Ю. А. Фарков, Фреймы в анализе Уолша, матрицы Адамара и равномерно распределенные множества, *Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 199, 17–30

DOI: 10.36535/0233-6723-2021-199-17-30

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 199 (2021). С. 17–30
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-199-17-30

УДК 511.43, 517.518, 519.614

ФРЕЙМЫ В АНАЛИЗЕ УОЛША, МАТРИЦЫ АДАМАРА И РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

© 2021 г. **Ю. А. ФАРКОВ**

Аннотация. Настоящая статья продолжает работы автора, отражающие взаимосвязи анализа Уолша с недавними результатами теории ортогональных вейвлет-базисов и теории жестких фреймов. Определены параметрические множества для ортогональных вейвлетов и фреймов Парсеваля с компактными носителями на группах Виленкина. Изложены методы построения жестких равноугольных фреймов с помощью матриц Адамара. Отмечается, что ассоциированные с функциями Уолша конечные жесткие фреймы могут быть полезны для выявления скрытых регулярных структур равномерно распределенных точечных множеств.

Ключевые слова: матрица Адамара, функция Уолша, система Штейнера, вейвлет, равноугольный жесткий фрейм, равномерно распределенное множество, группа Виленкина.

FRAMES IN WALSH ANALYSIS, HADAMARD MATRICES, AND UNIFORMLY DISTRIBUTED SETS

© 2021 **Yu. A. FARKOV**

Abstract. This paper continues the author's works on the relationship of Walsh analysis with recent results in the theory of orthogonal wavelet bases and the theory of tight frames. Parametric sets for orthogonal wavelets and compactly supported Parseval frames on Vilenkin groups are defined. Methods for constructing equiangular tight frames through Hadamard matrices are described. Also, we note that finite tight frames associated with Walsh functions can be useful for detecting hidden regular structures of uniformly distributed point sets.

Keywords and phrases: Hadamard matrix, Walsh function, Steiner system, wavelet, equiangular tight frame, uniformly distributed set, Vilenkin group.

AMS Subject Classification: 11K38,15B34,42C15,42C40,43A15,51E10,65T60

1. Введение. Пусть X — линейное (вещественное или комплексное) пространство со скалярным произведением. Система элементов $\{v_j\}$ называется *фреймом* для X, если существуют такие положительные постоянные A и B, что для любого элемента $x \in X$ верны неравенства

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_j |\langle x, v_j\rangle|^2 \leqslant B\|x\|^2.$$

Постоянные A и B называют соответственно *нижней* и *верхней границами* фрейма. Если границы фрейма совпадают, то фрейм называют *жестким* (*tight*). В случае $A = B = 1$ фрейм $\{f_n\}$ называется *фреймом Парсеваля* (см., например, [42, 77], где имеется подробная библиография).

Во введении к книге [77] отмечается, что теория конечных жестких фреймов активно развивалась последние пятнадцать лет в связи с приложениями в таких областях как обработка сигналов, квантовая теория информации, многомерные ортогональные полиномы и сплайны, а также в теории сжатых измерений (compressed sensing). В недавнем обзоре [26] в связи с проблемой Кадисона—Зингера (см. [75]) обсуждался предложенный в [32] метод расщепления конечных фреймов Парсеваля, ассоциированных с матрицами Уолша. Кроме того, в [26] с помощью дискретного преобразования Виленкина—Крестенсона обобщается построенная в [28] конструкция фреймов Парсеваля в пространствах периодических последовательностей. Хорошо известно, что матрицы Уолша являются важным примером матриц Адамара, а классические функции Уолша можно интерпретировать как характеры компактной группы Кантора. Н. Я. Виленкиным в 1947 г. был определен широкий класс топологических групп, характеры которых содержат функции Уолша как частный случай (см. [1, 4, 5, 46, 64, 70]). Основные результаты об ортогональных вейвлетах на группах Кантора и Виленкина приведены в книге [54] и в обзорных статьях [23, 25]. Несколько конструкций биортогональных вейвлетов в анализе Уолша представлены в [21, 29, 55]. Примеры фреймов на локально компактной канторовой группе содержатся в [47, 48]. Построенные в [48] фреймы Парсеваля использовались в [65] для оценок снизу констант неопределенности на группе Кантора. Взаимосвязи между теорией фреймов и анализом Уолша в контексте конструкций вейвлетов на группах Виленкина анализировались в недавних статьях [24, 49–53].

Напомним, что для данного целого $p \geqslant 2$ группа Виленкина G_p состоит из последовательностей $x = (x_j)$, где $x_j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ для $j \in \mathbb{Z}$ и только конечное число x_j с отрицательными индексами могут быть отличными от нуля. Обозначим через θ нулевую последовательность. Если $x \neq \theta$, то существует такое целое число $k = k(x)$, что $x_k \neq 0$ и $x_j = 0$ для всех $j < k$. Групповая операция $\oplus$ на G_p определяется как покоординатное сложение по модулю p:

$$(z_j) = (x_j) \oplus (y_j) \iff z_j = x_j + y_j \pmod p \quad \text{для всех} \quad j \in \mathbb{Z},$$

а топология вводится с помощью системы окрестностей нуля:

$$U_l = \{(x_j) \in G_p : x_j = 0 \text{ для всех } j \leqslant l\}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

При $p = 2$ группа G_p изоморфна локально компактной канторовой группе, а подгруппа U_0 изоморфна компактной канторовой группе, т.е. топологическому декартову произведению счетного множества циклических групп второго порядка с дискретной топологией.

В разделе 2 на основе работ [24, 53] дано описание параметрических множеств для ортогональных вейвлетов и фреймов Парсеваля на группе G_p. Отмечается, в частности, что при каждом натуральном n фрейм Парсеваля на G_p может быть построен по любому комплексному вектору $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{p^n-1})$, удовлетворяющему условиям

$$b_0 = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{j=0}^{p-1} |b_{l+jp^{n-1}}|^2 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant l \leqslant p^{n-1} - 1.$$

При обработке сигналов выбор этого вектора осуществляют по энтропийному, среднеквадратическому или иному известному критерию (см., например, [7, 10, 25, 31]). В разделе 3 излагаются предложенные в [57, 60] методы построения жестких равноугольных фреймов с помощью матриц Адамара, Уолша и систем Шнейдера. Эти методы дополняют конструкции конечных жестких фреймов из обзора [26]. В заключительном разделе 4 рассматриваются конечномерные усредняющие пространства, возникающие в теории равномерно распределенных точечных множеств в связи с теоремой Чена и рядами Уолша (см. [15, 16]). Для представления векторов этих пространств могут быть использованы конечные жесткие фреймы, определяемые с помощью матриц Адамара и Уолша. Такие представления позволят применить методы теории фреймов к обнаружению и анализу скрытых регулярных структур равномерно распределенных множеств. Изложение в разделе 4 ведется для канторова случая на указанной в конце раздела 2 модели группы G_p; обобщения на случай $p > 2$ даны в [41, 73].

Настоящая статья существенно дополняет пленарную лекцию [27], прочитанную на 20-й международной Саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложения», и продолжает цикл работ автора о взаимосвязях анализа Уолша с недавними результатами теории ортогональных вейвлет-базисов и теории жестких фреймов (см. [23, 25, 26, 49, 52]).

2. Параметрические множества для фреймов на группах Виленкина. Пусть $G = G_p$, $U = U_0$ и $N = p^n$, где n — натуральное число. Хорошо известно, что группа G самодвойственна. Соотношение двойственности на G переводит $x, \omega \in G$ в

$$\chi(x,\omega) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j\omega_{1-j}\right).$$

Пространства Лебега $L^q(G)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, определяются по мере Хаара μ, заданной на борелевских подмножествах в G и нормированной условием $\mu(U) = 1$. Преобразование Фурье функции $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ определяется по формуле

$$\widehat{f}(\omega) = \int\limits_G f(x)\overline{\chi(x,\omega)}d\mu(x), \quad \omega \in G,$$

и стандартным образом продолжается на пространство $L^2(G)$.

Отображение $\lambda\colon G \to \mathbb{R}_+$ определим равенством

$$\lambda(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j p^{-j}, \quad x = (x_j) \in G.$$

Легко видеть, что образом дискретной подгруппы

$$H \coloneqq \{(x_j) \in G : x_j = 0 \text{ для всех } j > 0\}$$

при отображении λ является множество целых неотрицательных чисел: $\lambda(H) = \mathbb{Z}_+$. Для каждого $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ пусть $h_{[\alpha]}$ обозначает такой элемент из H, что $\lambda(h_{[\alpha]}) = \alpha$; в частности, $h_{[0]} = \theta$. Тогда *функции Уолша* для группы G могут быть заданы равенством

$$W_\alpha(x) = \chi(x, h_{[\alpha]}), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in G.$$

Определим автоморфизм A группы G по формуле $(Ax)_j = x_{j+1}$, где $x = (x_j) \in G$. Для любого натурального n множества

$$U_{n,s} \coloneqq A^{-n}(h_{[s]}) \oplus A^{-n}(U), \quad 0 \leqslant s \leqslant N-1,$$

являются смежными классами подгруппы $A^{-n}(U)$ группы U. Из определений следует, что функции W_k при $0 \leqslant k \leqslant N-1$ постоянны на каждом из множеств $U_{n,s}$, $0 \leqslant s \leqslant N-1$.

Дискретное преобразование Виленкина—Крестенсона переводит произвольный вектор $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{N-1})$ пространства $\mathbb{C}^N$ в вектор $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{N-1})$ с компонентами

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1} b_s W_k(A^{-n}h_{[s]}), \quad 0 \leqslant k \leqslant N-1. \tag{1}$$

Обратное преобразование действует по формуле

$$b_s = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \overline{W_\alpha(A^{-n}h_{[s]})}, \quad 0 \leqslant s \leqslant N-1. \tag{2}$$

Быстрые алгоритмы реализации прямого и обратного дискретного преобразования Виленкина—Крестенсона содержатся в [3, 5, 11, 62, 70].

Маска, ассоциированная с вектором $\boldsymbol{b}$, имеет вид

$$m_{\boldsymbol{b}}(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k\overline{W_k(\omega)}, \quad \omega \in G,$$

где коэффициенты a_k определены по формуле (1). Соответствующее этой маске масштабирующее уравнение записывается в виде

$$\varphi(x) = p\sum_{k=0}^{N-1} a_k\varphi(Ax \ominus h_{[k]}), \quad x \in G, \tag{3}$$

или $\widehat{\varphi}(\omega) = m_{\boldsymbol{b}}(A^{-1}\omega)\widehat{\varphi}(A^{-1}\omega)$, $\omega \in G$. Коэффициенты уравнения (3) вычисляются по вектору $\boldsymbol{b}$ с помощью формулы (1). Из формулы (2) видно, что $m_{\boldsymbol{b}}(A^{-n}h_{[s]}) = b_s$ для $s = 0, 1, \ldots, N-1$. Отметим также, что при условии $\widehat{\varphi}(\theta) \neq 0$ имеем $b_0 = 1$ (обычно решение φ уравнения (3) нормируется условием $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$).

Параметрические множества $\boldsymbol{F}(p,n)$ и $\mathbf{G}_0(p,n)$ определяются условиями

$$\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{F}(p,n) \iff b_0 = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{j=0}^{p-1} |b_{l+jp^{n-1}}|^2 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant l \leqslant p^{n-1}-1,$$

$$\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{G}_0(p,n) \iff b_0 = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{j=0}^{p-1} |b_{l+jp^{n-1}}|^2 = 1, \quad 0 \leqslant l \leqslant p^{n-1}-1.$$

Теорема 1. *Пусть маска $m_{\boldsymbol{b}}$ масштабирующего уравнения* (3) *определена по вектору $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{F}(p,n)$. Тогда функция φ, заданная своим преобразованием Фурье по формуле*

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_{\boldsymbol{b}}(A^{-j}\omega), \quad \omega \in G,$$

является L^2-решением уравнения (3) *и имеет компактный носитель.*

Теорема 1 следует из [50, теорема 11]. Известно (см. [52]), что для любого вектора $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{F}(p,n)$ существует простой способ вычисления значений функции $\widehat{\varphi}(\omega)$. Отметим также, что носитель функции φ при условиях теоремы 1 лежит в U_{1-n} (ср. с разложением [52, (2.11)] функции φ в лакунарный ряд Уолша по функциям W_α). Алгоритмы построения фреймов Парсеваля по любому вектору $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{F}(p,n)$ на группе G содержатся в [49, 50, 52]. В [51] предложен алгоритм построения нестационарных вейвлетов на группе Виленкина, определяемой по последовательности натуральных чисел $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$, $p_j \geqslant 2$.

Для произвольной функции $\varphi \in L^2(G)$ положим

$$\varphi_{j,h}(x) = p^{j/2}\varphi(A^j x \ominus h), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad h \in H.$$

Функция φ порождает кратномасштабный анализ (КМА), если, во-первых, система $\{\varphi(\cdot \ominus k) : k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(G)$ и, во-вторых, подпространства

$$V_j = \operatorname{clos}_{L^2(G)} \operatorname{span}\{\varphi_{j,h} : j \in \mathbb{Z},\ h \in H\},$$

обладают следующими свойствами

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad \cap V_j = \{\theta\}, \quad \overline{\cup V_j} = L^2(G).$$

Если φ — такое решение уравнения (3), что система $\{\varphi(\cdot \ominus h) : h \in H\}$ ортонормирована в $L^2(G)$, то вектор $\boldsymbol{b}$, по которому определена маска уравнения (3), принадлежит множеству $\boldsymbol{G}_0(p,n)$ (ср. с [20, предложение 3.2]). Пусть $\boldsymbol{W}(p,n)$ — множество векторов $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{G}_0(p,n)$, для которых решение φ уравнения (3) порождает КМА в $L^2(G)$, а $\boldsymbol{W}_0(p,n)$ — множество векторов $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{N-1})$ из $\boldsymbol{G}_0(p,n)$, у которых $b_l \neq 0$ для всех $0 \leqslant l \leqslant p^{n-1}-1$. Для любого $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{W}_0(p,n)$ существует конструктивный метод построения ортогонального вейвлет-базиса в $L^2(G)$ (см. [20,23]). При этом случаю Хаара отвечает множество $\boldsymbol{H}(p,n)$, состоящее из вектора $(b_0, b_1, \ldots, b_{N-1})$, у которого $b_l = 1$ для $0 \leqslant l \leqslant p^{n-1}-1$ и $b_l = 0$ для $p^{n-1} \leqslant l \leqslant N-1$ (библиографию о вейвлетах Хаара на группах Виленкина, а также о методах построения ортогональных вейвлетов в случае $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{W}(p,n) \setminus \boldsymbol{W}_0(p,n)$ см. в [23, 54]).

Таким образом, определены параметрические множества:

$$\boldsymbol{H}(p,n) \subset \boldsymbol{W}_0(p,n) \subset \boldsymbol{W}(p,n) \subset \boldsymbol{G}_0(p,n) \subset \boldsymbol{F}(p,n).$$

Дискретные вейвлет-преобразования, соответствующие этим множествам, определены в [25], где имеются также некоторые их применения для обработки сигналов (относительно адаптации таких преобразований к различным сигналам см. [10, § 9.4]).

Метод построения ортонормированного базиса вейвлетов в пространстве $\mathbb{C}_N$ комплексных N-периодических последовательностей по любому вектору $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{G_0}(p,n)$ изложен в [22] (при этом условие $b_0 = 1$ оказывается несущественным). Более того, существует алгоритм построения фреймов для пространства $\mathbb{C}_N$ с помощью дискретного преобразования Виленкина—Крестенсона. Соответствующая конструкция позволяет по любому ненулевому вектору $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$, удовлетворяющему условию

$$|b_l|^2 + |b_{l+p^{n-1}}|^2 + \ldots + |b_{l+(p-1)p^{n-1}}|^2 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant l \leqslant p^{n-1} - 1,$$

построить фрейм Парсеваля для $\mathbb{C}_N$ (подробности см. в [26]).

В стандартной интерпретации группы Виленкина G_p на положительной полупрямой $\mathbb{R}_+$ подгруппа H заменяется множеством целых неотрицательных чисел $\mathbb{Z}_+$, мере Хаара на G_p соответствует мера Лебега на $\mathbb{R}_+$, вместо преобразования Фурье используется преобразование типа Уолша—Фурье (в книге [5] это преобразование называется интегральным мультипликативным преобразованием), а системе $\{W_\alpha\}$ соответствует система Крестенсона—Леви (подробности см. в [5, 46]). С использованием этой модели в [53] дано описание трех типов вейвлет-фреймов с компактными носителями на $\mathbb{R}_+$:

(i) КМА-фреймы (ср. с конструкциями фреймов в [44–66]),
(ii) фреймы, ассоциированные с «допустимым условием» типа Добеши (см. [6, § 3.3.2]) и
(iii) фреймы, ассоциированные с ядрами типа Дирихле—Уолша.

3. Применение матриц Адамара для построения равноугольных фреймов. Хорошо известно, что векторы $v_1, v_2, \dots, v_m$ образуют фрейм для конечномерного пространства X тогда и только тогда, когда $\operatorname{span}\{v_j\}_{j=1}^m = X$. Более того, если $\{v_j\}_{j=1}^m$ — жесткий фрейм для X с константой A и $d = \dim X$, то

$$A = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^m \|v_j\|^2 \quad \text{и} \quad x = \frac{1}{A}\sum_{j=1}^m \langle x, v_j\rangle v_j$$

для всех $x \in X$. Отношение m/d называется *избыточностью* (redundancy) фрейма $\{v_j\}_{j=1}^m$. Фрейм $\{v_j\}_{j=1}^m$ называется *равномерным*, если $\|v_i\| = \|v_j\|$ для всех $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Если $\{v_j\}_{j=1}^m$ — фрейм Парсеваля для X и $\|v_j\| = 1$ для всех j, то $\{v_j\}_{j=1}^m$ является ортонормированным базисом в X. Очевидно, если $\{v_j\}_{j=1}^m$ — жесткий фрейм с константой A, то $\{v_j/\sqrt{A}\}_{j=1}^m$ — фрейм Парсеваля для X. По теореме Наймарка каждый фрейм Парсеваля $\{v_j\}_{j=1}^m$ в конечномерном пространстве X является ортогональной проекцией ортонормированного базиса m-мерного пространства Y, содержащего X в качестве подпространства (см. [77, теорема 2.2], [9, 12, 19]).

Простейшим и наиболее известным равномерным фреймом на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ является *фрейм Мерседес-Бенц*, образуемый векторами

$$f_1 = (-\sqrt{3}/2, -1/2), \quad f_2 = (\sqrt{3}/2, -1/2), \quad f_3 = (0, 1).$$

Легко видеть, что избыточность этого фрейма равна $3/2$ и для любого $x \in \mathbb{R}^2$

$$\sum_{j=1}^3 |\langle x, f_j\rangle|^2 = \frac{3}{2}\|x\|^2.$$

Положим $f_j^2 = f_j$, $j = 1, 2, 3$. Для каждого $d \geqslant 3$ *обобщенный фрейм Мерседес-Бенц* в пространстве $\mathbb{R}^d$ определяется индуктивно:

$$f_j^d = \left(\frac{\sqrt{d^2-1}}{d} f_j^{d-1}, -\frac{1}{d}\right), \quad 1 \leqslant j \leqslant d, \quad f_{d+1}^d = (0, \dots, 0, 1).$$

Константа фрейма $\{f_j^d\}_{j=1}^{d+1}$ совпадает с его избыточностью: $A = 1 + 1/d$.

Пусть $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^d$. Фрейм $\{f_j^d\}_{j=1}^{d+1}$ однозначно определяется следующими условиями:

$$\text{(i) } f_j \in \mathbb{S}^{d-1}, \qquad \text{(ii) } \langle f_i, f_j\rangle = -\frac{1}{d} \text{ при } i \neq j, \qquad \text{(iii) } \sum_{j=1}^{d+1} f_j = 0.$$

Точки (векторы) этого фрейма являются вершинами правильного d-мерного симплекса и для $N = d + 1$ образуют решение хорошо известной задачи:

$$\sum_{i \neq j} \frac{1}{|x_i - x_j|} \to \min, \quad x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{S}^{d-1}$$

(о физической интерпретации этой задачи см. [63, § 3.6], [2–38]).

Неравенство Адамара для произвольной матрицы $X = [x_{ij}]$ размера $m \times m$ записывается в виде

$$|\det X|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |x_{ij}|^2$$

и геометрически означает, что объем m-мерного параллелепипеда не превосходит произведения длин его ребер; известно, что он равен этому произведению в том и только в том случае, когда его ребра ортогональны. В случае $|x_{ij}| \leqslant 1$ из неравенства Адамара имеем $|\det X| \leqslant m^{m/2}$ (матрицы, для которых достигается равенство, называются *матрицами Адамара* порядка m). Вещественная матрица H размера $m \times m$ является матрицей Адамара тогда и только тогда, когда $h_{ij} = \pm 1$ и $HH^t = mI$ (последнее равенство означает, что строки матрицы H попарно ортогональны). Если H — вещественная матрица Адамара порядка $m \geqslant 4$, то m делится на 4. До сих пор недоказанная *гипотеза Адамара* утверждает, что для любого натурального k существует такая матрица H порядка $m = 4k$ с элементами ± 1, что $HH^t = mI$ (см., например, [34, 35]). Если m, $m/12$ или $m/20$ является степенью 2, то матрицы Адамара порядка m могут быть получены в Matlab функцией `hadamard(m)`. Матрицы Адамара находят широкое применение как в теоретических, так и в прикладных задачах (см., например, [71, 72]). В частности, они весьма востребованы в теории кодов, исправляющих ошибки. В [18] жесткие равноугольные фреймы, определяемые по матрицам Адамара, использовались для построения покрытий единичного шара банахова пространства.

Пусть $\mathbb{T}$ — единичная окружность комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Комплексная матрица $H = [h_{ij}]$ размера $m \times m$ является матрицей Адамара тогда и только тогда, когда $h_{ij} \in \mathbb{T}$ и $HH^* = mI$. Удаление любой строки этой матрицы приводит к матрице Φ размера $(m-1) \times m$, столбцы которой образуют так называемый *унимодулярный симплекс*. Если обозначить через h удаленную из H строку, то говорят (см. [57]), что компоненты строки h образуют *дополнение Наймарка* столбцов матрицы Φ.

Напомним, что *кронекеровым произведением* $(m \times n)$-матрицы A и $(p \times q)$-матрицы B называется матрица размера $mp \times nq$, определяемая равенством

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{11}B & \ldots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \ldots & a_{2n}B \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \ldots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

В 1867 г. Сильвестр доказал, что если X_1 и X_2 — матрицы Адамара порядков m_1 и m_2, то их кронекерово произведение $X_1 \otimes X_2$ является матрицей Адамара порядка $m_1 m_2$. Простейшая матрица Уолша определяется равенством

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

а матрица $H_n = [h_{lk}]_{l,k=0}^{2^n-1}$ совпадает с n-й кронекеровой степенью матрицы H_1. Например, для $n = 2$ имеем

$$H_2 = H_1 \otimes H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Используемый в Matlab рекурсивный метод Сильвестра генерирования матриц H_n основан на тождестве

$$H_{n+1} = H_1 \otimes H_n.$$

Строки матриц H_n называют *дискретными функциями Уолша*, упорядоченными по Адамару (см., например, [5, 70, 74]). Матрицы H_n являются хорошо известным примером вещественных матриц Адамара и имеют многочисленные применения.

Пусть $\mathbb{F}$ обозначает $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Следующее предложение хорошо известно (см., например, [77]).

Предложение 1. *Пусть $V = [v_1, v_2, \ldots, v_m]$ — матрица размера $d \times m$, столбцами которой являются векторы $v_1, v_2, \ldots, v_m$ пространства $\mathbb{F}^d$. Векторы $v_1, v_2, \ldots, v_m$ образуют жесткий фрейм для $\mathbb{F}^d$ с константой A тогда и только тогда, когда $VV^* = AI$, где I — единичная матрица порядка d.*

Пусть $m \geqslant d$. Согласно предложению 1, если X — унитарная $(m \times m)$-матрица (или пропорциональна такой матрице) с равными по модулю элементами из $\mathbb{F}$, то равномерный жесткий фрейм для $\mathbb{F}^d$ образуется столбцами $(d \times m)$-подматрицы, полученной выбором любых d строк матрицы X. Например, таким способом из матрицы Фурье

$$F_m = \frac{1}{\sqrt{m}} [\omega^{jk}]_{0 \leqslant j,k \leqslant m-1}, \quad \omega = e^{2\pi i/m},$$

получаются *гармонические жесткие фреймы* для $\mathbb{C}^d$ (см. [77, гл. 11], [61]). Примеры построения конечных жестких фреймов с помощью матриц Уолша H_n имеются в [26, 32, 77].

Фрейм $\{v_j\}_{j=1}^m$ в пространстве $\mathbb{F}^d$ называется *равноугольным*, если $\|v_j\| = 1$ для всех j и существует такая константа $\gamma \in [0, 1)$, что

$$|\langle v_i, v_j \rangle| = \gamma \quad \text{для} \quad i \neq j.$$

Для произвольного равноугольного фрейма $\{v_j\}_{j=1}^m$ в $\mathbb{F}^d$ верно неравенство

$$\gamma \geqslant \sqrt{\frac{m-d}{d(m-1)}}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда фрейм $\{v_j\}_{j=1}^m$ жесткий. В беспроводной связи и теории кодирования применяются равноугольные фреймы с малыми значениями γ. Для обобщенного фрейма Мерседес-Бенц имеем $\gamma = 1/d$.

Система Штейнера $S(t, k, \nu)$ — это ν-элементное множество S вместе с набором k-элементных подмножеств множества S (называемых *блоками*), причем каждое t-элементное подмножество S содержится только в одном блоке. Классические системы Штейнера соответствуют значению $t = 2$. В этом случае число блоков r, в которые попадает каждый элемент из S, связано с количеством блоков b системы $S(2, k, \nu)$ равенствами

$$r\nu = bk \quad \text{и} \quad v - 1 = r(k-1).$$

В [60] каждому $a \in S(2, k, \nu)$ сопоставляется своя (возможно, комплексная) матрица Адамара H^a порядка $1 + (\nu - 1)/(k - 1)$ и равноугольный жесткий фрейм из m векторов в пространстве размерности d, где

$$m = \nu \left(1 + \frac{\nu - 1}{k - 1}\right), \quad d = \frac{\nu(\nu - 1)}{k(k-1)}, \quad \frac{m}{d} = k \left(1 + \frac{k-1}{\nu - 1}\right).$$

В результате из систем Шаудера $S(2, k, \nu)$ получаются восемь бесконечных семейств равноугольных жестких фреймов (см. [60, табл. 1, 2]). Проиллюстрируем этот метод тремя примерами.

Пример 1. Пусть $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда блоки для $S(2, 2, 4)$ — это 2-элементные множества:

$$\{1, 2\}, \ \{1, 3\}, \ \{1, 4\}, \ \{2, 3\}, \ \{2, 4\}, \ \{3, 4\}.$$

Составим матрицу инцидентности:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для каждого $a \in S$ существуют три блока, содержащих число a. Положим

$$\begin{aligned} &\beta_1(1) = \{1,2\}, \quad \beta_2(1) = \{1,3\}, \quad \beta_3(1) = \{1,4\}, \\ &\beta_1(2) = \{1,2\}, \quad \beta_2(2) = \{2,3\}, \quad \beta_3(2) = \{2,4\}, \\ &\beta_1(3) = \{1,3\}, \quad \beta_2(3) = \{2,3\}, \quad \beta_3(3) = \{3,4\}, \\ &\beta_1(4) = \{1,4\}, \quad \beta_2(4) = \{2,4\}, \quad \beta_3(4) = \{3,4\}. \end{aligned}$$

В матрице Уолша H_2 выберем три строки, для каждого $a \in S$ занумеруем эти строки соответствующими блоками:

$$h^{(a)}_{\beta_1(a)} = [1,-1,1,-1], \quad h^{(a)}_{\beta_2(a)} = [1,1,-1,-1], \quad h^{(a)}_{\beta_3(a)} = [1,-1,-1,1]$$

и заменим ненулевые элементы матрицы C этими строками. В результате получим блочную матрицу

$$V = \begin{bmatrix} h^{(1)}_{\{1,2\}} & h^{(2)}_{\{1,2\}} & 0 & 0 \\ h^{(1)}_{\{1,3\}} & 0 & h^{(3)}_{\{1,3\}} & 0 \\ h^{(1)}_{\{1,4\}} & 0 & 0 & h^{(4)}_{\{1,4\}} \\ 0 & h^{(2)}_{\{2,3\}} & h^{(3)}_{\{2,3\}} & 0 \\ 0 & h^{(2)}_{\{2,4\}} & 0 & h^{(4)}_{\{2,4\}} \\ 0 & 0 & h^{(3)}_{\{3,4\}} & h^{(4)}_{\{3,4\}} \end{bmatrix}.$$

Столбцы этой блочной матрицы, записанной в развернутом виде, образуют равноугольный жесткий фрейм из 16 векторов в $\mathbb{R}^6$.

Отметим, что в примере 1 при переходе от матрицы C к V можно использовать любые три строки матрицы H_2. Кроме того, для построения фрейма из 16 векторов в $\mathbb{C}^6$ вместо матрицы H_2 можно взять комплексную матрицу Адамара

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}.$$

Пример 2. В случае $k = 3$, $\nu = 7$ система Штейнера $S(2,3,7)$ известна как *плоскость Фано.* Блоками для $S(2,3,7)$ являются 3-элементные множества:

$$\{1,2,3\},\ \{1,4,5\},\ \{1,6,7\},\ \{2,4,6\},\ \{2,5,7\},\ \{3,4,7\},\ \{3,5,6\}.$$

Каждая точка множества $S = \{1,2,\ldots,7\}$ принадлежит трем из этих семи блоков:

$$\begin{aligned} &\beta_1(1) = \{1,2,3\}, \quad \beta_2(1) = \{1,4,5\}, \quad \beta_3(1) = \{1,6,7\}, \\ &\beta_1(2) = \{1,2,3\}, \quad \beta_2(2) = \{2,4,6\}, \quad \beta_3(2) = \{2,5,7\}, \\ &\beta_1(3) = \{1,2,3\}, \quad \beta_2(3) = \{3,4,7\}, \quad \beta_3(3) = \{3,5,6\}, \\ &\beta_1(4) = \{1,4,5\}, \quad \beta_2(4) = \{2,4,6\}, \quad \beta_3(4) = \{3,4,7\}. \\ &\beta_1(5) = \{1,4,5\}, \quad \beta_2(5) = \{2,5,7\}, \quad \beta_3(5) = \{3,5,6\}, \\ &\beta_1(6) = \{1,6,7\}, \quad \beta_2(6) = \{2,4,6\}, \quad \beta_3(6) = \{3,5,6\}, \\ &\beta_1(7) = \{1,6,7\}, \quad \beta_2(7) = \{2,5,7\}, \quad \beta_3(7) = \{3,4,7\}. \end{aligned}$$

Продолжая далее как в примере 1, получим равноугольный жесткий фрейм из 28 векторов в пространстве $\mathbb{R}^7$ (основные свойства этого фрейма приведены в [57]).

Пример 3. Для $S = \{1, 2, \ldots, \nu\}$, $\nu \geqslant 2$, блоками для системы Штейнера $S(2, 2, \nu)$ являются всевозможные 2-элементные подмножества в S. В этом случае методом, изложенным в [60], получается равноугольный жесткий фрейм из $m = \nu^2$ векторов в пространстве $\mathbb{C}^d$ размерности $d = \nu(\nu - 1)/2$. Для $\nu = 3$ матрица инцидентности записывается в виде

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для каждого $a \in S$ существуют два блока, содержащих число a. Выберем в качестве матрицы Адамара матрицу Фурье

$$F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix}, \quad \omega = e^{2\pi i/3}.$$

В результате получим матрицу

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega & \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \omega^2 & \omega & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega & \omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \omega^2 & \omega & 1 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы образуют равноугольный жесткий фрейм в пространстве $\mathbb{C}^3$ (см. [77, пример 12.22]).

В [57] с использованием троичных систем Штейнера $S(2, 3, \nu)$, дополнений Наймарка и фрейма Тремайн (J. C. Tremain, 2009) построено бесконечное семейство комплексных жестких равноугольных фреймов для пространств размерностей $(\nu + 2)(\nu + 3)/6$. Дальнейшие результаты о способах построения равноугольных жестких фреймов содержатся в [77, гл. 12], где имеется подробная библиография; см. также недавние статьи [58, 59, 61].

4. Конечномерные усредняющие пространства для равномерно распределенных точечных множеств. Последовательность точек $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ на единичном интервале $U = [0, 1)$ называется *равномерно распределенной*, если последовательность $\{\mu_N\}_{N=1}^{\infty}$ атомических вероятностных мер, определяемых условиями $\mu_N(x_j) = 1/N$ и $\operatorname{supp} \mu_N = \{x_1, \ldots, x_N\}$, слабо сходится к мере Лебега на U. Это определение легко обобщается на любое топологическое пространство с соответствующей вероятностной мерой на борелевских множествах. Понятие равномерного распределения имеет важные применения в теории чисел (особенно в диофантовых приближениях), комбинаторике, эргодической теории, дискретной геометрии, статистике, численном анализе и других разделах математики. Фундаментальное наблюдение в современной теории распределений состоит в том, что многие равномерно распределенные множества имеют скрытые регулярные структуры (см. [33, 36, 37, 39, 45]). Существующие способы выявления и анализа этих структур естественным образом могут быть дополнены разработанными в последние годы методами теории фреймов.

В этом разделе формулируется доказанное в [15] обобщение теоремы Чена из теории равномерно распределенных точечных множеств и определяются соответствующие оптимальные конечномерные усредняющие подпространства. Для представления векторов этих усредняющих пространств могут быть полезны жесткие фреймы, определяемые с помощью дискретных функций Уолша и их обобщений. Изложение ведется на указанной в конце раздела 2 модели группы G_p на полупрямой $\mathbb{R}_+$ для случая $p = 2$; соответственно, через $\oplus$ обозначается двоичное сложение на $\mathbb{R}_+$; обобщения на случай $p > 2$ даны в [41, 73].

Пусть $U^d = [0, 1)^d$, — единичный куб в $\mathbb{R}^d$. Для произвольного N-элементного множества $D \subset U^d$ и каждой точки $Y = (y_1, \ldots, y_d) \in U^d$ локальное уклонение $\mathcal{L}[D, Y]$ определяется равенством

$$\mathcal{L}[D, Y] = \operatorname{card}\{D \cap B_Y\} - N \cdot \operatorname{vol} B_Y,$$

где $B_Y=[0,y_1)\times\ldots\times[0,y_d)$ — куб в $\mathbb{R}^d$, $\operatorname{vol}B_Y$ — объем этого куба и $\operatorname{card}\{D\cap B_Y\}$ — число точек множества D, попавших в куб B_Y.

Для произвольного конечного множества $D\subset U^d$ определены L_q-уклонения

$$\mathcal{L}_q[D]=\left(\int\limits_{U^d}|\mathcal{L}[D,Y]|^q dY\right)^{1/q},\quad 1\leqslant q<\infty.$$

Известно, что при $1<q<\infty$ для любого N-элементного множества $D\subset U^d$ верна оценка

$$\mathcal{L}_q[D]>c_{d,q}(\log N)^{(d-1)/2}$$

с постоянной $c_{d,q}$, не зависящей от N. Обратно, для каждого q, $1\leqslant q<\infty$, и любого натурального N существует такое множество D_N из N точек в U^d, что

$$\mathcal{L}_q[D_N]<C_{d,q}(\log N)^{(d-1)/2} \tag{4}$$

с постоянной $C_{d,q}$, не зависящей от N. Оценки вида (4) были получены для размерностей $d=2$ и $d=3$ Дэвенпортом [43] и Ротом [68] соответственно, а для произвольных размерностей Фроловым [30] и Ротом [69].

Для каждого $s\in\mathbb{Z}_+$ положим

$$\mathbb{Q}(2^s)=\{m2^{-s}\ m=0,1,\ldots,2^s-1\},$$
$$\mathbb{Q}^d(2^s)=\{(x_1,\ldots,x_d):\ x_j\in\mathbb{Q}(2^s),\ j=1,\ldots,d\}.$$

Легко видеть, что $\operatorname{card}\{\mathbb{Q}^d(2^s)\}=2^{ds}$. Далее, для любых $X=(x_1,\ldots,x_d)$ и $Y=(y_1,\ldots,y_d)$ из $\mathbb{Q}^d(2^s)$ положим

$$X\oplus Y=(x_1\oplus y_1,\ldots,x_d\oplus y_d).$$

По отношению к так определенному сложению множество $\mathbb{Q}^d(2^s)$ является векторным пространством над полем $\mathbb{F}_2$, причем $\dim\{\mathbb{Q}^d(2^s)\}=ds$. Отметим также, что для любого множества $D\subset U^d$ и любой точки $T\in\mathbb{Q}^d(2^s)$ определен двоичный сдвиг

$$D\oplus T=\{X\oplus T: X\in D\}\subset U^d.$$

Для любых $a,m\in\mathbb{Z}_+$ определены элементарные (двоичные) интервалы

$$\Delta_a^m=[m2^{-a},(m+1)2^{-a}),\quad m=0,1,\ldots,2^a-1.$$

Декартовы произведения таких интервалов образуют элементарные (двоичные) ящики:

$$\Delta_A^M=\Delta_{a_1}^{m_1}\times\ldots\times\Delta_{a_d}^{m_d},\quad m_j=0,1,\ldots,2^{a_j}-1,\quad j=1,\ldots,d,$$

где $A=(a_1,\ldots,a_d)$, $M=(m_1,\ldots,m_d)$.

Пусть δ и s — целые, $0\leqslant\delta\leqslant s$. Подмножество $D\subset U^d$, состоящее из 2^s точек, называется *двоичной (δ,s,d)-сеткой с дефектом δ*, если каждый элементарный ящик Δ_A^M объема $2^{\delta-s}$ содержит в точности 2^δ точек из D. Двоичные (δ,s,d)-сетки применялись для построения многомерных квадратурных формул в [17] (см. также недавний обзор [14]). Используя методы алгебраической геометрии над конечными полями, можно доказать существование (δ,s,d)-сеток с $\delta=O(d)$ (см. [67]). *Линейными (δ,s,d)-сетками* называют (δ,s,d)-сетки, являющиеся линейными подпространствами в $\mathbb{Q}^d(2^s)$. Для любых натуральных d и s линейные (δ,s,d)-сетки D размерности s с $\delta=O(d\log d)$ могут быть заданы явными конструкциями (см. [16, лемма 2.1]).

Теорема 2. *Пусть $D\subset U^d$ — двоичная (δ,s,d)-сетка. Тогда для любого $q\geqslant 2$ среднее значение L_q-уклонений*

$$M_{s,q}[D]=\left(2^{-ds}\sum_{T\in\mathbb{Q}^d(2^s)}(\mathcal{L}_q[D\oplus T])^q\right)^{1/q} \tag{5}$$

удовлетворяет оценке

$$M_{s,q}[D]<\gamma(q,\delta,d)(s+1)^{(d-1)/2} \tag{6}$$

с постоянной $\gamma(q,\delta,d)=4^{\delta+d+1}q^{(d+1)/2}$.

Эта теорема доказана в [15] и является обобщением известной теоремы Чена [37, 40]. Для фиксированных d, δ, q оценка (6) является асимптотически точной при $s \to \infty$.

Для конечных множеств $D \subset U^d$ и усредняющих множеств $V \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$ определены условные средние L_q-уклонения

$$M_{s,q}[D;V] = \left(\operatorname{card}\{V\}^{-1} \sum_{Z \in V} (\mathcal{L}_q[D \oplus Z])^q\right)^{1/q}.$$

Видно, что в случае $V = \mathbb{Q}^d(2^s)$ эти средние совпадают с L_q-уклонениями (5). Основной результат работы [16] (теорема 2.1) позволяет оценивать условные средние $M_{s,q}[D;V]$ двоичных (δ, s, d)-сеток D через их безусловные L_q-уклонения. Ограничимся здесь формулировками двух доказанных в [16] предложений.

Напомним, что двоичная энтропия $\mathcal{H}(\lambda)$ определяется так, что $\mathcal{H}(0) = 0$ и

$$\mathcal{H}(\lambda) = -\lambda \log_2 \lambda - (1-\lambda)\log_2(1-\lambda), \quad 0 < \lambda \leqslant 1/2.$$

Функция $\mathcal{H}(\lambda)$ является возрастающей на отрезке $[0, 1/2]$ и принимает значения от 0 до 1. Для произвольного $q \geqslant 2$ через m_q обозначается целая часть числа $q/2$.

Предложение 2. *Для любого целого m, $1 \leqslant m < s/4$, существует линейное подпространство $V(m,d) \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$, удовлетворяющее следующим условиям:*

(i) размерность пространства $V(m,d)$ оценивается неравенствами

$$\dim\{V(m,d)\} \leqslant ds\mathcal{H}\left(\frac{2m}{s}\right) \leqslant 4dm\log_2(ds);$$

(ii) для любой линейной (δ, s, d)-сетки $D \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$ и любой точки $T \in \mathbb{Q}^d(2^s)$ верно равенство

$$M_{s,2m}[D \oplus T, V(m,d)] = M_{s,2m}[D] + d2^\delta \theta(T),$$

где $|\theta(T)| \leqslant 1$. Более того, для каждого $q \geqslant 2$ с $m_q \leqslant m$ имеет место оценка

$$M_{s,q}[D \oplus T, V(m,d)] < \beta(q,\delta,d)(s+1)^{(d-1)/2},$$

где $\beta(q,\delta,d)$ выражается через постоянную в оценке (6) по формуле

$$\beta(q,\delta,d) = \gamma(2m,\delta,d) + d2^\delta. \tag{7}$$

Усредняющие подпространства $V(m,d)$ могут быть явно построены с использованием известной конструкции BCH-кодов (см. [76]).

Предложение 3. *Пусть $D \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$ — линейная (δ, s, d)-сетка. Предположим, что вес Хэмминга двойственного пространства $D^\perp \subset \mathbb{Z}^d_+(2^s)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ удовлетворяет оценке $\varkappa(D^\perp) > 2md$. Тогда для всех $T \in \mathbb{Q}^d(2^s)$ имеет место соотношение*

$$\mathcal{L}_{2m}[D \oplus T] = M_{s,2m}[D] + d2^\delta \theta(T),$$

где $|\theta(T)| \leqslant 1$. Более того, для всех $T \in \mathbb{Q}^d(2^s)$ и для любого показателя q с $m_q \leqslant m$ имеет место оценка

$$\mathcal{L}_q[D \oplus T] < \beta(q,\delta,d)(s+1)^{(d-1)/2},$$

с постоянной $\beta(q,\delta,d)$, указанной в (7).

Таким образом, существуют линейные (δ, s, d)-сетки, для которых условные средние L_q-уклонения почти не зависят от сдвигов T и фактически совпадают со своими средними. Существуют также линейные (δ, s, d)-сетки, для которых предельно точные порядки L_q-уклонений достигаются для всех показателей $q = O(s)$; подробности и обобщения см. в [16, 33, 41, 73], [14, § 14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. — Баку: Элм, 1981.
2. *Андреев Н. Н., Юдин В. А.* Экстремальные расположения точек на сфере// Мат. просвещение. — 1997. — *3*, № 1. — С. 115–125.
3. *Беспалов М. С.* Дискретное преобразование Крестенсона// Пробл. передачи информ. — 2010. — *46*, № 4. — С. 91–115.
4. *Виленкин Н. Я.* Об одном классе полных ортогональных систем// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1947. — *11*. — С. 363–400.
5. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. — М., 2008.
6. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
7. *Залманзон Л. А.* Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. — М.: Наука, 1989.
8. *Истомина М. Н., Певный А. Б.* О расположении точек на сфере и фрейме Мерседес–Бенц// Мат. просвещение. — 2007. — *3*, № 11. — С. 105–112.
9. *Кашин Б. С., Куликова Т. Ю.* Замечание об описании фреймов общего вида// Мат. заметки. — 2002. — *72*, № 6. — С. 941–945.
10. *Малла С.* Вейвлеты в обработке сигналов. — М.: Мир, 2005.
11. *Малоземов В. Н, Машарский С. М.* Основы дискретного гармонического анализа. — СПб: Лань, 2012.
12. *Наймарк М. А.* Спектральные функции симметрического оператора// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1940. — *4*, № 3. — С. 277–318.
13. *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. — М: Физматлит, 2006.
14. *Реброва И. Ю., Чубариков В. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М.* О классических теоретико-числовых сетках// Чебышев. сб. — 2018. — *19*, № 4. — С. 118–176.
15. *Скриганов М. М.* Неравенство Хинчина и теорема Чена// Алгебра и анализ. — 2011. — *23*, № 4. — С. 179–204.
16. *Скриганов М. М.* О средних значениях L_q-уклонений точечных распределений// Алгебра и анализ. — 2012. — *24*, № 6. — С. 196–225.
17. *Соболь И. М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. — М.: Наука, 1969.
18. *Темляков В. Н.* Некогерентные системы и покрытия в конечномерных банаховых пространства// Мат. сб. — 2014. — *205*, № 5. — С. 97–116.
19. *Терехин П. А.* Фреймы в банаховом пространстве// Функц. анал. прилож. — 2010. — *44*, № 3. — С. 50–62.
20. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах// Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — *69*, № 3. — С. 193–220.
21. *Фарков Ю. А.* Биортогональные всплески на группах Виленкина// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2009. — *265*. — С. 110–124.
22. *Фарков Ю. А.* Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина—Крестенсона// Мат. заметки. — 2011. — *89*, № 6. — С. 914–928.
23. *Фарков Ю. А.* Ортогональные всплески в анализе Уолша// в кн.: Современные проблемы математики и механики. Т. XI. Вып. 1. Математика. (Лукашенко Т. П., Солодов А. П., ред.)/ К 80-летию В. А. Скворцова. Обобщенные интегралы и гармонический анализ. — М.: Изд-во МГУ, 2016. — С. 62–75.
24. *Фарков Ю. А.* Параметрические множества для фреймов в анализе Уолша// Вестн. Евраз. ун-та им. Л. Н. Гумилева. Сер. Мат. Информ. Мех. — 2018. — *124*, № 3. — С. 89–94.
25. *Фарков Ю. А.* Дискретные вейвлет-преобразования в анализе Уолша// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2019. — *160*. — С. 126–136.
26. *Фарков Ю. А.* Конечные фреймы Парсеваля в анализе Уолша// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2019. — *170*. — С. 118–128.
27. *Фарков Ю. А.* Конечные жесткие фреймы в анализе Уолша// Мат. 20 Междунар. Саратов. зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 28 января — 1 февраля 2020 г.). — Саратов: Научная книга, 2020. — С. 425–432.
28. *Фарков Ю. А., Робакидзе М. Г.* Фреймы Парсеваля и дискретное преобразование Уолша// Мат. заметки. — 2019. — *106*, № 3. — С. 457–469.

29. *Фарков Ю. А., Строганов С. А.* О дискретных диадических вейвлетах для обработки изображений// Изв. вузов. Мат. — 2011. — № 7. — С. 57–66.
30. *Фролов К. К.* Оценка сверху дискрепанса в метрике L_p, $2 \leqslant p < \infty$// Докл. АН СССР. — 1980. — *252*, № 4. — С. 805–807.
31. *Чернов В. М.* Арифметические методы синтеза быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований. — М.: Физматлит, 2007.
32. *Albrecht A., Howlett P., Verma G.* Optimal splitting of Parseval frames using Walsh matrices// Poincaré J. Anal. Appl. — 2018. — *252*, № 2. — P. 39–58.
33. *Alexander J. R., Beck J., Chen W. W. L.* Geometric discrepancy theory and uniform distributions// in: Handbook of Discrete and Computational Geometry (*Goodman J. E.*, ed.). — Boca Raton, Florida: CRC Press, 2017. — P. 331–357.
34. *Balonin N. A., Doković D. Ž., Karbovskiy D. A.* Construction of symmetric Hadamard matrices of order 4ν for $\nu = 47, 73, 113$// Spec. Matrices. — 2018. — *6*. — P. 11–22.
35. *Balonin N. A., Seberry J.* Computer construction conjecture for symmetric Hadamard matrices// Math. Sci. — 2018. — *43*, № 2. — P. 137–143.
36. *Beck J.* Strong Uniformity and Large Dynamical Systems. — Hackensack, New Jersey: World Scientific, 2018.
37. *Beck J., Chen W. W. L.* Strong Uniformity and Large Dynamical Systems. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.
38. *Bilyk D., Dai F.* Geodesic distance Riesz energy on the sphere// Trans. Am. Math. Soc. — 2019. — *372*, № 5. — P. 3141–3166.
39. *Bilyk D., Dick J., Pillichshammer F., eds.* Discrepancy Theory. — Berlin: De Gruyter, 2020.
40. *Chen W. W. L.* On irregularities of distribution, II// Q. J. Math., Oxf. II. Ser. — 1983. — *34*. — P. 257–279.
41. *Chen W., Skriganov M.* Upper bounds in classical discrepancy theory// in: A panorama of discrepancy theory. — Springer, 2014. — P. 3–69.
42. *Christensen O.* An Inroduction to Frames and Riesz Bases. — Boston: Birkhäuser, 2016.
43. *Davenport H.* Note on irregularities of distributions// Mathematika. — 1956. — *6*, № 3. — P. 131–135.
44. *Dong B., Shen Z.* MRA-based wavelet frames and application// Math. Image Process. — 2013. — *19*. — P. 7–158.
45. *Drmota M., Tichy R. F.* Sequences, Discrepancies and Applications. — Berlin: Springer-Verlag, 1997.
46. *Edwards R. E., Gaudry G. I.* Littlewood–Paley and Multiplier Theory. — Berlin: Springer-Verlag, 1977.
47. *Farkov Yu. A.* Wavelets and frames based on Walsh–Dirichlet type kernels// Commun. Math. Appl. — 2010. — *1*, № 1. — P. 27–46.
48. *Farkov Yu. A.* Examples of frames on the Cantor dyadic group// J. Math. Sci. — 2012. — *187*, № 1. — P. 22–34.
49. *Farkov Yu. A.* Constructions of MRA-based wavelets and frames in Walsh analysis// Poincaré J. Anal. Appl. — 2015. — № 2. — P. 13–36.
50. *Farkov Yu. A., Lebedeva E. A., Skopina M. A.* Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties// Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. — 2015. — *13*, № 5. — 1550036.
51. *Farkov Yu. A.* Nonstationary multiresolution analysis for Vilenkin groups// Proc. Int. Conf. on Sampling Theory and Applications (Tallinn, Estonia, July 3-7, 2017)). — Tallinn, 2017. — P. 595–598.
52. *Farkov Yu. A.* Wavelet tight frames in Walsh analysis// Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp. — 2019. — *49*. — P. 161–177.
53. *Farkov Yu. A.* Wavelet frames related to Walsh functions// Eur. J. Math. — 2019. — *5*, № 1. — P. 250–267.
54. *Farkov Yu. A., Manchanda P., Siddiqi A. H.* Construction of Wavelets through Walsh Functions. — Singapore: Springer, 2019.
55. *Farkov Yu. A., Rodionov E. A.* On biorthogonal discrete wavelet bases// Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. — 2015. — *13*, № 1. — 1550002.
56. *Fickus M., Jasper J., King E. J., Mixon D. G.* Equiangular tight frames that contain regular simplices// Linear Algebra Appl. — 2018. — *555*. — P. 98–138.
57. *Fickus M., Jasper J., Mixon D. G., Peterson J.* Tremain equiangular tight frames// J. Combin. Theory. Ser. A. — 2018. — *153*. — P. 54–66.
58. *Fickus M., Jasper J., Mixon D. G., Peterson J. D., Watson C. E.* Equiangular tight frames with centroidal symmetry// Appl. Comput. Harmon. Anal. — 2018. — *44*, № 2. — P. 476–496.

59. *Fickus M., Jasper J., Mixon D. G., Peterson J. D., Watson C. E.* Polyphase equiangular tight frames and abelian generalized quadrangles// Appl. Comput. Harmon. Anal. — 2019. — *47*, № 3. — P. 628–661.
60. *Fickus M., Mixon D. G., Tremain J. C.* Steiner equiangular tight frames// Linear Algebra Appl. — 2012. — *436*, № 5. — P. 1014–1027.
61. *Fickus M., Schmitt C. A.* Harmonic equiangular tight frames comprised of regular simplices// Linear Algebra Appl. — 2020. — *586*. — P. 130–169.
62. *Gajić D. B., Stanković R. S.* Computation of the Vilenkin–Chrestenson transform on a GPU// J. Multiple Valued Log. Soft Comput. — 2015. — *24*, № 1-4. — P. 317–340.
63. *Han D., Kornelson K., Larson D., Weber E.* Frames for Undergraduates. — N.Y.: Am. Math. Soc., 2008.
64. *Hewitt E., Ross K. A.* Abstract Harmonic Analysis. Vol. I: Structure of Topological Groups, Integration Theory, Group Representations. — Berlin: Springer-Verlag, 1994.
65. *Krivoshein A. V., Lebedeva E. A.* Uncertainty principle for the Cantor dyadic group// J. Math. Anal. Appl. — 2015. — *423*, № 2. — P. 1231–1242.
66. *Krivoshein A., Protasov V., Skopina M.* Multivariate Wavelet Frames. — Singapore: Springer, 2016.
67. *Niederreiter H., Xing C.* Nets, (t, s)-sequences, and algebraic geometry// in: Random and Quasi-Random Point Sets (*Hellekalek P. et al.*, eds.). — NY: Springer, 1998. — P. 267–302.
68. *Roth K. F.* On irregularities of distribution, III// Acta Arithm. — 1979. — *35*. — P. 373–384.
69. *Roth K. F.* On irregularities of distribution, IV// Acta Arithm. — 1980. — *37*. — P. 67–75.
70. *Schipp F., Wade W. R., Simon P.* Walsh Series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. — New York: Adam Hilger, 1990.
71. *Seberry J., Wysocki B. J., Wysocki T. A.* On some applications of Hadamard matrices// Metrika. — 2005. — *62*, № 2. — P. 221–239.
72. *Seberry J.* Orthogonal Designs. Hadamard Matrices, Quadratic Forms and Algebras. — Cham: Springer, 2017.
73. *Skriganov M. M.* Dyadic shift randomization in classical discrepancy theory// Mathematika. — 2016. — *62*, № 1. — P. 183–209.
74. *Stanković R. S., Butzer P. L., Schipp F., Wade W. R. (eds.)* Dyadic Walsh Analysis from 1924 onwards Walsh–Gibbs–Butzer Dyadic Differentiation in Science. Vol. 2. Extensions and Generalizations. — Amsterdam: Atlantis Press, 2015.
75. *Stevens M.* The Kadison–Singer Property. — Berlin: Springer, 2016.
76. *van Lint J. H.* Introduction to Coding Theory. — Berlin: Springer, 1999.
77. *Waldron S.* An Introduction to Finite Tight Frames. — New York: Birkhäuser, 2018.

Фарков Юрий Анатольевич
Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при президенте Российской Федерации, Москва
E-mail: `farkov@list.ru, farkov-ya@ranepa.ru`