Olenev N. N., Petrov A. A., Pospelov I. G. Regulirovaniye ekologicheskikh posledstviy ekonomicheskogo rosta [Regulation of the environmental consequences of economic growth] // Matem. modelirovaniye [Matem. modeling]. 1998. № 8 (10). 17–32.
3. Kolemayev V.A. Ekonomiko–matematicheskoye modelirovaniye [Economic and Mathematical Modeling] // Moscow: UNITI-DANA, 2005. 295.
4. Aseev, S.M., Besov, K.O., Kryazhimskii, A.V. Infinite-horizon control problems in economics // Russian Math. Surveys. 2012. № 67 (2). 195-253.
5. Mracek, C. P., Cloutier J. R. Full envelope missile longitudinal autopilot design using the state-dependent Riccati equation method. // In: Proc. of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, New Orleans LA, 1697-1705.
6. Mracek, C. P., Cloutier J. R. Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent Riccati equation method // International Journal of Robust and Nonlinear Control, № 8, 401-433.
7. Afanas'yev V.N. Kontseptsiya garantirovannogo upravleniya neopredelennymi ob"yektami [The concept of guaranteed management of uncertain objects] // Izvestiya RAN. Teoriya i

sistemy upravleniya [News of the Russian Academy of Sciences. Theory and control systems]. 2010. № 1, 16-23.
8. Afanas'yev V.N., Orlov P.V. Suboptimal'noye upravleniye nelineynym ob"yektom, linearizuyemym obratnoy svyaz'yu [Suboptimal control of a nonlinear object linearized by feedback] // RAN. Teoriya i sistemy upravleniya [News of the Russian Academy of Sciences. Theory and control systems]. 2011. - № 3. - pp. 13-22
9. Cimen T. State-dependent Riccati Equation (SDRE) control: A Survey // Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control. Seoul, Korea. (July 6-11. 2008): P.3761-3775.
10. Afanas'yev V.N. Upravleniye nelineynymi ob"yektami s parametrami, zavisyashchimi ot sostoyaniya [Control of nonlinear objects with state-dependent parameters] // Avtomatika i telemekhanika [Automation and Remote Control]. 2011. 4. 43-56.
11. Andryukhina V.N., Afanas'yev V.N. Garantiruyushcheye upravleniye v zadache primeneniya antivirusnykh preparatov I rezul'taty matematichesko gomodelirovaniya [Guaranteed control in the task of using antiviral drugs and the results of mathematical modeling] // Problemy upravleniya [Problems of Control]. 2012. 3. 41-48.
12. Afanas'yev V.N. Zadacha vyvoda I soprovozhdeniya nelineynogo ob"yekta po zadannoy trayektorii [The task of outputting and tracking a nonlinear object along a given trajectory] // Avtomatika i telemekhanika [Automation and Remote Control]. 2015. 1. 3-20.
13. Afanas'yev A.P., Dzyuba S.M., Yemel'yanova I.I. Optimal'noye upravleniye s obratnoy svyaz'yu odnim klassom nelineynykh system po kvadratichnomu kriteriyu [Optimal control with feedback by a single class of nonlinear systems by quadratic criterion] // Vestnik TGU [Vestnik TSU]. 2015. 20 (5). 1024-1033.
14. Afanas'yev V.N. Algoritmicheskiy metod postroyeniya upravleniy nelineynym neopredelennym ob"yektom [Algorithmic method for constructing controls of a nonlinear indefinite object] // Problemy upravleniya [Problems of Control]. 2015. 3. 12-19.
15. Kolemayev V.A. Optimal'nyy sbalansirovannyy rost otkrytoy trekhsektornoy ekonomiki [Optimal balanced growth of an open three-sector economy] // Prikladnaya ekonometrika [Applied Econometrics]. 2008. 3 (11). 15-42.
16. Murzabekov Z., Milosh M., Tusupova K. Resheniye zadachi poiska statsionarnogo sostoyaniya v trekhsektornoy ekonomicheskoy modeli klastera [Solution of steady state search problem in three-sector economic model of a cluster] // Aktual'níí problemi yekonomííki [Actual Problems of Economy]. 2015. 3(165). 443-452.
17. Murzabekov Z., Milosz M. and Tussupova K. Modeling and optimization of the production cluster // Proceedings of 36th International Conference on Information Systems and Architecture and Technology – ISAT-2015 / Part II, Advances in Intelligent Systems and Computing. – Karpacz, 2016. 99–108.
18. Murzabekov. Z., Milosz M. and Tussupova K. The optimal control problem with fixed-end trajectories for a three-sector economic model of a cluster. // Intelligent Information and Database Systems, ACIIDS 2018. 382–391.
19. GurmanV.I. Printsip rasshireniya v zadachakh upravleniya [The principle of expansion in management tasks]. M.: Nauka, 1985. 288.
20. Dmitriev M.G., Makarov D.A. Gladkiynelineynyy regulyator v slabo nelineynoy sisteme upravleniya s koeffitsiyentami, zavisyashchimi ot sostoyaniya [A smooth non-linear controller in a weakly non-linear control system with state-dependent coefficients] // Trudy ISA RAN [Proceedings of the ISA RAS]. 2014. 64 (4). 53-58.
21. S. V. Emel'yanov, Yu. E. Danik, M. G. Dmitriev, D. A. Makarov. Stabilization of Nonlinear Discrete-Time Dynamic Control Systems with a Parameter and State-Dependent Coefficients // Doklady Mathematics. 2016. Vol. 93(1). 121–123. DOI: 10.1134/S1064562416010142
22. Danik YU.E., Dmitriyev M.G., Makarov D.A. Odin algoritm postroyeniya regulyatorov dlya nelineynykh sistem s formal'nym malym parametrom [One algorithm for constructing regulators for nonlinear systems with a formal small parameter]// Informatsionnyye tekhnologii i vychislitel'nyye sistemy [Information technologies and computing systems]. 2015. №4. Pp. 35-44.
23. Afanas'yev V.N., Kolmanovskiy V.B., Nosov V.R. Matematicheskaya teoriya konstruirovaniya system upravleniya [Mathematical theory of designing control systems]. M.: Vysshaya shkola [M.: Higher School], 2003. 614 p.

Dmitriev M.G. Doctor of Sciences, Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, 44/2 Vavilova str., Moscow, 119333, Russia, e-mail: HYPERLINK "mailto:mdmitriev@mail.ru" mdmitriev@mail.ru

Murzabekov Z.N. Doctor of Sciences, professor of the Department of Artificial Intelligence and Big Data of the Faculty of Information Technology, Al-Farabi Kazakh National University, 71 al-Farabi Ave., Almaty, Republic of Kazakhstan, 050040, e-mail: murzabekov-zein@mail.ru

Makarov D.A. PhD, Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, 44/2 Vavilova str., Moscow, 119333, Russia; Moscow Institute of Physics and Technology, 9 Institutskiy per., Dolgoprudnyj, Russia, e-mail: makarov@isa.ru

Mirzakhmedova G.A. Al-Farabi Kazakh National University, 71 al-Farabi Ave., Almaty, Republic of Kazakhstan, 050040, e-mail: gulbanu.myrzahmedova@mail.ru