Д. А. Макаров, Подход к построению нелинейного управления в задаче слежения с коэффициентами, зависящими от состояния. Часть II. Численные эксперименты, *ИТиВС*, 2017, выпуск 3, 20–33

Подход к построению нелинейного управления в задаче слежения с коэффициентами, зависящими от состояния[1]

Часть II. Численные эксперименты

Д.А. Макаров

Аннотация. В работе с помощью численного моделирования для слабонелинейных управляемых систем исследуется нелинейная обратная связь в задаче слежения за эталонной траекторией на конечном интервале времени, построенная с использованием матричных дифференциальных уравнений Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния. Полученные результаты численных экспериментов сравниваются с результатами вдоль соответствующих линейных управлений.

Ключевые слова: задача слежения, нелинейное управление, уравнения Риккати с зависящими от состояния коэффициентами, численное моделирование.

Введение

На данный момент существует множество подходов к построению нелинейного синтеза. Один из них связан с так называемой техникой SDRE (State Dependent Riccati Equation) или техникой использования матричных уравнений Риккати для систем с коэффициентами, зависящими от состояния (обзоры [1, 2]). Суть этой техники заключается в представлении исходной нелинейной системы в псевдолинейном виде, в котором матрицы при векторе состояния и управления являются функциями от состояния. Вводя квадратичный критерий, можно для получения нелинейных законов синтеза использовать схему решения линейно-квадратичных задач, где коэффициенты усиления обратной связи находятся с помощью решения матричных уравнений Риккати.

В последние годы использование SDRE техники распространилось и на задачи слежения. В силу зависимости коэффициентов системы управления от переменных состояния её прямое применение затруднено необходимостью знания траектории системы в будущие моменты времени. Для преодоления этого был разработан подход [3, 4], который в дальнейшем использовался в других работах (например, [5-7]). Его недостатком является необходимость выполнения трудоемких с вычислительной точки зрения операций для выработки управления.

Для упрощения расчетов в работах [8-10] был предложен подход учета слабых нелинейностей модели управляемой системы для построения коррекции соответствующих линейных управлений с помощью техники SDRE. В [11] на основании этого подхода разработан алгоритм решения нелинейных непрерывных задач слежения некоторого класса с аддитивной линейной частью. В ста-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-38-60198).

тье приводятся результаты численных экспериментов и исследуется качество работы полученного нелинейного управления относительно соответствующего линейного управления.

1. Постановка задачи и алгоритм

Итак, рассматривается управляемая нелинейная система вида

$$\begin{gathered}\dot{x} = A(x,\mu)x + B(x,\mu)u,\ x(t_0) = x^0,\\ A(x,\mu) = A_0 + \mu A_1(x),\ B(x,\mu) = B_0 + \mu B_1(x),\\ x \in X \subset \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^r,\ t \in [t_0, t_1],\ 0 < \mu \le \mu_0,\end{gathered} \tag{1.1}$$

где x и u – векторы состояния и управления соответственно, μ_0 – некоторое заданное достаточно малое положительное число, A_0 и B_0 – известные постоянные матрицы, $A_1(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1(x) \in \mathbb{R}^{n\times r}$ – известные матрицы с достаточно гладкими и ограниченными по аргументу x элементами, X – некоторое ограниченное множество пространства состояний такое, что для любого непрерывного управления $u(t)$, траектории замкнутой системы (1.1) существуют, единственны и принадлежат X на $[t_0, t_1]$.

Пусть определен также функционал качества

$$\begin{gathered}I(u) = \frac{1}{2}e^T(t_1)\mu F e(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(e^T Q(x,x_r,\mu)e + u^T R u\right)dt \to \min_u,\\ Q(x,x_r,\mu) = Q_0 + \mu Q_1(x,x_r),\qquad e = x - x_r,\end{gathered} \tag{1.2}$$

где заданные симметрические матрицы $Q(x,x_r,\mu) \ge 0,\ Q_0 > 0, R > 0,\ F > 0$ при $x, x_r \in X$, $0 < \mu \le \mu_0$, x_r – заданная (эталонная) траектория системы (1.1). Здесь и далее знаками >0 (≥0) обозначается положительная определенность (полуопределенность) соответсвующей матрицы. Весовая матрица F имеет множитель μ для упрощения записи последующих выкладок. Необходимо найти такое непрерывное управление $u(x, \mu, t)$, которое обеспечивает приближенное решение задачи (1.1)-(1.2).

Пусть эталонная траектория для системы (1.1) описывается решением дифференциального уравнения

$$\dot{x}_r = A_r(x_r,\mu)x_r,\ A_r(x_r,\mu) = A_{r,0} + \mu A_{r,1}(x_r),\ x_r(t_0) = x_r^{\,0},\ x_r \in X \subset \mathbb{R}^n,\ t \in [t_0, t_1],$$

где $A_{r,0}$ – известная постоянная матрицы, а $A_{r,1}(x_r)$ – известная матрица с достаточно гладкими и ограниченными по аргументу x_r элементами. Тогда исходная задача (1.1)-(1.2) может быть представлена [12] в виде

$$\begin{gathered}\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(\tilde{x},\mu)\tilde{x} + \tilde{B}(x,\mu)u,\qquad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}^0,\\ \tilde{I}(u) = \frac{1}{2}\tilde{x}^T(t_1)\mu\tilde{F}\tilde{x}(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(\tilde{x}^T\tilde{Q}(\tilde{x},\mu)\tilde{x} + u^T R u\right)dt \to \min_u,\end{gathered} \tag{1.3}$$

где $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$ – расширенный вектор состояния, $\tilde{A}(\tilde{x},\mu) = \begin{bmatrix} A(x,\mu) & 0 \\ 0 & A_r(x_r,\mu) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$,

$\tilde{B}(x,\mu) = \begin{bmatrix} B(x,\mu) \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times r}$, $\tilde{Q}(\tilde{x},\mu) = \begin{bmatrix} Q(\tilde{x},\mu) & -Q(\tilde{x},\mu) \\ -Q(\tilde{x},\mu) & Q(\tilde{x},\mu) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \ge 0$, $\tilde{F} = \begin{bmatrix} F & -F \\ -F & F \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \ge 0$,

нулевые блоки в матрицах $\tilde{A}(\tilde{x},\mu)$ и $\tilde{B}(x,\mu)$ есть матрицы соответствующих размерностей.

Зададим представления

$$\tilde{A}(\tilde{x},\mu)=\tilde{A}_0+\mu\tilde{A}_1(\tilde{x}),\tilde{B}(x,\mu)=\tilde{B}_0+\mu\tilde{B}_1(x),\tilde{Q}(\tilde{x},\mu)=\tilde{Q}_0+\mu\tilde{Q}_1(\tilde{x})$$

$$\tilde{A}_0=\begin{bmatrix}A_0 & 0\\ 0 & A_{r,0}\end{bmatrix},\tilde{A}_1(\tilde{x})=\begin{bmatrix}A_1(x) & 0\\ 0 & A_{r,1}(x_r)\end{bmatrix},\tilde{B}_0=\begin{bmatrix}B_0\\ 0\end{bmatrix},\tilde{B}_1(x)=\begin{bmatrix}B_1(x)\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\tilde{Q}_0=\begin{bmatrix}Q_0 & -Q_0\\ -Q_0 & Q_0\end{bmatrix},\tilde{Q}_1(\tilde{x})=\begin{bmatrix}Q_1(\tilde{x}) & -Q_1(\tilde{x})\\ -Q_1(\tilde{x}) & Q_1(\tilde{x})\end{bmatrix}$$

Введем следующие условия:

I. Траектории замкнутой системы (1.1) существуют, единственны и принадлежат X на $[t_0,t_1]$ для любого непрерывного управления $u(t)$, где X – некоторое ограниченное множество пространства состояний; элементы матриц $\tilde{A}_1(\tilde{x}),\tilde{B}_1(x)$ ограниченные, непрерывные и достаточно гладкие при $x,x_r\in X$; $\mu\in(0,\mu_0]$.

II. Тройка матриц $\{\tilde{A}_0,\tilde{B}_0,H_0\}$, где $H_0^TH_0=\tilde{Q}_0$, стабилизируема и наблюдаема.

III. Матрицы системы $\tilde{A}_0,\tilde{A}_1(\tilde{x}),\tilde{B}_0,\tilde{B}_1(x)$ и симметрические матрицы критерия $R>0,\ Q_0\ge 0,\ Q_1(x)\ge 0,\ F>0$, а также $\mu_0>0$ таковы, что $\tilde{P}_0+\mu\tilde{P}_1(\tilde{x},t)>0$ при $x,x_r\in X,\ t\in[t_0,t_1],\ \mu\in(0,\ \mu_0]$.

В работе [11] предложено управление, приближенно решающее задачу (1.3), в виде

$$u(\tilde{x},\mu,t)=u_0(\tilde{x})+\mu u_1(\tilde{x},t,\mu), \tag{1.4}$$

где $u_0(\tilde{x})=-R^{-1}\tilde{B}_0^T\tilde{P}_0\tilde{x}$ – линейная часть, а нелинейную коррекцию формирует $\mu u_1(\tilde{x},t,\mu)=-\mu R^{-1}\left(\tilde{B}_1^T(\tilde{x})\tilde{P}_0+(\tilde{B}_0+\mu\tilde{B}_1(\tilde{x}))^T\tilde{P}_1(\tilde{x},t)\right)\tilde{x}$. Согласно [11] при условиях I-III имеем следующий численно-аналитический алгоритм построения приближенного управления в задаче нелинейного слежения.

1. Находим $u_0(\tilde{x})$ как $u_0(\tilde{x})=-R^{-1}\tilde{B}_0^T\tilde{P}_0\tilde{x}$, где $\tilde{P}_0$ – положительно определенное решение уравнения $\tilde{P}_0\tilde{A}_0+\tilde{A}_0^T\tilde{P}_0-\tilde{P}_0\tilde{B}_0R_0^{-1}\tilde{B}_0^T\tilde{P}_0+\tilde{Q}_0=0$.

2. Воспользовавшись одной из двух стратегий, находим $\tilde{P}_1(\tilde{x},t)$ с помощью

$$\tilde{P}_1(\tilde{x},t)=e^{\tilde{A}_{cl,0}^T(t_1-t)}Ne^{\tilde{A}_{cl,0}(t_1-t)}+\int\limits_0^\infty e^{\tilde{A}_{cl,0}^T\sigma}C(\tilde{x})e^{\tilde{A}_{cl,0}\sigma}d\sigma, \tag{1.5}$$

$$N=\tilde{F}-\int\limits_0^\infty e^{\tilde{A}_{cl,0}^T\sigma}C\left(\tilde{x}(t_1)\right)e^{\tilde{A}_{cl,0}\sigma}d\sigma, C(\tilde{x})=\tilde{P}_0\left(\tilde{A}_1-S_{10}\tilde{P}_0\right)+\left(\tilde{A}_1-S_{10}\tilde{P}_0\right)^T\tilde{P}_0+\tilde{Q}_1,$$

$$A_{cl,0}=\tilde{A}_0-S_0\tilde{P}_0,\quad S_0=\tilde{B}_0R^{-1}\tilde{B}_0^T,\quad S_{10}(x)=\tilde{B}_1R^{-1}\tilde{B}_0^T.$$

3. Определяем итоговое управление (1.4).

Отметим, что в численных экспериментах ниже используется вторая стратегия из [11], по которой вместо $C\left(\tilde{x}(t_1)\right)$ в (1.5) используется $C(\tilde{x}(t_1))\big|_{x(t_1)=x(t)}$.

2. Численные эксперименты

2.1. Скалярные задачи

Рассмотрим задачу слежения для системы $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = x(t) + \mu x^3(t) + u,$ и эталонной траектории $x_r(t) = 2\mathrm{e}^{-t}$, которая является решением следующего ОДУ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_r(t) = -x_r(t), \quad x_r(0) = 2.$

Функционал качества (1.2) зададим с помощью $F = 1, Q_0 = 6, Q_1 = 0, R = 1, t_0 = 0, t_1 = 3$. Исходные управляемую систему и систему для эталонной траектории запишем в квазилинейной форме как

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = A(x,\mu)x + B(x,\mu)u,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_r = A_r(x_r,\mu)x_r,$$
$$A(x,\mu) = (1+\mu x^2),\ B(x,\mu) = 1,\ A_r(x_r,\mu) = -1.$$

Далее необходимо представить матрицы системы в виде (1.1). Очевидно, что матрица $A(x, \mu)$, которая является подматрицей $\tilde{A}(x,\mu)$, уже имеет нужное нам представление $A(x, \mu) = A_0 + \mu A_1(x)$. Однако, далее применим более общий подход, справедливый для случаев, когда выделение $\tilde{A}_0$ и $\tilde{A}_1(\tilde{x})$ не столь очевидно. В качестве $\tilde{A}_0$ выберем некоторую постоянную матрицу $\tilde{A}_{lin}$, тогда $\tilde{A}_1(\tilde{x})$ определяется как $\tilde{A}_1(x,\mu) = \frac{1}{\mu}\left(\tilde{A}(x,\mu) - \tilde{A}_{lin}\right)$. Выбор $\tilde{A}_{lin}$ не однозначен и от него зависит выполнение условий II-III, а также эффективность построенного управления. С точки зрения практики возможны следующие рекомендации. В качестве $\tilde{A}_{lin}$ можно выбирать:

– матрицу $\tilde{A}(x,\mu)$, вычисленную в начальный момент времени: $\tilde{A}_{lin} = \tilde{A}(\tilde{x},\mu)\big|_{\tilde{x}=\tilde{x}_{lin}}$, $\tilde{x}_{lin} = \begin{bmatrix} x^0 & x_r^{\,0}\end{bmatrix}^T$;

– матрицу $\tilde{A}(x,\mu)$, вычисленную в некоторой точке эталонной траектории: $\tilde{A}_{lin} = \tilde{A}(\tilde{x},\mu)\big|_{\tilde{x}=\tilde{x}_{lin}}$, $\tilde{x}_{lin} = \begin{bmatrix} x_r(t_{lin}) & x_r(t_{lin})\end{bmatrix}^T$, $t_{lin} \in [t_0, t_1]$;

– произвольную постоянную матрицу, обеспечивающую выполнение условий II-III.

Этот же прием в общем случае предлагается использовать и для представления матриц $\tilde{B}(x,\mu), \tilde{Q}(\tilde{x},\mu)$.

В данном примере определим $\tilde{A}_{lin} = \tilde{A}(\tilde{x},\mu)\big|_{\tilde{x}=\tilde{x}_{lin}}$, $\tilde{x}_{lin} = \begin{bmatrix} x_r(t_1) & x_r(t_1)\end{bmatrix}^T$. Тогда матрицы в задаче (1.3) для рассматриваемой системы определяются следующим образом

$$\tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} 1+4\mu\mathrm{e}^{-2t_1} & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}, \tilde{B}_0 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \tilde{Q}_0 = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 6\end{bmatrix}, \tilde{A}_1(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} x^2(t) - 4\mathrm{e}^{-2t_1} & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}, \tilde{B}_1(x) = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \tilde{Q}_1 = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Применение изложенного выше алгоритма при μ=0.2 приводит к следующим матрицам, формирующим коэффициенты усиления, и управлению (1.4)

$$\tilde{P}_0 = \begin{bmatrix} 3.65 & -1.65 \\ -1.65 & 1.65\end{bmatrix}, \mu\tilde{P}_1(\tilde{x},t) = \begin{bmatrix} p_1(x,t) & p_2(x,t) \\ p_2(x,t) & p_3(x,t)\end{bmatrix}, u(\tilde{x},\mu,t) = \begin{bmatrix}\text{-}3.65 & 1.65\end{bmatrix}\tilde{x} - \begin{bmatrix} p_1(x,t) & p_2(x,t) \\ p_2(x,t) & p_3(x,t)\end{bmatrix}\tilde{x}.$$

$$p_1 = \left(1.00 - 0.28x^2\right)e^{5.29(t-t_1)} + 3.65 + 0.28x^2 - 2.73\cdot 10^{-3},$$
$$p_2 = \left(0.28x^2 - 1.00\right)e^{5.29(t-t_1)} + \left(2.41\cdot 10^{-3} - 0.06x^2\right)e^{3.65(t-t_1)} + 0.03x^2 - 3.39\cdot 10^{-4},$$
$$p_3 = \left(1.00 - 0.28x^2\right)e^{5.29(t-t_1)} + \left(-4.82\cdot 10^{-3} + 0.62x^2\right)e^{3.65(t-t_1)} + \left(3.96\cdot 10^{-3} - 0.40x^2\right)e^{2.00(t-t_1)} - 5,57\cdot 10^{-4} + 0.06x^2.$$

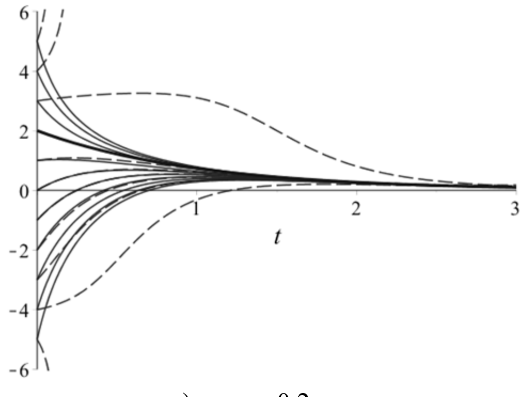
Для анализа эффективности полученного управления найдем линейное управление u_{lin} с помощью хорошо известного алгоритма построения линейного сервомеханизма [12]. В качестве матриц модели и критерия возьмем определённые выше постоянные матрицы A_0, B_0, Q_0, R и F. Тогда u_{lin} является оптимальным в задаче

$$\frac{d}{dt}x = A_0x + B_0u,\ \ x(t_0) = x^0, \quad e = x - x_r,$$
$$I(u) = \frac{1}{2}e^T(t_1)\mu Fe(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(e^TQ_0e + u^TRu\right)dt \to \min_u$$

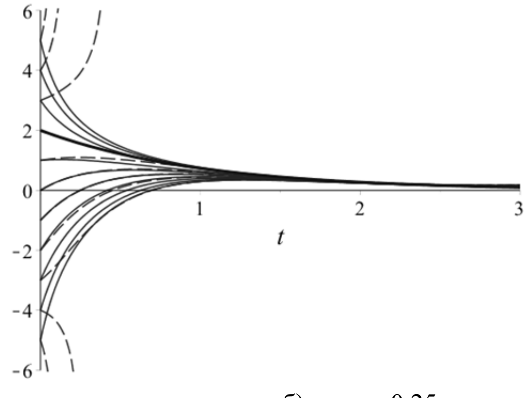
и находится как $u_{lin} = -R_0^{-1}B_0^T\left(P(t)x + q(t)\right)$, где матраца $P(t)$ и вектор $q(t)$ определяются из уравнений

$$\frac{dP(t)}{dt} = -P(t)A_0 - A_0^TP(t) + P(t)B_0R_0^{-1}B_0^TP(t) - Q_0 = 0, \quad P(t_1) = \mu F,$$
$$\frac{dq(t)}{dt} = \left(P(t)B_0R_0^{-1}B_0^T - A_0^T\right)q(t) + Q_0x_r(t), \quad q(t) = -\mu Fx_r(t_1).$$

На Рис.1 для $\mu = 0.2$ и $\mu = 0.25$, а также различных начальных условий, показаны переходные процессы рассматриваемой нелинейной системы, замкнутой построенными управлениями u (сплошные тонкие линии) и u_{lin} (пунктирные тонкие лини). Жирной непрерывной линей здесь и далее на рисунках обозначается эталонная траектория x_r. Как видно, во всех рассмотренных случаях системы с нелинейным управлением u успешно решили задачу слежения, тогда как системы с линейным u_{lin} при некоторых значениях начальных условий ($x(0) \geq 4$ и при $x(0) \leq -5$, если $\mu = 0.2$, и $x(0) \geq 3$ и при $x(0) \leq -4$, если $\mu = 0.25$) теряли устойчивость. Выбор матрицы $\tilde{Q}_1$ в виде нулевой позволяет сравнивать по одному и тому же критерию найденные нелинейное и линейное управления. В Табл. 1 приведены значения отношения критериев $I(u)$ и $I(u_{lin})$ и значения квадратов ошибок в терминальных точках, определяемых как $e^2(u, x(t_1)) = (x(t_1) - x_r(t_1))^2$. Здесь и далее $NS(s, \ldots)$ означает неустойчивость замкнутых систем вдоль управлений $s, \ldots$.



а) при μ=0.2



б) при μ=0.25

Рис. 1. Траектории систем с u и u_{lin}

Табл. 1.

$x(0)$	μ = 0.2			μ = 0.25		
	$I(u)/I(u_{lin})$	$e^2(u,x(t_1))$	$e^2(u_{lin},x(t_1))$	$I(u)/I(u_{lin})$	$e^2(u,x(t_1))$	$e^2(u_{lin},x(t_1))$
5	$NS(u_{lin})$	$1{,}15*10^{-9}$	$NS(u_{lin})$	$NS(u_{lin})$	$3{,}21*10^{-8}$	$NS(u_{lin})$
4	$NS(u_{lin})$	$1{,}57*10^{-8}$	$NS(u_{lin})$	$NS(u_{lin})$	$6{,}38*10^{-8}$	$NS(u_{lin})$
3	0.19	$6{,}00*10^{-8}$	$2{,}48*10^{-2}$	$NS(u_{lin})$	$1{,}24*10^{-7}$	$NS(u_{lin})$
1	0.97	$3{,}52*10^{-7}$	$5{,}81*10^{-3}$	0.95	$4{,}39*10^{-7}$	$5{,}89*10^{-3}$
0	1.00	$6{,}80*10^{-7}$	$5{,}63*10^{-3}$	1.00	$7{,}75*10^{-7}$	$5{,}68*10^{-3}$
-1	1.00	$1{,}17*10^{-6}$	$5{,}49*10^{-3}$	1.00	$1{,}28*10^{-6}$	$5{,}53*10^{-3}$
-2	1.00	$1{,}81*10^{-6}$	$5{,}35*10^{-3}$	0.99	$1{,}92*10^{-6}$	$5{,}37*10^{-3}$
-3	0.95	$2{,}55*10^{-6}$	$5{,}15*10^{-3}$	0.90	$2{,}65*10^{-6}$	$5{,}13*10^{-3}$
-4	0.57	$3{,}31*10^{-6}$	$4{,}24*10^{-3}$	$NS(u_{lin})$	$3{,}37*10^{-6}$	$NS(u_{lin})$
-5	$NS(u_{lin})$	$4{,}02*10^{-6}$	$NS(u_{lin})$	$NS(u_{lin})$	$4{,}02*10^{-6}$	$NS(u_{lin})$

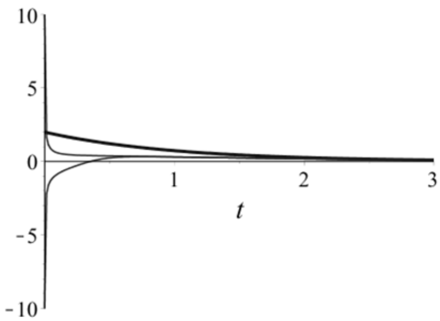
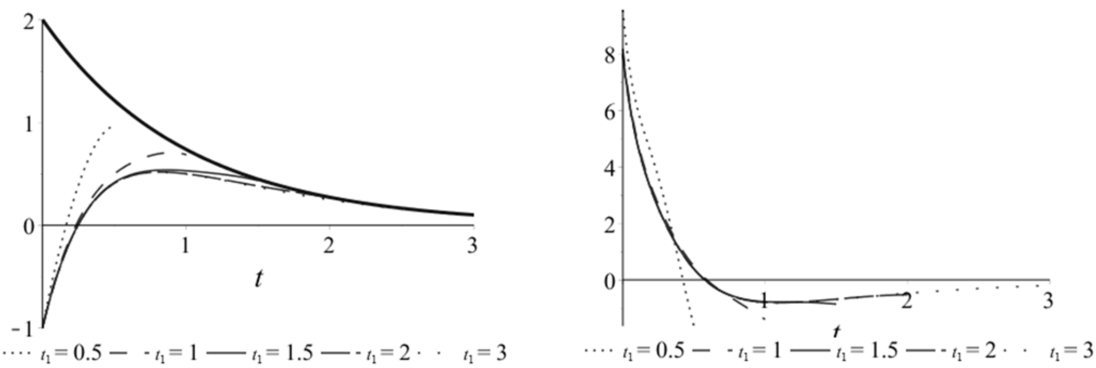


Рис. 2. Траектории с u при μ=20

Итак, в данном примере построенное нелинейное управление обладает большей областью устойчивости по начальным значениям. В худших случаях оно демонстрирует примерно такую же эффективность, как и линейное, тогда как в лучших случаях выигрыш по критерию достигает 5 раз. Во всех экспериментах квадрат ошибки слежения $e^2(u)$ как минимум на 3 порядка меньше, чем $e^2(u_{lin})$. Как видно, даже незначительное увеличение μ приводит к существенному сужению области допустимых начальных условий для u_{lin}. Тогда как u в данной задаче обеспечивает значительный запас устойчивости как по начальным условиям, так и по μ (Рис. 2, где в обоих случаях e^2 имеет порядок 10^{-4}).

Исследуем влияние горизонта регулирования на характер переходных процессов и управления при $\mu = 1$ и $F = 10$. На Рис. 3 представлены результаты численного моделирования для различных значений t_1. Для всех рассмотренных случаев управление u демонстрирует приемлемое качество работы. С точки зрения ошибки в конечный момент времени наихудшим оказался эксперимент с $t_1 = 0.5$. Очевидно, что в этом случае необходимо повышение весовых коэффициентов F и Q_0.



а) Траектории б) Управление

Рис. 3. Результаты моделирования для различных t_1

Как можно видеть на Рис. 3, с ростом t_1 управляющие сигналы становятся близки друг к другу. Это объясняется тем, что первое слагаемое в (1.5), отвечающее за ошибку в конечный момент времени, не оказывает существенного влияния, кроме некоторой окрестности терминальной точки. Таким образом, при большом горизонте регулирования матрица $\tilde{P}_1(x,t)$, которая есть нелинейная коррекция решения $\tilde{P}_0$ матричного алгебраического уравнения Риккати, соответствует установившемуся решению некоторой нестационарной задачи на полуоси. Такой характер соответствия имеется и в нестационарной линейно-квадратичной задаче оптимального управления на конечном интервале, где решение матричного дифференциального уравнения Риккати стремится [13] к установившемуся решению того же дифференциального уравнения в пределе на $[0,\infty)$.

Отметим, что во всех рассмотренных выше случаях условия I-III алгоритма выполняются. Проверка III осуществлялась вдоль траекторий замкнутой системы. Как можно заметить, условие III всегда выполняется при достаточно малом μ, поскольку $\tilde{P}_0 > 0$, а $\tilde{P}_1(\tilde{x},t)$ симметрична. В нашем примере коэффициенты матрицы $\tilde{P}_1(\tilde{x},t)$ не меняют своего знака в зависимости от $\tilde{x}$, что существенно облегчает проверку и обеспечение выполнения данного условия. Теперь рассмотрим более сложный пример, когда управляемая система описывается моделью $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = x(t) + \mu x^2(t) + u.$

Представим ее в квазилинейной форме как

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = A(x,\mu)x + B(x,\mu)u,\ \ A(x,\mu) = (1+\mu x),\, B(x,\mu) = 1.$$

Выбор матриц $\tilde{A}_0, \tilde{B}_0$ осуществим описанным выше способом. Критерий оптимизации остался тем же. Применение изложенного выше алгоритма приводит к синтезу следующего нелинейного управления при $\mu = 0.2$:

$$u = \begin{bmatrix} -3.67 & 1.64 \end{bmatrix}\tilde{x} + \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}\tilde{x},$$

$$k_1 = (0.276x - 1.03)\mathrm{e}^{5.31(t-t_1)} - 0.276x + 0.03,$$

$$k_2 = (0.310 - 0.02)\mathrm{e}^{3.65(t-t_1)} + (1.02x - 0.276x)\mathrm{e}^{5.31(t-t_1)} - 0.034x.$$

Как видно, знаки коэффициентов усиления обратной связи теперь зависят от x. При фиксированных матрицах F, Q_0 и R_0 условие III не выполняется, если x имеет достаточно малое отрицательное значение. На Рис. 4 представлены переходные процессы системы для различных значений μ, и соответствующие им сигналы управления.

а) Траектории б) Управление

Рис. 4.

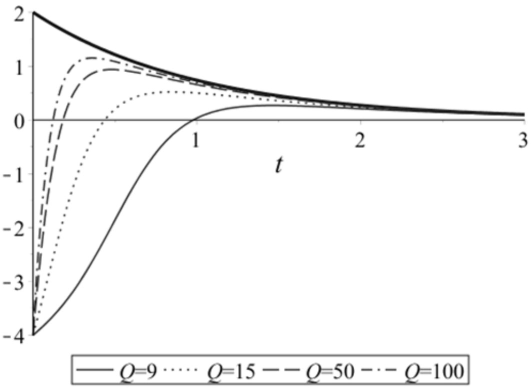


Рис. 5. Траектории для различных Q_0 при μ = 2.25

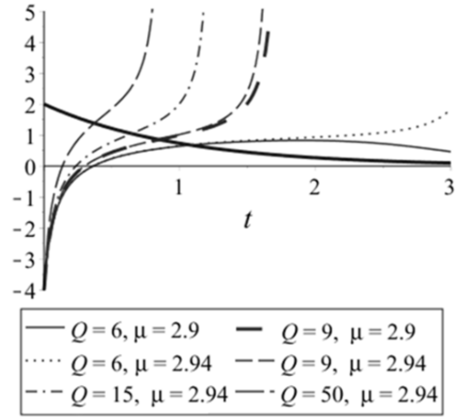


Рис. 6. Траектории с u_{lin} для различных Q_0 и μ

Как и предполагалось, с увеличением значения параметра μ качество управления ухудшается. При $\mu > 0.23$ в начальные моменты времени условие III не выполняется, а при $\mu > 2.24$ система теряет устойчивость. Однако, увеличение Q_0 приводит к появлению свойства устойчивости замкнутой системы. Кроме того, удается достичь монотонного улучшения качества переходного процесса (Рис. 5). Интересным является тот факт, что замкнутая система с линейным управлением u_{lin} теряет устойчивость при несколько большем значении параметра μ (кривая для $Q = 6$, $\mu = 2.94$ на Рис. 6). Однако, в отличие от случая с нелинейным управлением, увеличение Q_0 не приводит к появлению устойчивости. Более того, повышение Q_0 уменьшает запас устойчивости системы с u_{lin}. Так при $Q_0 = 9$ траектории системы уходят в бесконечность даже для μ, с которым ранее задача успешно решалась (кривая для $Q = 9$, $\mu = 2.9$ на Рис. 6).

В Табл. 2 приведены результаты численных экспериментов для рассматриваемой системы. Вновь траектории вдоль u оказались устойчивыми во всех случаях, тогда как переходные процессы с u_{lin} теряли устойчивость при $\mu = 1$ и $x(0) > 1$. Заметим, что условие III не выполнялось в первые моменты времени для экспериментов с $\mu = 1$ и $x(0) < 0$ (здесь и далее – выделено серым фоном). Тем не менее, управление оказалось работоспособным и по эффективности близким к линейному.

Табл. 2.

$x(0)$	μ = 0.2			μ = 1		
	$I(u)/I(u_{lin})$	$e^2(u,x(t_1))$	$e^2(u_{lin},x(t_1))$	$I(u)/I(u_{lin})$	$e^2(u,x(t_1))$	$e^2(u_{lin},x(t_1))$
5	0.88	2,07*10^-7	7,40*10^-3	$NS(u_{lin})$	2,09*10^-5	$NS(u_{lin})$
4	0.91	4,12*10^-7	6,95*10^-3	$NS(u_{lin})$	2,12*10^-5	$NS(u_{lin})$
3	0.93	7,02*10^-7	6,60*10^-3	$NS(u_{lin})$	2,17*10^-5	$NS(u_{lin})$
1	0.98	1,59*10^-6	6,11*10^-3	0.43	2,28*10^-5	1,34*10^-2
0	1.00	2,23*10^-6	5,93*10^-3	0.88	2,37*10^-5	9,38*10^-3
-1	1.00	3,01*10^-6	5,78*10^-3	0.98	2,47*10^-5	8,44*10^-3
-2	1.00	3,97*10^-6	5,65*10^-3	0.97	2,62*10^-5	8,03*10^-3
-3	1.00	5,13*10^-6	5,54*10^-3	0.94	2,84*10^-5	7,79*10^-3
-4	0.99	6,53*10^-6	5,44*10^-3	0.97	3,19*10^-5	7,65*10^-3
-5	0.98	8,20*10^-6	5,36*10^-3	1.19	3,81*10^-5	7,54*10^-3

Теперь рассмотрим ту же задачу, но с периодической эталонной траекторией, задаваемой следующим уравнением $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_r(t) = -x_r(t)\sin(\mathrm{t}), \quad x_r(0) = 1,$ решением которого является $x_r = \mathrm{e}^{\cos(t)-1}$.

Пусть t_1=10 и $\tilde{x}_{lin} = [x_r(t_{lin}) \quad x_r(t_{lin})]^T, t_{lin} = 7.$ Результатом предлагаемого метода синтеза для $\mu = 0.2$ является следующее управление:

Табл. 3.

$x(0)$	$I(u)/I(u_{lin})$		
	$\mu = 0.2$	$\mu = 1$	$\mu = 3$
5	0.94	$NS(u_{lin})$	$NS(u_{lin})$
4	0.97	$NS(u_{lin})$	$NS(u_{lin})$
3	0.98	0.50	$NS(u_{lin})$
2	1.00	0.86	$NS(u_{lin})$
1	1.02	0.98	0.84
0	1.02	0.97	0.78
-1	1.01	0.97	0.83
-2	1.00	0.93	$NS(u)$
-3	0.99	0.92	$NS(u)$
-4	0.98	1.17	$NS(u)$
-5	0.97	2.88	$NS(u)$

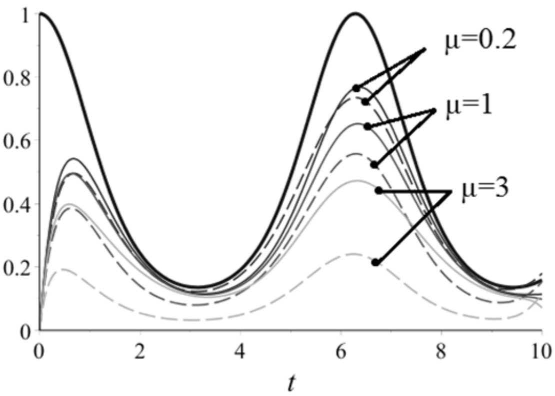


Рис. 7. Траектории систем для $x(0) = 0$ и различных μ вдоль u (непрерывные линии) и u_{lin} (пунктирные)

$$u = \left[-3.87 \quad 1.78\right]\tilde{x} + \left[k_1 \quad k_2\right]\tilde{x},$$

$$k_1 = \left(0.29\,x - 1.22\right)\mathrm{e}^{5.42(t-t_1)} - 0.29\,x + 0.22,$$

$$k_2 = \left(0.29x + 0.53\sin\left(t\right) - 0.45\right)\mathrm{e}^{3.37(t-t_1)} + \left(1.06 - 0.25\,x\right)\mathrm{e}^{5.42(t-t_1)} - 0.05\,x - 0.53\,\sin\left(t\right) + 0.38.$$

Результаты численного моделирования для различных μ приведены в Табл. 3 и на Рис. 7.

При $\mu = 0.2$ построенные управления демонстрируют примерно одинаковую эффективность. При $\mu = 1$ и $\mu = 3$ условие III не выполняется для экспериментов с $x(0) < -1$ и $x(0) < -0$ соответственно. Видно, что в этих случаях управление u начинает уступать u_{lin} с уменьшением начальных условий. При $\mu = 3$ и $x(0) < -2$ замкнутая система с u теряет устойчивость. С увеличением начальных условий наблюдается обратная ситуация и система вдоль u_{lin} становится неустойчивой при $x(0) > 3$ и $x(0) > 0$ для $\mu = 1$ и $\mu = 3$ соответственно. В целом, можно отметить несколько большую область допустимых начальных значений для нелинейного управления u.

2.2. Задача слежения для продольной динамики БПЛА

Рассмотрим задачу слежения для упрощенной продольной динамики беспилотного летательного аппарата (БПЛА), а именно – модели квадрокоптера AscTec Hummingbird [13]. Зададимся двумерной системой координат, начало которой располагается в центре масс БПЛА, ось y располагается в продольной плоскости БПЛА, ось z направлена вертикально вверх (Рис. 8 из [14]). На квадракоптер действуют сила тяжести g, подъемные силы f_a, f_c винтов, расположенных в продольной плоскости, под действием которых, создается момент сил, отклоняющий его на угол тангажа ϕ с угловой скоростью ω_x, результирующая подъемная сила обозначена как f_{coll}.

Благодаря встроенному контроллеру и быстрому отклику на управляющее воздействие для AscTec Hummingbird угловая скорость ω_x также может рассматриваться в качестве канала управления помимо результирующего вектора тяги f_{coll}. Воспользуемся моделью продольной динамики из [14], проигнорировав уравнение для вертикальной скорости БПЛА

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_y\left(t\right) = -f_{coll}\left(t\right)\cdot\sin\left(\phi\left(t\right)\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi\left(t\right) = \omega_x\left(t\right),$$

где v_y – проекция воздушной скорости БПЛА на ось y соответственно. Таким образом, вектором состояния является $x = [v_y, \phi]^{\mathrm{T}}$, а вектором управления $u = [f_{coll}, \omega_x]^{\mathrm{T}}$.

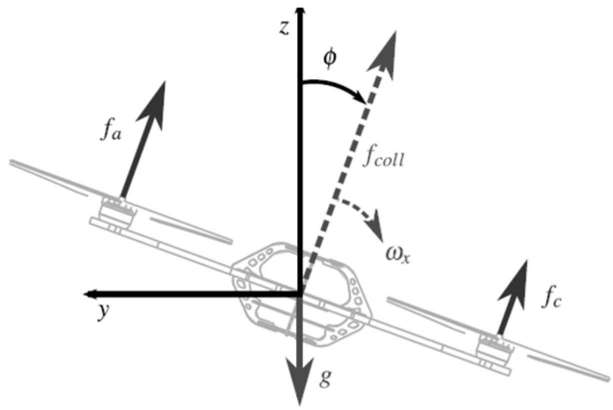


Рис. 8.

Подчеркнем, что для данной физической модели существует связь между координатой v_y и углом тангажа ϕ. Так, при нулевом угле тангажа продольная скорость становится неуправляемой. Кроме того, $\sin(\phi)$ является знакопеременным множителем перед управлением f_{coll}, которое с физической точки зрения всегда положительно. В данных экспериментах считается, когда это необходимо, что винты могут создавать обратную силу тяги. Ограничения на управление не рассматриваются.

Пусть желаемая траектория задается с помощью уравнений

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_{r,1}(t) = -0.5x_{r,1}(t),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_{r,2}(t) = -0.5x_{r,2}(t),\quad x_{r,1}(0) = -1,\ x_{r,2}(0) = 0.6,$$

где $x_{r,1}$ и $x_{r,2}$ – эталонные траектории для продольной скорости v_y и угла тангажа ϕ соответственно. Решениями этих уравнений являются $x_{r,1}(t) = -\mathrm{e}^{-0.5t}, x_{r,2}(t) = 0.6\mathrm{e}^{-0.5t}$. Функционал качества зададим с помощью

$$F = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, Q_0 = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, t_0 = 0, t_1 = 3.$$

Факторизуем исходную систему следующим образом

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = A(x,\mu)x + B(x,\mu)u,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_r = A_r(x_r,\mu)x_r,$$

$$A(x,\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B(x,\mu) = \begin{bmatrix} \sin(x_2(t)) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_r(x_r,\mu) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что параметр μ здесь является искусственно введенным и равным 1. Зафиксируем начальное значение продольной скорости как $x_1(0) = 0$, а начальное значение угла тангажа $x_2(0)$ будем варьировать от -1.5 рад. до 1.5 рад. с шагом 0.5 рад.

Далее необходимо определить матрицы $\tilde{A}_0, \tilde{B}_0, \tilde{Q}_0$ и $\tilde{A}_1(\tilde{x}), \tilde{B}_1(x), \tilde{Q}_1(\tilde{x})$ так, чтобы выполнялись условия I-III. Определим $\tilde{B}_{lin} = \tilde{B}(\tilde{x},\mu)\big|_{\tilde{x}=\tilde{x}_{lin}}$, $\tilde{x}_{lin} = \begin{bmatrix} x_r(t_{lin}) & x_r(t_{lin}) \end{bmatrix}^T$. Рассмотрим два случая: а) t_{lin}=0 и б) t_{lin}=1.5. Результаты численного моделирования представлены в Табл. 4 и на Рис. 9.

В случае а) условия I-III выполнялись для всех экспериментов. При $x_2(0) > 0$ построенное нелинейное управление немного уступает линейному. При $x_2(0) < 0$ преимущество u перед u_{lin} существенно. В случае б) при $x_2(0) > 0$ условие III не выполняется и при $x_2(0) > 0.5$ замкнутая система вдоль u теряет устойчивость. При $x_2(0) < 0$ вновь наблюдается значительный выигрыш для u. На Рис. 9 представлены траектории замкнутых систем вдоль u и u_{lin} (сплошные и пунктирные линии соответственно) для случая а) при $x_2(0)$ = -0.5**.**

Табл. 4.

$x_2(0)$	$I(u)/I(u_{lin})$	
	а)	б)
1.5	1.13	$NS(u)$
1	1.08	$NS(u)$
0.5	1.05	1.04
0	0.84	0.88
-0.5	0.04	0.06
-1	1,04*10^-3^	1,75*10^-3^
-1.5	2,95*10^-5^	5,52*10^-5^

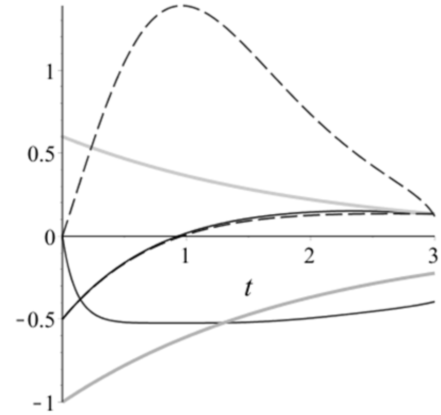


Рис. 9. Траектории для а) при $x_2(0) = -0.5$ вдоль u и u_{lin} (сплошные и пунктирные линии соответственно)

Пусть теперь эталонная траектория задается уравнениями

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_{r,1}(t) = -0.01\cdot x_{r,1}(t),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_{r,2}(t) = -x_{r,2}\cdot\sin(0.5\mathrm{t}),\quad x_{r,1}(0)=1,\ x_{r,2}(0) = -0.8.$$

Их решениями являются функции $x_{r,1}(t) = \mathrm{e}^{-0.01t}$, $x_{r,2}(t) = -0.8\mathrm{e}^{2(\cos(0.5t)-1)}$. То есть требуется, чтобы квадрокоптер поддерживал почти постоянную продольную скорость, а его угол тангажа менялся по периодической траектории. После факторизации матриц системы получаем

$$\tilde{A}(\tilde{x},\mu) = \begin{bmatrix} 0_{2\times2} & 0_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & A_r(x_r,\mu) \end{bmatrix},\quad \tilde{B}(x,\mu) = \begin{bmatrix} B(x,\mu) \\ 0_{2\times2} \end{bmatrix},$$

$$A_r(x_r,\mu) = \begin{bmatrix} -0.01 & 0 \\ 0 & -\sin(0.5t) \end{bmatrix},\quad B(x,\mu) = \begin{bmatrix} \sin(x_2(t)) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где 0_{2x2} – нулевая матрица соответствующей размерности. Снова рассмотрим два выбора матриц с нулевыми индексами: а) $\tilde{A}_{lin} = \tilde{A}(\tilde{x},\mu)\big|_{\tilde{x}=\tilde{x}_{lin}}, \tilde{B}_{lin} = \tilde{B}(\tilde{x},\mu)\big|_{\tilde{x}=\tilde{x}_{lin}}$, $\tilde{x}_{lin} = \begin{bmatrix} x_r(t_{lin}) & x_r(t_{lin}) \end{bmatrix}^T$, $t_{lin} = 1.7$ и б) $\tilde{A}_{lin} = \begin{bmatrix} 0_{2\times2} & 0_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & A_{r,lin} \end{bmatrix}, \tilde{B}_{lin} = \begin{bmatrix} B_{lin} \\ 0_{2\times2} \end{bmatrix}$, где $A_{r,lin} = \begin{bmatrix} -0.01 & 0 \\ 0 & -2.2 \end{bmatrix}, B_{lin} = \begin{bmatrix} -1.2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. В случае а) время $t = 1.7$ выбрано как момент выхода $x_{r,2}(t)$ на среднее значение периодических траектории. В случае б) матрицы $A_{r,lin}$ и B_{lin} являются искусственными и не соответствуют никаким значениям $\tilde{A}(\tilde{x},\mu), \tilde{B}(\tilde{x},\mu)$ ни при каких $x_r(t)$ и $x(t)$. Результаты численного моделирования приведены в Табл. 5, где верхний индекс означает соответствующий выбор $\tilde{A}_0, \tilde{B}_0$.

В экспериментах для а) условие III в некоторые моменты времени нарушалось, а экспериментах для б) условия I-III всегда выполнялись. Последняя строчка в Табл. 5 означает отношение сумм значений критериев. Видно, что для экспериментов а) в среднем управление u проигрывает u_{lin} примерно 30%, тогда как для экспериментов б) оно улучшает эффективность u_{lin} примерно в 10 раз. Последнее соотношение сохраняется и в том случае, когда нелинейно управление определялось согласно подходу б), а линейное – согласно а). Корректность такого сравнения обуславливается тем, что управляемая система и матрицы критерия для а) и б) полностью совпадают.

Табл. 5.

$x_2(0)$	$I(u^{а)})/I(u_{lin}^{а)})$	$I(u^{б)})/I(u_{lin}^{б)})$	$I(u^{б)})/I(u_{lin}^{а)})$
1.5	0.03	0.02	0.02
1	0.12	0.07	0.07
0.5	0.37	0.47	0.48
0	0.91	1.23	1.24
-0.5	1.04	1.31	1.32
-1	3.33	1.33	1.34
-1.5	236.08	1.32	1.33
$\Sigma I(u)/\Sigma I(u_{lin})$	**1.32**	**0.09**	**0.09**

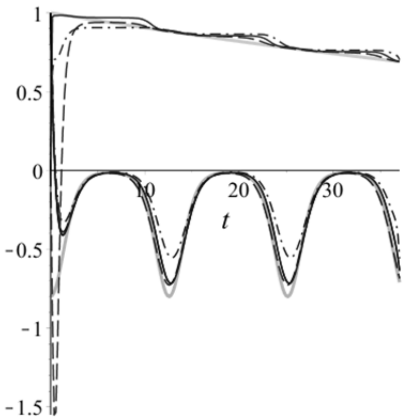


Рис. 10. Траектории систем вдоль $u^{а)}$, $u_{lin}^{а)}$ и $u^{б)}$ (сплошные, пунктирные и штрихпунктирные линии соответственно)

Заключение

В работе рассмотрен алгоритм построения нелинейного управления в задаче слежения на конечном интервале времени для слабонелинейных систем управления, которые представимы в виде линейных управляемых систем с зависящими от состояния коэффициентами. Алгоритм основывается на присутствии в системе малого параметра и решении на полуоси линейно-квадратичной задачи оптимального управления с постоянными коэффициентами, что позволяет получить искомую обратную связь как сумму линейного управления и его нелинейной коррекции, где для последней получено аналитическое выражение. Такой прием значительно снижает вычислительную сложность нахождения управляющего сигнала, что существенно для решения нелинейных задач слежения в режиме реального времени.

Проведенные численные эксперименты показали, что, несмотря на приближенный характер полученных решений, достигается качество работы, сопоставимое с соответствующим линейным управлением, а иногда и значительно его превосходящее. Кроме того, зачастую удается расширить рабочую область допустимых начальных условий относительно рабочей области последнего. Основным условием, ограничивающим применения предложенного алгоритма, является необходимость положительной определенности некоторой матрицы с зависящими от состояния коэффициентами (условие III алгоритма), что всегда можно гарантировать лишь при достаточно малом значении параметра.

Возможной областью применения предложенного алгоритма являются такие задачи слежения для нелинейных систем, в которых использование линейных законов управления не обеспечивает необходимой области устойчивости и/или приемлемого качества работы, и в которых имеются существенные ограничения на вычислительные ресурсы.

Литература

1. Çimen T. Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. Vol. 35. №. 4. Pp. 1025-1047.
2. Cloutier J.R. State-Dependent Riccati Equation Techniques: An Overview // Proc. American Control Conference. 1997. Vol. 2. Pp. 932-936.
3. Heydari A., Balakrishnan S.N. Path Planning Using a Novel Finite Horizon Suboptimal Controller // Journal of guidance, control, and dynamics. 2013. Vol. 36, No. 4. Pp. 1210-1214.
4. Heydari A., Balakrishnan S.N. Closed-Form Solution to Finite-Horizon Suboptimal Control of Nonlinear Systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2015. Vol. 25. №.15. Pp. 2687-2704.
5. Khamis A., Naidu D. Nonlinear optimal tracking using finite horizon state dependent Riccati equation (SDRE) //Proceedings of the 4th International Conference on Circuits, Systems, Control, Signals (WSEAS). 2013. Pp. 37-42.

6. A. Khamis, D.S. Naidu, A.M. Kamel. Nonlinear Finite-Horizon Regulation and Tracking for Systems with Incomplete State Information Using Differential State Dependent Riccati Equation // International Journal of Aerospace Engineering. Vol. 2014 (2014). 12 pages. http://dx.doi.org/10.1155/2014/178628
7. A. Khamis, C. Chen, D. S. Naidu. Tracking of a robotic hand via SD-DRE and SD-DVE strategies//The 2016 UKACC International Conference on Control (UKACC Control 2016), At Belfast, UK Conference Paper · August 2016. DOI: 10.1109/CONTROL.2016.7737638
8. Дмитриев М.Г., Макаров Д.А.. Гладкий нелинейный регулятор в слабо нелинейной системе управления с коэффициентами, зависящими от состояния. Труды Института системного анализа РАН, том 64, №4. – 2014, стр.53-58
9. Ю.Э. Даник, М.Г. Дмитриев, Д.А. Макаров. Один алгоритм построения регуляторов для нелинейных систем с формальным малым параметром //Информационные технологии и вычислительные системы, №4, 2015.-стр.35-44
10. Dmitriev M. G., Makarov D. A. The near optimality of the stabilizing control in a weakly nonlinear system with state-dependent coefficients // AIP Conference Proceedings. Kazakhstan, Almaty, Sep. 7-10, Vol. 1759, 020013 (2016).
11. Макаров Д.А. Подход к построению нелинейного управления в задаче слежения с коэффициентами, зависящими от состояния. I. Алгоритм // Информационные технологии и вычислительные системы (направлено в редакцию).
12. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и тт.; 2-е изд., перераб. и доп. Т 4. Теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 2004. - 744с.; ил.
13. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Изд-во «Мир», 1977. 650 с.
14. http://www.asctec.de/uav-applications/research/products/asctec-hummingbird/
15. Schoellig A.P., Mueller F.L., D'Andrea R. Optimization-based iterative learning for precise quadrocopter trajectory tracking // Autonomous Robots. 2012. V.33. №.1-2. P. 103-127.

Макаров Дмитрий Александрович. Ведущий научный сотрудник общества с ограниченной ответственностью «Технологии системного анализа» (ООО «ТСА»). Окончил Рыбинскую государственную авиационную технологическую академию им. П.А. Соловьева в 2008 году. Кандидат физико-математических наук. Количество печатных работ: 30. Область научных интересов: управление сложными динамическими системами, робастные методы устойчивости и стабилизируемости, искусственный интеллект, экспертные системы. E-mail: makarov@isa.ru

A nonlinear approach to a feedback control design for a tracking state-dependent problem Part II. Numerical simulations

D.A. Makarov

Abstract. The paper deals with investigation of nonlinear finite-horizon tracking control for weakly nonlinear control systems. That nonlinear tracking control is constructed using a differential matrix state-dependent Riccati equation. The obtained results of numerical simulations are compared with the results along the corresponding linear controls.

Keywords: tracking problem, nonlinear control, state-dependent Riccati equation, numerical simulation.

References

1. Çimen T. 2012. Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 35(4): 1025-1047.
2. Cloutier J.R. 1997. State-Dependent Riccati Equation Techniques: An Overview. Proc. American Control Conference. 2: 932-936.
3. Heydari A. and Balakrishnan S.N. Path Planning Using a Novel Finite Horizon Suboptimal Controller. 2013. Journal of guidance, control, and dynamics. 36(4): 1210-1214.
4. Heydari A. and Balakrishnan S.N. 2015. Closed-Form Solution to Finite-Horizon Suboptimal Control of Nonlinear Systems. International Journal of Robust and Nonlinear Control. 25(15): 2687-2704.
5. Khamis A. and Naidu D. 2013. Nonlinear optimal tracking using finite horizon state dependent Riccati equation (SDRE). Proceedings of the 4th International Conference on Circuits, Systems, Control, Signals (WSEAS). 37-42.
6. Khamis A., Naidu D.S. and Kamel A.M. Nonlinear Finite-Horizon Regulation and Tracking for Systems with Incomplete State Information Using Differential State Dependent Riccati Equation. International Journal of Aerospace Engineering. 2014 (2014): 12 pages. http://dx.doi.org/10.1155/2014/178628
7. Khamis A., Chen C. and Naidu D. S. 2016. Tracking of a robotic hand via SD-DRE and SD-DVE strategies. The 2016 UKACC International Conference on Control (UKACC Control 2016), Belfast, UK, August 2016. DOI: 10.1109/CONTROL.2016.7737638
8. Dmitriev M.G. and Makarov D.A. 2014. Smooth nonlinear controller in a weakly nonlinear control system with state-dependent coefficients. Proceedings of the Institute for System Analysis of RAS. 64(4): 53-58.

9. Danik Yu.E., Dmitriev M.G. and Makarov D.A. 2015. An algorithm for constructing regulators for nonlinear systems with the formal small parameter. Information technology and computer systems. 4: 35-44.
10. Dmitriev M.G. and Makarov D.A. 2016. The near optimality of the stabilizing control in a weakly nonlinear system with state-dependent coefficients. AIP Conference Proceedings. Kazakhstan, Almaty, Sep. 7-10. 1759. 020013 (2016).
11. Makarov D.A. 2017. A nonlinear approach to a feedback control design for a tracking state-dependent problem. I. An algorithm. Information technology and computer systems. (accepted by the editors of "Information Technologies And Computer Systems").
12. Methods of classical and modern theory of automatic control: A textbook in 5 volumes; 2-nd ed., revised and enlarged. Volume 4. Theory of optimization of automatic control systems, edited by K.A. Pupkov and N.D. Egupov. 2004. Moscow: Publishing house MSTU. Bauman. 744p.
13. Kvakernaak H. and Sivan R. 1977. Linear optimal control systems. Moscow: Mir. 650 p.
14. http://www.asctec.de/uav-applications/research/products/asctec-hummingbird/
15. Schoellig A.P., Mueller F.L. and D'Andrea R. 2012. Optimization-based iterative learning for precise quadrocopter trajectory tracking. Autonomous Robots. 33(1): 103-127.

Makarov Dmitry Alexandrovich. "Technologies Of System Analysis" Ltd, leading researcher. Cand. Sci. (Physics and Mathematics). Author of 30 scientific papers. Research interests: nonlinear and robust control, composite control, artificial intelligence.