Д. А. Макаров, Построение управления и наблюдателя в слабо нелинейной задаче слежения с помощью дифференциальных матричных уравнений Риккати, *ИТиВС*, 2018, выпуск 4, 63–71

DOI: 10.14357/20718632180407

Построение управления и наблюдателя в слабо нелинейной задаче слежения с помощью дифференциальных матричных уравнений Риккати*

Д.А. Макаров [I,II]

[I] Общество с ограниченной ответственностью «Технологии системного анализа», г. Москва, Россия
[II] Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва, Россия

Аннотация. В работе для одного класса слабо нелинейных систем с зависящими от состояния коэффициентами рассматривается подход к построению нелинейного следящего управления на конечном интервале времени с помощью динамической обратной связи. Вместо неизмеряемых переменных используются их оценки, полученные с помощью наблюдателя состояния. Синтез управления и наблюдателя осуществляется на основе приближенного решения соответствующих дифференциальных матричных уравнений Риккати с помощью одной и той же численно-аналитической процедуры. Достоинством такого подхода является уменьшение вычислительной сложности. Проведенные численные эксперименты показали работоспособность и эффективность предложенного алгоритма управления.

Ключевые слова: задача слежения, нелинейное управление, наблюдатель состояния, дифференциальные матричные уравнения Риккати с зависящими от состояния коэффициентами.

DOI 10.14357/20718632180407

Введение

Начиная с работ [1, 2] начинаются активные исследования в области управления нелинейными системами, представимыми в виде формально линейных по состоянию и управлению систем, элементы матриц правых частей которых являются функциями состояния. Такие системы принадлежат к классу так называемых SDC (state dependent coefficients) систем. Если критерий качества квадратичный (в общем случае его матрицы также могут зависеть от состояния), то решение исходной нелинейной задачи оптимального управления может быть аппроксимировано на основе следующего подхода: функция Беллмана приближенно находится с помощью алгебраического матричного уравнения Риккати, совпадающего по форме с соответствующим алгебраическим уравнением Риккати из задачи Калмана-Летова. Однако в данном случае коэффициенты этого уравнения Риккати уже зависят от состояния. Используя его решение, строится обратная связь, совпадающая по форме с регулятором Калмана-Летова. Такие уравнение и подход получили названия SDRE (от State-Dependent Differential Riccati Equation) и SDRE техника соответственно. Эта техника позволяет получать нелинейный закон управления, обладающий некоторой субоптимальностью, для достаточно широкого круга практических задач (обзоры [3, 4]). Её основной практической трудностью является необходимость численного решения SDRE в процессе управления, что в условиях ограниченных вычислительных ресурсов может быть труднореализуемо.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-38-60198-мол_а_дк, № 17-07-00281-а).

В работах [5-7] был предложен новый подход, позволяющий приближенно решать SDRE с помощью численно-аналитической процедуры, применение которой существенно снижает вычислительную сложность алгоритма управления. В работе [8] этот подход был развит для задачи слежения за эталонной траекторией на конечном интервале времени. В отличие от аналогичных результатов (например, [9, 10]), его применение не требует выполнения ряда трудоемких вычислительных операций в процессе регулирования. В [11] результаты из [8] были перенесены на задачу слежения для переменных выхода, где на основе игрового подхода из [12] находится матрица коэффициентов усиления наблюдателя состояния полного порядка.

В данной работе, в отличие от [11], наблюдатель строится с помощью матричного дифференциального уравнения типа Риккати с зависящими от состояния коэффициентами (State-Dependent Differential Riccati Equation – SDDRE). Оно получено по аналогии с дискретным уравнением для расширенного фильтра Калмана. Видимо, впервые такой подход был предложен в [13]. Преимуществом SDDRE техники по сравнению с SDRE согласно [13] является, во-первых, уменьшение вычислительной сложности, поскольку интегрировать матричное дифференциальное уравнение на каждом шаге проще, чем решать соответствующее алгебраическое матричное уравнение, а, во-вторых, использование более слабых условий наблюдаемости системы.

В данной статье для синтеза управления и наблюдателя используется численно-аналитический алгоритм приближенного решения дифференциальных уравнений Риккати с зависящими от состояния коэффициентами, приведенный в работе [8], что дополнительно приводит к уменьшению вычислительных издержек.

1. Синтез управления

Рассмотрим управляемую слабо нелинейную систему вида

$$\begin{gathered}\dot{x} = A(x,\mu)x + B(x,\mu)u, \;\; y = Cx, \quad x(t_0) = x^0,\\ A(x,\mu) = A_0 + \mu A_1(x), B(x,\mu) = B_0 + \mu B_1(x),\\ x \in X \subset \mathbb{R}^n, y \in Y \subset \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^r, t \in [t_0, t_1], \;\; 0 < \mu \le \mu_0,\end{gathered} \tag{1}$$

где x, y и u – векторы состояния, выхода и управления соответственно, μ_0 – некоторое заданное достаточно малое положительное число, A_0, B_0 и C – известные постоянные матрицы, $A_1(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1(x) \in \mathbb{R}^{n\times r}$ – известные матрицы с достаточно гладкими и ограниченными по аргументу x элементами, X и Y – некоторые ограниченные множества, μ – известный постоянный параметр.

Пусть эталонное поведение системы (1) описывается решением дифференциального уравнения

$$\begin{gathered}\dot{x}_r = A_r(x_r,\mu)x_r, \;\; y_r = Cx_r, \quad x_r(t_0) = x_r^{\,0},\\ A_r(x_r,\mu) = A_{r,0} + \mu A_{r,1}(x_r), x_r \in X, y_r \in Y, t \in [t_0, t_1],\end{gathered}$$

где x_r и y_r – желаемые (эталонные) траектория системы и ее выход, $A_{r,0}$ – известная постоянная матрица, а $A_{r,1}(x_r)$ – известная матрица с достаточно гладкими и ограниченными по аргументу x_r элементами. Начальные состояния x^0 и x_r^0 в общем случае полагаются неизвестными.

Определим следующий функционал качества

$$\begin{gathered}I(u) = \frac{1}{2}e^T(t_1)Fe(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(e^T Q(y,y_r,\mu)e + u^T Ru\right)dt \to \min_u,\\ Q(y,y_r,\mu) = Q_0 + \mu Q_1(y,y_r), \quad e = y - y_r,\end{gathered} \tag{2}$$

где заданные симметрические матрицы $Q(y,y_r,\mu) \ge 0, Q_0 > 0, R > 0, \; F > 0$ при $y, y_r \in Y$, $0 < \mu \le \mu_0$. Здесь и далее знаками >0 (≥0) обозначается положительная определенность (полуопределенность) соответствующей матрицы. Необходимо найти такое непрерывное синтезирующее управление u, которое обеспечивает приближенное решение задачи (1)-(2).

Исходная задача (1)-(2) может быть представлена [14] в виде

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(\tilde{x},\mu)\tilde{x} + \tilde{B}(x,\mu)u, \ \ \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}^0,$$
$$\tilde{I}(u) = \frac{1}{2}\tilde{x}^T(t_1)\tilde{F}\tilde{x}(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(\tilde{x}^T\tilde{Q}(\tilde{y},\mu)\tilde{x} + u^T R u\right)dt \to \min_u, \tag{3}$$

где $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \tilde{y} = \begin{bmatrix} y \\ y_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m}$ – расширенные векторы состояния и выхода, $\tilde{A}(\tilde{x},\mu) = \begin{bmatrix} A(x,\mu) & 0 \\ 0 & A_r(x_r,\mu) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $\tilde{B}(x,\mu) = \begin{bmatrix} B(x,\mu) \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times r}$, $\tilde{Q}(\tilde{y},\mu) = \begin{bmatrix} C^T Q(\tilde{y},\mu)C & -C^T Q(\tilde{y},\mu)C \\ -C^T Q(\tilde{y},\mu)C & C^T Q(\tilde{y},\mu)C \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \geq 0$, $\tilde{F} = \begin{bmatrix} C^T FC & -C^T FC \\ -C^T FC & C^T FC \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \geq 0$, нулевые блоки в матрицах $\tilde{A}(\tilde{x},\mu)$ и $\tilde{B}(x,\mu)$ есть матрицы соответствующих размерностей.

Зададим представления

$$\tilde{A}(\tilde{x},\mu) = \tilde{A}_0 + \mu\tilde{A}_1(\tilde{x}), \tilde{B}(x,\mu) = \tilde{B}_0 + \mu\tilde{B}_1(x), \tilde{Q}(\tilde{y},\mu) = \tilde{Q}_0 + \mu\tilde{Q}_1(\tilde{y}),$$
$$\tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_{r,0} \end{bmatrix}, \tilde{A}_1(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} A_1(x) & 0 \\ 0 & A_{r,1}(x_r) \end{bmatrix}, \tilde{B}_0 = \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{B}_1(x) = \begin{bmatrix} B_1(x) \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\tilde{Q}_0 = \begin{bmatrix} C^T Q_0 C & -C^T Q_0 C \\ -C^T Q_0 C & C^T Q_0 C \end{bmatrix}, \tilde{Q}_1(\tilde{y}) = \begin{bmatrix} C^T Q_1(\tilde{y})C & -C^T Q_1(\tilde{y})C \\ -C^T Q_1(\tilde{y})C & C^T Q_1(\tilde{y})C \end{bmatrix}.$$

Введем следующие условия:

I. Траектории замкнутой системы (1) существуют, единственны и принадлежат X на $[t_0, t_1]$ для любого непрерывного управления $u(t)$, где X – некоторое ограниченное множество пространства состояний; элементы матриц $\tilde{A}_1(\tilde{x}), \tilde{B}_1(x)$ ограниченные, непрерывные и достаточно гладкие при $x, x_r \in X$; $\mu \in (0, \mu_0]$.

II. Тройка матриц $\{\tilde{A}_0, \tilde{B}_0, H_P\}$, где $H_P^T H_P = \tilde{Q}_0$, стабилизируема и наблюдаема.

III. Матрицы системы $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1(\tilde{x}), \tilde{B}_0, \tilde{B}_1(x)$ и симметрические матрицы критерия $R > 0,\ Q_0 \geq 0,\ Q_1(y) \geq 0,\ F > 0$, а также $\mu_0 > 0$ таковы, что $\tilde{P}_0 + \mu\tilde{P}_1(\tilde{x},t) > 0$ при $x, x_r \in X, t \in [t_0, t_1), \mu \in (0,\ \mu_0]$.

В работе [8] при условиях I-III для системы с полностью измеряемым вектором состояния (т.е. C – единичная матрица соответствующей размерности) предложено управление, приближенно решающее задачу (3), в виде

$$u(\tilde{x},\mu,t) = -K(\tilde{x},\mu,t)\tilde{x} = u_0(\tilde{x}) + \mu u_1(\tilde{x},t,\mu), \tag{4}$$

где $K(\tilde{x},\mu,t) = R^{-1}(\tilde{B}_0 + \mu\tilde{B}_1(\tilde{x}))^T(\tilde{P}_0 + \mu\tilde{P}_1(\tilde{x},t))$, $u_0(\tilde{x}) = -R^{-1}\tilde{B}_0{}^T\tilde{P}_0\tilde{x}$ – линейная часть, а нелинейную коррекцию формирует $\mu u_1(\tilde{x},t,\mu) = -\mu R^{-1}\left(\tilde{B}_1{}^T(\tilde{x})\tilde{P}_0 + (\tilde{B}_0 + \mu\tilde{B}_1(\tilde{x}))^T\tilde{P}_1(\tilde{x},\mu,t)\right)\tilde{x}$. Согласно [8], численно-аналитический алгоритм построения приближенного управления (4) в задаче нелинейного слежения состоит из следующих шагов.

1. Вычисляется $\tilde{P}_0$ как положительно определенное решение уравнения

$$\tilde{P}_0\tilde{A}_0+\tilde{A}_0^T\tilde{P}_0-\tilde{P}_0\tilde{B}_0R_0^{-1}\tilde{B}_0^T\tilde{P}_0+\tilde{Q}_0=0.$$

2. Находится $\tilde{P}_1(\tilde{x},\mu,t)$ с помощью

$$\tilde{P}_1(\tilde{x},\mu,t)=e^{\tilde{A}_{Pcl,0}^T(t_1-t)}M_Pe^{\tilde{A}_{Pcl,0}(t_1-t)}+\int_0^\infty e^{\tilde{A}_{Pcl,0}^T\sigma}D_P(\tilde{x})e^{\tilde{A}_{Pcl,0}\sigma}d\sigma, \tag{5}$$

где $D_P(\tilde{x})=\tilde{P}_0\left(\tilde{A}_1-\tilde{B}_1R^{-1}\tilde{B}_0^T\tilde{P}_0\right)+\left(\tilde{A}_1-\tilde{B}_1R^{-1}\tilde{B}_0^T\tilde{P}_0\right)^T\tilde{P}_0+\tilde{Q}_1$, $\tilde{A}_{Pcl,0}=\tilde{A}_0-\tilde{B}_0R^{-1}\tilde{B}_0^T\tilde{P}_0$, а матрица M_P находится как

$$M_P=\frac{1}{\mu}(\tilde{F}-\tilde{P}_0)-\int_0^\infty e^{\tilde{A}_{cl,0}^T\sigma}D_P\left(\tilde{x}(t_1)\right)\Big|_{x(t_1)=x(t)}e^{\tilde{A}_{cl,0}\sigma}d\sigma.$$

3. Определяется итоговое управление (4).

Поскольку траектория системы в конечный момент времени является неизвестной, в предложенном алгоритме матрица $D_P\left(\tilde{x}(t_1)\right)$ вычисляется в предположении, что $\tilde{x}(t)$ и $\tilde{x}(t_1)$ близки друг к другу вблизи t_1, т.е. вместо $\tilde{x}(t_1)$ в каждый текущий момент времени t используется $\tilde{x}(t)$. В случае, если эталонная траектория известна заранее, то можно, предполагая близость $x(t_1)$ к $x_r(t_1)$, вычислить D_P, используя $x(t_1)=x_r(t_1)$. «Жесткость» этих двух предположений ослабляется тем, что первый член в (5) в силу $\operatorname{Re}\lambda\left(\tilde{A}_{Pcl,0}\right)<0$ существенен лишь в окрестности t_1.

Для применения приведенного алгоритма необходимо построить соответствующий наблюдатель состояния системы в (3).

2. Синтез наблюдателя

Запишем уравнения наблюдателя состояния полного порядка [15]

$$\dot{\tilde{\chi}}=\tilde{A}(\tilde{\chi},\mu)\tilde{\chi}+\tilde{B}(\chi,\mu)u+\Gamma(\tilde{\chi},\mu,t)\tilde{C}(\tilde{x}-\tilde{\chi}),\quad \tilde{\chi}(0)=\tilde{\chi}^0=\begin{bmatrix}\chi^0\\ \chi_r^0\end{bmatrix}, \tag{6}$$

где $\tilde{\chi}=\begin{bmatrix}\chi\\ \chi_r\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2n}$ – вектор оценки состояния $\tilde{x}$, т.е. χ – оценка x, а χ_r – оценка x_r, $\chi,\chi_r\in X$, $\tilde{C}=\begin{bmatrix}C & 0\\ 0 & C\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2m\times 2n}$, а $\Gamma\in\mathbb{R}^{2n\times 2m}$ – подлежащая определению матрица коэффициентов наблюдателя. Отметим, что если известно начальное состояние системы, задающей эталонное поведение, то выбор $\chi_r^0=x_r^0$ обеспечивает $\chi_r=x_r$ при $t\in\left[t_0,t_1\right]$.

Для нахождения Γ применим подход из [13], согласно которому

$$\Gamma(\tilde{\chi},\mu,t)=N(\tilde{\chi},\mu,t)\tilde{C}^TR_{\tilde{\chi}}^{-1}, \tag{7}$$

где $N(\tilde{\chi},\mu)$ есть решение уравнения

$$\begin{gathered}\dot{N}(\tilde{\chi},\mu,t)=\tilde{A}(\tilde{\chi},\mu)N(\tilde{\chi},\mu,t)+N(\tilde{\chi},\mu,t)\tilde{A}^T(\tilde{\chi},\mu)-\\ N(\tilde{\chi},\mu,t)\tilde{C}^TR_{\tilde{\chi}}^{-1}\tilde{C}N(\tilde{\chi},\mu,t)+Q_{\tilde{\chi}}(\tilde{\chi},\mu),\quad N(\tilde{\chi}(t_0),\mu,t_0)=N^0>0.\end{gathered} \tag{8}$$

В (8) положительно полуопределённая при $\chi, \chi_r \in X, t \in [t_0, t_1), \mu \in (0, \mu_0]$ весовая матрица $Q_{\tilde{\chi}}(\tilde{\chi}, \mu) \geq 0$ и постоянные положительно определённые весовая матрица $R_{\tilde{\chi}}$ и начальное состояние N^0 определяют параметры процедуры синтеза наблюдателя.

Используя условия из работы [16], можно показать, что нулевое положение ошибки оценивания $e_x = \tilde{x} - \tilde{\chi}$ наблюдателя (6)-(8) является, по крайней мере, локально экспоненциально устойчивым в области $\chi, \chi_r \in X$ и $t \in [t_0, t_1), \mu \in (0, \mu_0]$ при достаточно малом μ_0.

Для упрощения вычислительной сложности решения (8), применим тот же подход из [8], что в данной работе использовался для синтеза управления. Представим $N(\tilde{\chi}, \mu, t),\ Q_{\tilde{\chi}}(\tilde{\chi}, \mu)$ в виде $N(\tilde{\chi}, \mu, t) = N_0 + \mu N_1(\tilde{\chi}, \mu, t),\ Q_{\tilde{\chi}}(\tilde{\chi}, \mu) = Q_{\tilde{\chi},0} + \mu Q_{\tilde{\chi},1}(\tilde{\chi})$, где $Q_{\tilde{\chi},0} \geq 0,\ Q_{\tilde{\chi},1}(\tilde{\chi}, \mu) \geq 0$ при $\chi, \chi_r \in X, t \in [t_0, t_1), \mu \in (0, \mu_0]$. Тогда при подстановке этих выражений в (8) имеем

$$\begin{aligned} &\tilde{A}_0 N_0 + N_0 \tilde{A}_0^T - N_0 \tilde{C}^T R_{\tilde{\chi}}^{-1} \tilde{C} N_0 + Q_{\tilde{\chi},0} + \\ &\mu\left[-\dot{N}_1(\tilde{\chi}, \mu, t) + \tilde{A}_{Ncl,0} N_1(\tilde{\chi}, \mu, t) + N_1(\tilde{\chi}, \mu, t) \tilde{A}_{Ncl,0}^T + D_N(\tilde{\chi})\right] + \\ &\mu^2\left[\tilde{A}_1(\tilde{x}) N_1(\tilde{\chi}, \mu, t) + N_1(\tilde{\chi}, \mu, t) \tilde{A}_1^T(\tilde{x}) - N_1(\tilde{\chi}, \mu, t) \tilde{C}^T R_{\tilde{\chi}}^{-1} \tilde{C} N_1(\tilde{\chi}, \mu, t)\right] = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где $D_N(\tilde{\chi}) = \tilde{A}_1(\tilde{\chi}) N_0 + N_0 \tilde{A}_1^T(\tilde{\chi}) + Q_{\tilde{\chi},1}(\tilde{\chi}),\ \tilde{A}_{Ncl,0} = \tilde{A}_0 - N_0 \tilde{C}^T R_{\tilde{\chi}}^{-1} \tilde{C}$.

Далее введем условия из [8].

IV. Траектории замкнутой системы (6) на $[t_0, t_1]$ существуют, единственны и $\chi, \chi_r \in X$ для любых непрерывных $u(t)$ и $\Gamma(\tilde{\chi}, \mu, t)\tilde{C}$ при $x, x_r, \chi, \chi_r \in X, \mu \in (0, \mu_0]$; элементы матриц $\tilde{A}_1(\tilde{\chi}), \tilde{B}_1(\chi)$ ограниченные, непрерывные и достаточно гладкие при $\chi, \chi_r \in X$.

V. Тройка матриц $\left\{\tilde{A}_0^T, \tilde{C}^T, H_N\right\}$, где $H_N^T H_N = Q_{\tilde{\chi},0}$, стабилизируема и наблюдаема.

VI. Матрицы системы $\tilde{A}_0^T, \tilde{A}_1^T(\tilde{\chi}), \tilde{C}^T$ и симметрические матрицы критерия $R_{\tilde{\chi}} > 0,\ Q_{\tilde{\chi},0} \geq 0,\ Q_{\tilde{\chi},1}(\tilde{\chi}) \geq 0,\ N^0 > 0$, а также $\mu_0 > 0$ таковы, что $N_0 + \mu N_1(\tilde{\chi}, \mu, t) > 0$ при $\chi, \chi_r \in X, t \in [t_0, t_1), \mu \in (0,\ \mu_0]$.

Тогда, пренебрегая членом порядка μ^2 в (9) и применяя подход из [8], при условиях IV-VI имеем следующую численно-аналитическую процедуру синтеза наблюдателя, аналогичную той, что выше используется для построения обратной связи.

1. Вычисляется N_0 как положительно определенное решение матричного уравнения

$$\tilde{A}_0 N_0 + N_0 \tilde{A}_0^T - N_0 \tilde{C}^T R_{\tilde{\chi}}^{-1} \tilde{C} N_0 + Q_{\tilde{\chi},0} = 0.$$

2. Находится $N_1(\tilde{\chi}, \mu, t)$ с помощью

$$N_1(\tilde{\chi}, \mu, t) = e^{\tilde{A}_{Ncl,0}(t_1 - t)} M_N e^{\tilde{A}_{Ncl,0}^T(t_1 - t)} + \int_0^\infty e^{\tilde{A}_{Ncl,0}\sigma} D_N(\tilde{\chi}) e^{\tilde{A}_{Ncl,0}^T\sigma} d\sigma,$$

где

$$M_N = \frac{1}{\mu}(N^0 - N_0) - \int_0^\infty e^{\tilde{A}_{Ncl,0}\sigma} D_N\left(\tilde{\chi}(t_1)\right)\Big|_{\tilde{\chi}(t_1) = \tilde{\chi}(t)} e^{\tilde{A}_{Ncl,0}^T\sigma} d\sigma.$$

3. Определяется $\Gamma(\tilde{\chi}, \mu, t)$ с помощью (7), считая $N(\tilde{\chi}, \mu, t) = N_0 + \mu N_1(\tilde{\chi}, \mu, t)$.

4. Находится наблюдатель (6), задавая начальное состояние $\tilde{\chi}^0$ произвольным образом.

Теперь после нахождения $\Gamma(\tilde{\chi},\mu,t)$ с помощью предложенного алгоритма можно, используя вместо неизвестного состояния $\tilde{x}$ его оценку $\tilde{\chi}$, применить управление (4) для приближенного решения исходной задачи (1)-(2).

Замечание 1. Предложенный алгоритм приводит к отысканию приближенного решения уравнения (8). Однако, при достаточно малом μ_0 и выполнении условий из [16] можно надеяться на хорошую эффективность такого подхода. Его основным преимуществом являются аналитические представления для матриц $\tilde{P}_1(\tilde{x},\mu,t)$ и $N_1(\tilde{\chi},\mu,t)$, что снижает вычислительную сложность алгоритма управления. Подчеркнём, что постоянные матрицы $\tilde{P}_0$ и N_0 могут быть вычислены заранее.

Замечание 2. Условия III и VI всегда выполняются при достаточно малом μ_0, если выполнены соответственно условия I,II и IV,V [11].

3. Численные эксперименты

Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + \left(1+\mu x_2^2 \sin\left(2x_1\right)\right)x_2 + \left(1+\mu\cos\left(x_1\right)\right)u, \quad y = x_1, \tag{10}$$

которая может быть представлена в виде (1) с помощью следующих матриц

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_2{}^2 \sin\left(2x_1\right) \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\left(x_1\right) \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Зададим систему, определяющую желаемое для (10) поведение, и критерий (2) с помощью

$$A_{r,0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A_{r,1}(x_r) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, x_{r,1}(0) = 0.7, x_{r,2}(0) = 1,$$

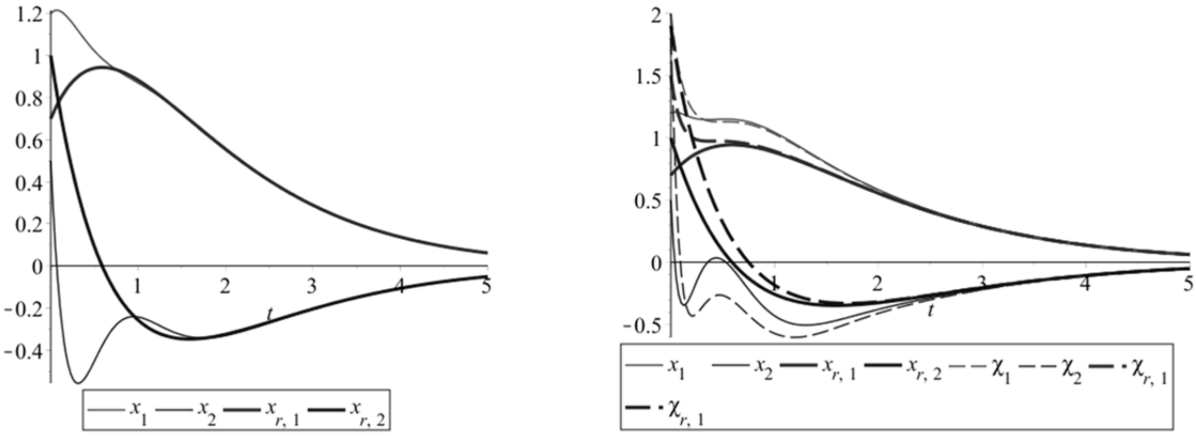
$$F = 200, Q_0 = 200, Q_1(y, y_r) = 300, R = 1, t_0 = 0, t_1 = 5,$$

где $x_{r,1}$ и $x_{r,2}$ являются эталонными координатами для x_1 и x_2 соответственно. Определим весовые матрицы наблюдателя как

$$Q_{\tilde{\chi},0} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}, \ Q_{\tilde{\chi},1}(\tilde{\chi}) = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \ R_{\tilde{\chi}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ N^0 = \tilde{F}.$$

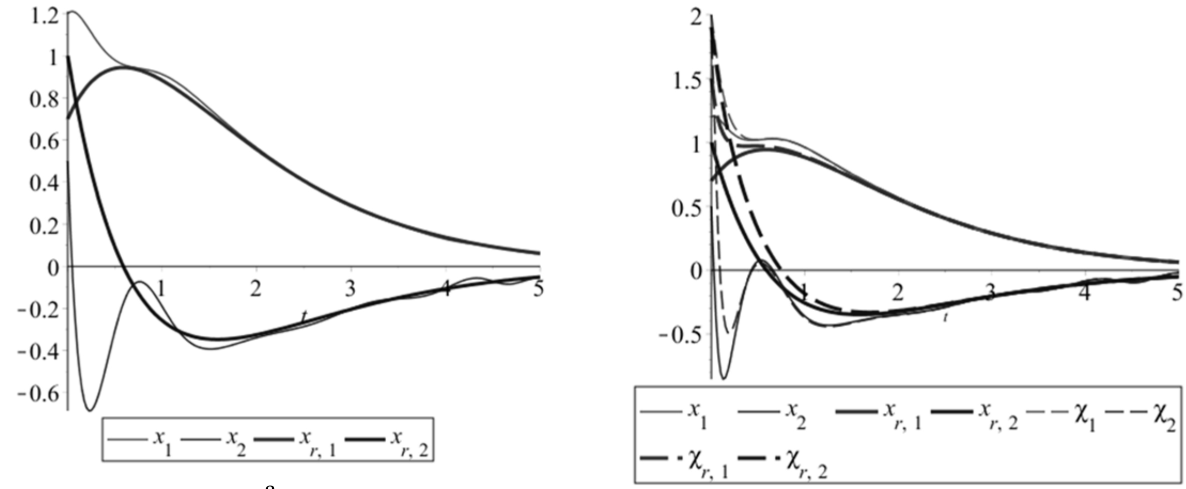
На Рис. 1. представлены результаты численного моделирования системы (10), замкнутой регулятором (4), при условии полного измерения расширенного вектора состояния $\tilde{x}$ (случай а) и при условии измерения только координат x_1 и $x_{r,1}$ (случай б). На Рис. 1. и далее эталонные траектории обозначены жирными сплошными линиями, а оценки состояний реальной и эталонной систем обозначены пунктирными тонкими и пунктирными жирными линиями соответственно. Расчеты проводились при $\mu = 0.3$ и следующих начальных условий $x_1(0) = 1.2, x_2(0) = 1$.

При увеличении значения параметра μ условия III и VI перестают выполняться вдоль траектории замкнутой системы, однако работоспособность предложенного подхода сохраняется. На Рис. 2 представлены результаты эксперимента с $\mu = 0.8$ с теми же начальными условиями и весовыми матрицами.



а б

Рис. 1. Графики замкнутой системы для полного и частичного измерения вектора состояния при μ = 0.3



а б

Рис. 2. Графики замкнутой системы для полного и частичного измерения вектора состояния при μ = 0.8

Заключение

В данной работе рассмотрено построение управления и наблюдателя для слабо нелинейных систем, представимых в псевдолинейном виде, при котором коэффициенты матриц системы зависят от вектора состояния. Это построение выполняется с помощью соответствующих дифференциальных матричных уравнений Риккати, коэффициенты которых также являются функциями состояния. В процессе синтеза уравнения Риккати приближенно сводятся к дифференциальным уравнениям Ляпунова. Достоинство такого подхода является получение аналитических выражений, которые существенно снижают вычислительные затраты. Проведенные численные эксперименты продемонстрировали работоспособность и эффективность предложенного алгоритма.

Литература

1. Mracek C.P., Cloutier J.R. Full envelope missile longitudinal autopilot design using the state-dependent Riccati equation method // Proceedings of the AIAA “Guidance, Navigation and Control” Conference, New Orleans LA, 1997. Pp. 1697-1705.
2. Mracek C.P., Cloutier J.R. Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent Riccati equation method // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 1998. Vol. 8. Pp. 401-433.

3. Çimen T. Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. Vol. 35. №. 4. Pp. 1025-1047.
4. Cloutier J.R. State-Dependent Riccati Equation Techniques: An Overview // Proc. American Control Conference. 1997. Vol. 2. Pp. 932-936.
5. Дмитриев М.Г., Макаров Д.А.. Гладкий нелинейный регулятор в слабо нелинейной системе управления с коэффициентами, зависящими от состояния // Труды Института системного анализа РАН. Т. 64. №4. 2014. С. 53-58.
6. Даник Ю.Э., Дмитриев М.Г., Макаров Д.А. Один алгоритм построения регуляторов для нелинейных систем с формальным малым параметром // Информационные технологии и вычислительные системы. 2015. №4. С. 35-44.
7. Dmitriev M.G., Makarov D.A. The near optimality of the stabilizing control in a weakly nonlinear system with state-dependent coefficients // AIP Conference Proceedings. Kazakhstan, Almaty, September 7–10, 2016. Vol. 1759, 20016 (2016). Pp. 020016-1 – 020016-6. DOI: 10.1063/1.4959630
8. Макаров Д.А. Подход к построению нелинейного управления в задаче слежения с коэффициентами, зависящими от состояния Часть I. Алгоритм // Информационные технологии и вычислительные системы. 2017. №3. С. 10-19.
9. Khamis A., Naidu D. Nonlinear optimal tracking using finite horizon state dependent Riccati equation (SDRE) // Proceedings of the 4th International Conference on Circuits, Systems, Control, Signals (CSCS '13). 2013. Pp. 37-42.
10. Khamis A., Naidu D.S., Kamel A.M. Nonlinear Finite-Horizon Regulation and Tracking for Systems with Incomplete State Information Using Differential State Dependent Riccati Equation // International Journal of Aerospace Engineering. Vol. 2014 (2014). 12 pages. http://dx.doi.org/10.1155/2014/178628.
11. Макаров Д.А. Синтез управления и наблюдателя для слабо нелинейных систем на основе техники псевдолинеаризации // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. Т. 24, № 6. С. 802–810. DOI: 10.18255/1818-1015-2017-6-802-810
12. Афанасьев В.Н. Динамические системы управления с неполной информацией: Алгоритмическое конструирование. М.: URSS, 2007. 216 с. ISBN 978-5-484-00787-5.
13. Haessig D. A., Friedland B. State dependent differential Riccati equation for nonlinear estimation and control // IFAC Proceedings Volumes. 2002. Vol. 35. №. 1. Pp. 405-410.
14. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и тт.; 2-е изд., перераб. и доп. Т 4. Теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 2004. 744с.; ил.
15. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Изд-во «Мир», 1977. 650 с.
16. Beikzadeh H., Taghirad H. D. Exponential nonlinear observer based on the differential state-dependent Riccati equation // International Journal of Automation and Computing. 2012. Vol. 9(4). Pp. 358-368.

Макаров Дмитрий Александрович. Общества с ограниченной ответственностью «Технологии системного анализа», г. Москва, Россия. Ведущий научный сотрудник. Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва, Россия. Старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук. Количество печатных работ: 40. Область научных интересов: управление сложными динамическими системами, робастность, устойчивость, искусственный интеллект, экспертные системы. e-mail: makarov@isa.ru

The design of observer based tracking control for weakly nonlinear systems using differential matrix equations Riccati

D. A. Makarov[I,II]

[I] Limited Liability Company «Technologies for systems analysis», Moscow, Russia
[II] Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

The paper deals with finite-horizon tracking control problem for a class of weakly nonlinear systems with state-dependent coefficients. Synthesis of control and the state observer is carried out on the basis of an approximate solution of the corresponding differential matrix Riccati equations using the same numerical-analytical procedure. The advantage of this approach is the reduction in computational complexity. Numerical experiments showed the efficiency of the proposed control algorithm.
Keywords: tracking problem, nonlinear control, state observer, matrix differential state-dependent Riccati equation.

DOI 10.14357/20718632180407

References

1. Mracek, C.P., and J. R. Cloutier, 1997. Full envelope missile longitudinal autopilot design using the state-dependent Riccati equation method. The AIAA “Guidance, Navigation and Control” Conference. New Orleans LA. 1697-1705.
2. Mracek, C.P., and J. R. Cloutier. 1998. Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent Riccati equation method. International Journal of Robust and Nonlinear Control. 8: 401-433.

3. Çimen, T. 2012. Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 35(4): 1025-1047.
4. Cloutier, J.R. 1997. State-Dependent Riccati Equation Techniques: An Overview // American Control Conference. 2: 932-936.
5. Dmitriev, M.G., and D.A. Makarov. 2014. Gladkij nelinejnyj regulyator v slabo nelinejnoj sisteme upravleniya s koehfficientami, zavisyashchimi ot sostoyaniya [Smooth nonlinear controller in a weakly nonlinear control system with state-dependent coefficients]. Trudy Instituta sistemnogo analiza RAN [Proceedings of the Institute for System Analysis of RAS]. 64(4): 53-58.
6. Danik, Yu.E., M.G. Dmitriev, and D.A. Makarov. 2015. Odin algoritm postroeniya regulyatorov dlya nelinejnyh sistem s formal'nym malym parametrom [An algorithm for constructing regulators for nonlinear systems with the formal small parameter]. Informacionnye tekhnologii i vychislitel'nye sistemy [Information technology and computer systems]. 4: 35-44.
7. Dmitriev, M.G., and D.A. Makarov. 2016. The near optimality of the stabilizing control in a weakly nonlinear system with state-dependent coefficients. AIP Conference. 1759: 020016-1 – 020016-6. DOI: 10.1063/1.4959630
8. Makarov, D.A. 2017. Podhod k postroeniyu nelinejnogo upravleniya v zadache slezheniya s koehfficientami, zavisyashchimi ot sostoyaniya CHast' I. Algoritm [A nonlinear approach to a feedback control design for a tracking state-dependent problem. I. An algorithm]. Informacionnye tekhnologii i vychislitel'nye sistemy [Information technology and computer systems]. 3: 10-19.
9. Khamis A., and D. Naidu. 2013. Nonlinear optimal tracking using finite horizon state dependent Riccati equation (SDRE). The 4th International Conference on Circuits, Systems, Control, Signals (CSCS). Valencia. 37-42.
10. Khamis A., D.S. Naidu, and A.M. Kamel. 2014. Nonlinear Finite-Horizon Regulation and Tracking for Systems with Incomplete State Information Using Differential State Dependent Riccati Equation. International Journal of Aerospace Engineering. 2014(2014). http://dx.doi.org/10.1155/2014/178628. Available at: https://www.hindawi.com/journals/ijae/2014/178628/abs/ (accessed September 26, 2018).
11. Makarov, D.A. 2017. Sintez upravleniya i nablyudatelya dlya slabo nelinejnyh sistem na osnove tekhniki psevdolinearizacii [Synthesis of Control and State Observer for Weakly Nonlinear Systems Based on the Pseudo-Linearization Technique]. Modelirovanie i analiz informacionnyh system [Modeling and Analysis of Information Systems]. 24(6): 802–810. DOI: 10.18255/1818-1015-2017-6-802-810.
12. Afanas'ev, V.N. 2007. Dinamicheskie sistemy upravleniya s nepolnoj informaciej: Algoritmicheskoe konstruirovanie [Dynamic control systems with incomplete information: Algorithmic design]. Moscow: URSS. 216 p. ISBN 978-5-484-00787-5.
13. Haessig, D. A., and B. Friedland. 2002. State dependent differential Riccati equation for nonlinear estimation and control. IFAC Proceedings Volumes. 35(1): 405-410.
14. Pupkov, K.A., and N.D. Egupov. 2004. Metody klassicheskoj i sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravleniya: Uchebnik v 5-i tt.; 2-e izd., pererab. i dop. T 4. Teoriya optimizacii sistem avtomaticheskogo upravleniya [Methods of classical and modern theory of automatic control: A textbook in 5 volumes; 2-nd ed., revised and enlarged. Volume 4. Theory of optimization of automatic control systems]. Moscow: Publishing house MSTU. Bauman. 744 p.
15. Kvakernaak, H., and R. Sivan. 1977. Linejnye optimal'nye sistemy upravleniya [Linear optimal control systems]. Moscow: "Mir". 650 p.
16. Beikzadeh, H., and H. D. Taghirad. 2012. Exponential nonlinear observer based on the differential state-dependent Riccati equation. International Journal of Automation and Computing. 9(4): 358-368.

Makarov Dmitry Alexandrovich. PhD, Limited Liability Company «Technologies for systems analysis», 9 pr-t 60-letiya Oktyabrya, Moscow, 117312, Russia. Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, 44/2 Vavilova str., Moscow, 119333, Russia, e-mail: makarov@isa.ru