А. Д. Баев, А. А. Бабайцев, В. Д. Харченко, Теорема об ограниченности одного класса псевдодифференциальных уравнений с вырождением, *Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021, том 193, 3–10

DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-3-10

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 193 (2021). С. 3–10
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-3-10

УДК 517.956

ТЕОРЕМА ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

© 2021 г. **А. Д. БАЕВ, А. А. БАБАЙЦЕВ, В. Д. ХАРЧЕНКО**

Аннотация. Статья посвящена доказательству теоремы об ограниченности для одного класса псевдодифференциальных уравнений с вырождением. Рассматривается новый класс переменных символов, зависящих также от комплексного параметра. Псевдодифференциальные операторы построены по специальному интегральному преобразованию. Теорема об ограниченности таких операторов доказывается в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева.

Ключевые слова: псевдодифференциальный оператор с вырождением, теорема об ограниченности, весовое пространство Соболева.

BOUNDEDNESS THEOREM FOR ONE CLASS OF PSEUDODIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DEGENERATION

© 2021 **A. D. BAEV, A. A. BABAITSEV, V. D. KHARCHENKO**

Abstract. In this paper, we prove a boundedness theorem for one class of pseudodifferential equations with degeneration. We consider a new class of variable symbols depending on a complex parameter. Pseudodifferential operators are constructed by a special integral transformation. The boundedness theorem for these operators is proved in special weighted Sobolev-type spaces.

Keywords and phrases: pseudodifferential operator with degeneration, boundedness theorem, weighted Sobolev space.

AMS Subject Classification: 35S05

1. Введение. Вырождающиеся дифференциальные уравнения используются при моделировании различных физических процессов, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнений, так и их порядок. Такие уравнения используются при исследовании стационарных процессов конвекции — диффузии в неоднородных анизотропных средах, характерных тем, что при приближении к границе коэффициент диффузии стремится к нулю. В частности, к таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде процессов фильтрации двухфазных жидкостей, в том числе, процессов вытеснения нефти водой из пористой среды. Подобные уравнения возникают при моделировании процесса распространения примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся во внешнем электрическом поле, при исследовании

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 14.Z50.31.0037) и Российского научного фонда (проект № 19.11.00197).

стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием, при расчете линейных стационарных магнитных осесимметричных полей в неоднородных анизотропных средах. Такие уравнения являются также обобщением сингулярно возмущенных уравнений конвекции — диффузии. Кроме того, известно, что нахождение решения краевой задачи для эллиптического уравнения эквивалентно минимизации некоторого функционала. В теории управления задача о минимуме некоторого функционала соответствует задаче об оптимальном управлении. Вырождающимся эллиптическим уравнениям соответствуют вырожденные или особые оптимальные управления.

Краевые задачи для вырождающихся уравнений относятся к «неклассическим» задачам математической физики. Основная трудность, возникающая в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Вырождающиеся эллиптические уравнения второго порядка и граничные задачи для них достаточно хорошо изучены. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат М. В. Келдышу [15]. Полученные им результаты затем развивались и обобщались О. А. Олейник [18]. Обобщенные решения вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка впервые были рассмотрены в работах С. Г. Михлина [17] и М. И. Вишика [12]. Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при «степенном» характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [13]. Затем ряд результатов для некоторых классов вырождающихся уравнений высокого порядка был получен В. П. Глушко [14], С. З. Левендорским [16], А. Д. Баевым, Р. А. Ковалевским, А. А. Бабайцевым [1–5, 7, 9, 10].

Настоящая работа посвящена доказательству теоремы об ограниченности одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящим также от комплексного параметра.

В работе систематически используется специальное интегральное преобразование F_α, введенное в [1]. Преобразование F_α позволяет ввести в рассмотрение специальный класс весовых псевдодифференциальных операторов. Весовые псевдодифференциальные операторы с постоянным по y символом были изучены в [1], а в [6, 8, 11] были исследованы некоторые классы весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом.

В работе исследуются весовые псевдодифференциальные операторы с переменным по t символом, зависящим от комплексного параметра, из класса $S^{\sigma}_{\alpha,p}$, $p \in Q = \{p \in \mathbb{C}, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > 0\}$. Доказывается теорема об ограниченности таких операторов в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева.

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in \mathbb{R}^1_+$, для которой выполняются условия: $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \mathrm{const}$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp\left[i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right] \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \tag{1}$$

которое определено первоначально на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1_+)$. Здесь $C_0^\infty(\mathbb{R}^1_+)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций, носитель которых принадлежит $\mathbb{R}^1_+$. Преобразование (1) и преобразование Фурье

$$F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \exp(i\eta\tau) d\tau, \quad \eta \in \mathbb{R}^1$$

связаны следующим соотношением

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)], \tag{2}$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции

$$\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}.$$

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)} = \sqrt{2\pi}\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^1_+)}. \tag{3}$$

Равенство (3) дает возможность расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(\mathbb{R}^1)$ и $L_2(\mathbb{R}^1_+)$, а также рассмотреть преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\big|_{\tau=\varphi(t)}.$$

Можно показать, что для функции $u(t) \in C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}}^1_+)$ справедливы равенства

$$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

где

$$D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)} \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Определим пространства $H_{s,\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$, $H_{s,\alpha,q}(\mathbb{R}^n_+)$ следующим образом.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$ (s — действительное число) состоит из всех функций пространства $L_2(\mathbb{R}^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v, |p|\|^2_{s,\alpha} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2\right)^s \left|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,y)]\right|^2 d\xi d\eta, \tag{4}$$

зависящая от комплексного параметра $p \in Q = \{p \in \mathbb{C},\ |\arg p| < \pi/2,\ |p| > 0\}$.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}(\mathbb{R}^n_+)$ ($s \geqslant 0, q > 1$) состоит из всех функций $v(x,y) \in H_{s,\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v, |p|\|_{s,\alpha,q} = \left\{\sum_{l=0}^{[s/q]} \left\|F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha\left[\left(|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2\right)^{(s-ql)/2} F_\alpha F_{x\to\xi}\left[\partial^l_y v\right]\right]\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n_+)}\right\}^{1/2}, \tag{5}$$

зависящая от комплексного параметра. Здесь $[s/q]$ — целая часть числа s/q.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует такое число $\nu \in (0,1]$, что

$$\left|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)\right| \leqslant c < \infty, \quad t \in [0, +\infty).$$

Кроме того, $\alpha(y) \in C^{s_1}[0, +\infty)$ для некоторого $s_1 \geqslant 2N - |\sigma|$, где

$$N \geqslant \max_{0\leqslant p_1\leqslant l}\left\{2p_1 + \frac{l - p_1 + 3/2}{\nu} + 1,\ \sigma + 1,\ \sigma + \frac{l}{2}\right\}, \quad l = 1, 2, \ldots,$$

σ — некоторое действительное число.

Можно показать, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}\ldots F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$G^{(\sigma)}(p, t, D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) = F_\alpha^{-1}F^{-1}_{\xi\to x}[g(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[v(x,t)]]. \tag{6}$$

Определение 3. Будем говорить, что символ $g(p,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $G^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,y})$ принадлежит классу символов $S^{\sigma,p}_{\alpha,\rho}(\Omega)$, где $\Omega\subset\bar{\mathbb{R}}^1_+$, $\sigma\in\mathbb{R}^1$, $p\in Q=\{p\in\mathbb{C},\ |\arg p|<\pi/2,\ |p|>0\}$, если функция $g(p,t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t\in\Omega$ и по переменной $\eta\in\mathbb{R}^1$, причем при всех $j=0,1,2,\ldots$, $l=0,1,2,\ldots$ справедливы оценки

$$\left|(\alpha(t)\partial_t)^j\partial^l_\eta\lambda(p,t,\xi,\eta)\right|\leqslant c_{jl}\big(|p|^2+|\xi|+|\eta|\big)^{\sigma-\rho l} \tag{7}$$

с константами $c_{jl}>0$, не зависящими от $p\in Q$, $\xi\in\mathbb{R}^{n-1}$, $\eta\in\mathbb{R}^1$, $\rho\in(0;1]$, $t\in K$, где $K\subset\Omega$ — произвольный отрезок. Здесь σ — действительное число.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $g(p,t,\xi,\eta)\in S^{m,p}_{\alpha,\rho}(\Omega)$, m — действительное число, $p\in Q=\{p\in\mathbb{C},\ |\arg p|<\pi/2,\ |p|>0\}$. Тогда весовой псевдодифференциальный оператор $G(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ для любого действительного s есть ограниченный оператор из $H_{s+m,\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$ в $H_{s,\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$.*

2. Схема доказательства теоремы 1.

Заметим, что

$$\big\|G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^1_+)}=\int\limits_0^\infty\Big|F^{-1}_\alpha\big[g(p,t,\xi,\eta)F_\alpha[u]\big]\Big|^2dt=$$

$$=\int\limits_0^\infty\left|\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}\Big[g\big(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta\big)F_{\tau\to\eta}\big[u_\alpha(\tau)\big]\Big]\right|^2\Bigg|_{\tau=\varphi(t)}dt.$$

Сделав замену переменной $t=\varphi^{-1}(\tau)$, получим $dt=(\varphi^{-1}(\tau))'_\tau d\tau=-\alpha(t)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}d\tau$. Таким образом, получаем равенство

$$\big\|G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^1_+)}=\int\limits_{-\infty}^\infty\Big|F^{-1}_{\eta\to\tau}\Big[g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}\big[u_\alpha(\tau)\big]\Big]\Big|^2d\tau=$$

$$=\Big\|F^{-1}_{\eta\to\tau}\Big[g\big(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta\big)F_{\tau\to\eta}\big[u_\alpha(\tau)\big]\Big]\Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^1)}=\Big\|G\big(p,\tau,\xi,D_\tau\big)u_\alpha(\tau)\Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^1)}. \tag{8}$$

Следовательно, норма оператора $G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1_+)$ равна норме оператора $G(p,\tau,\xi,D_\tau)$, определенного в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $g(p,t,\xi,\eta)\in S^{0,p}_{\alpha,\rho}(\Omega)$, $\Omega\subset\bar{\mathbb{R}}^1_+$, $p\in Q=\{p\in\mathbb{C},\ |\arg p|<\pi/2,\ |p|>0\}$. Тогда существует такая константа $c>0$, что для любой функции $u(t)\in C^\infty_0(\mathbb{R}^1_+)$ справедлива оценка*

$$\big\|G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u\big\|_{L_2(\mathbb{R}^1_+)}\leqslant c\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^1_+)} \tag{9}$$

с константой $c>0$, не зависящей от параметра p.

Доказательство. Докажем вначале теорему 2 при следующем дополнительном предположении. Будем считать, что $g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)=0$ при $|\tau-a|>A$, где $A>0$ — некоторое число, $a\in\mathbb{R}^1$.

Рассмотрим равенство

$$f(\tau)=\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-i\tau\eta}p(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]d\eta.$$

Перейдя в этом равенстве к преобразованию Фурье, получим

$$\tilde f(z)=\int\limits_{-\infty}^\infty\tilde g_1(p,z-\eta,\xi,\eta)\tilde u_\alpha(\eta)d\eta, \tag{10}$$

где

$$g_1(p,\tau,\xi,\eta)=g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta),\quad \tilde g_1(p,z,\xi,\eta)=F_{\tau\to z}[g_1(p,\tau,\xi,\eta)],\quad \tilde u_\alpha(\eta)=F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)].$$

С помощью интегрирования по частям в интеграле

$$\tilde g_1(p,z,\xi,\eta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau z} g_1(p,\tau,\xi,\eta)d\tau$$

получим, что с некоторыми константами $c>0$ выполняются неравенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\tilde g_1(p,z-\eta,\xi,\eta)|\,d\eta\leqslant c\int\frac{d\eta}{(|p|+|\eta|)^2},\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}|\tilde g_1(p,z-\eta,\xi,\eta)|\,dz\leqslant c\int\frac{dz}{(|p|+|z|)^2}.$$

Отсюда и из (10) выводим неравенство

$$\|\tilde f(z)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}\leqslant c\|u_\alpha(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}. \tag{11}$$

Заметив, что

$$\|u_\alpha(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}=\|u(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^1_+)}, \tag{12}$$

получаем из (11) утверждение теоремы 2 при дополнительном предположении.

Докажем теперь теорему 2 в общем случае. Выберем некоторое $A>0$ и установим, что для любого $a\in\mathbb{R}^1$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{|\tau-a|\leqslant A}\left|G(p,\tau,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)\right|^2d\tau\leqslant$$

$$\leqslant c\left\{\int\limits_{|\tau-a|\leqslant 3A}|u_\alpha(\tau)|^2\,d\tau+\int\limits_{|\tau-a|\leqslant A}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(p,\tau-y)|u(y)|dy\right)^2d\tau\right\}, \tag{13}$$

где $r(p,z)=(|p|+|z|)^{-2}$. Константа c не зависит от выбора функции $u(t)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1_+)$ и $a\in\mathbb{R}^1$. Пусть $\varphi(\tau)$ — такая основная функция с носителем в шаре $|\tau|\leqslant 3A$, что $\varphi(\tau)=1$ в шаре $|\tau|\leqslant 2A$, причем $|\varphi(\tau)|\leqslant 1$. Тогда для оператора $\varphi(\tau-a)P(\tau,\xi,D_\tau)$ символ равен нулю при $|\tau-a|>3A$ и мы можем воспользоваться доказанной только что оценкой:

$$\left\|\varphi(\tau-a)G(p,\tau,\xi,D_\tau)v_\alpha(\tau)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}\leqslant c\|v_\alpha(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}=c\|v(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^1_+)}, \tag{14}$$

причем из предыдущих рассуждений видно, что константа $c>0$ не зависит от $v(t)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1_+)$ и $a\in\mathbb{R}^1$.

Обозначим $f(p,\tau)=G(p,\tau,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)$ и заметим, что при $|\tau-a|\leqslant 2A$ справедливо равенство

$$f(p,\tau)=\varphi(\tau-a)G(p,\tau,\xi,D_\tau)\big[\varphi(\tau-a)u_\alpha(\tau)\big]+G(p,\tau,\xi,D_\tau)\big[(1-\varphi(\tau-a))u_\alpha(\tau)\big].$$

Воспользовавшись неравенством (14), получим оценку

$$\Big\|\varphi(\tau-a)G(p,\tau,\xi,D_\tau)\big[\varphi(\tau-a)u_\alpha(\tau)\big]\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}\leqslant c\big\|\varphi(\tau-a)u_\alpha(\tau)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^1)};$$

следовательно,

$$\int\limits_{|\tau-a|\leqslant A}\Big|g(p,\tau,\xi,D_\tau)\big[\varphi(\tau-a)u_\alpha(\tau)\big]\Big|^2d\tau\leqslant c\int\limits_{|\tau-a|\leqslant 3A}|u_\alpha(\tau)|^2d\tau. \tag{15}$$

Так как $1-\varphi(\tau-a)=0$ в шаре $|\tau-a|\leqslant 2A$, то

$$G(p,\tau,\xi,D_\tau)\big[(1-\varphi(\tau-a))u_\alpha(\tau)\big]=\int\limits_{|y-a|>2A}k(p,\tau,\xi,\tau-y)(1-\varphi(y-a))u_\alpha(y)dy,$$

где $k(p,\tau,\xi,z)$ — ядро псевдодифференциального оператора $G(p,\tau,\xi,D_\tau)$.

Заметим, что

$$\left|\partial_\tau^i \partial_\eta^l g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)\right| \leqslant c_{il}\bigl(|p|+|\xi|+|\eta|\bigr)^{m-\rho l}.$$

По определению ядра имеем

$$k(p,\tau,\xi,z)=F^{-1}_{\eta\to z}\bigl[g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)\bigr].$$

Так как преобразование Фурье любой абсолютно интегрируемой функции является непрерывной и ограниченной функцией, то можно утверждать, что функция $z^q\partial_\tau^i\partial_z^j k(p,\tau,\xi,z)$ для любых i, j при $q>m+j+1$ будет непрерывной и ограниченной функцией при всех $\tau\in\mathbb{R}^1$, $z\in\mathbb{R}^1$ и

$$|z|^q|\partial_\tau^i\partial_z^j k(p,\tau,\xi,z)|\leqslant c_{ij}<\infty,$$

т.е. при всех $z\neq 0$ справедливо неравенство

$$\left|\partial_\tau^i\partial_z^j k(p,\tau,\xi,z)\right|\leqslant c_{ij}|z|^{-q}. \tag{16}$$

Из (16) получим, что

$$|k(p,\tau,\xi,\tau-y)|\leqslant c(|p|+|\tau-y|)^{-2}\quad \text{при } |\tau-y|\geqslant A.$$

Отсюда при $|\tau-a|\geqslant A$ получаем, что

$$\Bigl|G\bigl(p,\tau,\xi,D_\tau\bigr)\bigl[(1-\varphi(\tau-a))u_\alpha(\tau)\bigr]\Bigr|\leqslant c\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bigl(|p|+|\tau-y|\bigr)^{-2}|u(y)|dy. \tag{17}$$

Неравенство (13) вытекает теперь из неравенств (15) и (17).

Чтобы закончить доказательство теоремы, достаточно в неравенстве (13) выбрать $A=1$ и просуммировать неравенства (13) по всем a, принадлежащим множеству целых чисел. Так как отрезки $|\tau-a|\leqslant 1$ покрывают все $\mathbb{R}^1$, причем каждая точка $\tau\in\mathbb{R}^1$ принадлежит не более чем двум таким отрезкам, то получим, что с некоторой константой выполняется неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bigl|G(p,\tau,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)\bigr|^2d\tau\leqslant c\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|u_\alpha(\tau)|^2d\tau+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}(|p|+|\tau-y|)^{-2}|u_\alpha(y)|dy\right)^2d\tau\right\}.$$

Остается заметить, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bigl(|p|+|\tau-y|\bigr)^{-2}|u_\alpha(y)|dy\right)^2d\tau\leqslant c\int\limits_{-\infty}^{\infty}|u_\alpha(\tau)|^2d\tau=c\int\limits_{0}^{\infty}|u(t)|^2dt. \qquad \square$$

Теорема 3. *Пусть $g(p,t,\xi,\eta)\in S^m_{\alpha,p}(\Omega)$ $(m\in\mathbb{R})$, $\Omega\subset\bar{\mathbb{R}}^1_+$, $p\in Q=\bigl\{p\in\mathbb{C},\ |\arg p|<\pi/2,\ |p|>0\bigr\}$. Тогда весовой псевдодифференциальный оператор $G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ для любого действительного s есть ограниченный оператор из $H_{s+m,\alpha}(\mathbb{R}^1_+)$ в $H_{s,\alpha}(\mathbb{R}^1_+)$.*

Доказательство. Из (8) вытекает, что достаточно доказать, что оператор $G(p,\tau,\xi,D_\tau)$, определенный в (11), является ограниченным оператором из $H_{s+m}(\mathbb{R}^1)$ в $H_s(\mathbb{R}^1)$.

Обозначим через $\Lambda^s(p,\xi,D_\tau)$ псевдодифференциальный оператор вида

$$\Lambda^s(p,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)=F^{-1}_{\eta\to\tau}\Bigl[\bigl(|p|+|\xi|+|\eta|\bigr)^sF_{\tau\to\eta}\bigl[u_\alpha(\tau)\bigr]\Bigr]. \tag{18}$$

Заметим, что для функции $u(t)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1_+)$ справедливо равенство

$$\bigl\|G(p,\tau,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)\bigr\|_s=\Bigl\|\Lambda^s(p,\xi,D_\tau)G(p,\tau,\xi,D_\tau)\Lambda^{-m-s}(p,\xi,D_\tau)v(\tau)\Bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}, \tag{19}$$

где $v(\tau)=\Lambda^{s+m}(p,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)$, $\|\cdot\|_s$ — норма в пространстве $H_s(\mathbb{R}^1)$.

Заметим, что $\Lambda^s(p,\xi,D_\tau)G(p,\tau,\xi,D_\tau)\Lambda^{-m-s}(p,\xi,D_\tau)$ — псевдодифференциальный оператор с символом из класса $S_\rho^{0,p}$. Таким образом, из (19) в силу теоремы 2 получим

$$\begin{aligned}\left\|G(p,\tau,\xi,D_{\alpha,t})u\right\|_{s,\alpha} &= \left\|G(p,\tau,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)\right\|_s = \\ &= \left\|\Lambda^s(p,\xi,D_\tau)G(p,\tau,\xi,D_\tau)\Lambda^{-m-s}(p,\xi,D_\tau)v(\tau)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^1)} \leqslant \\ &\leqslant c\|v(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)} \leqslant c\|u(t),|p|\|_{s+m,\alpha}.\end{aligned}$$

Теорема 3 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баев А. Д.* Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы// Докл. АН СССР. — 1982. — *265*, № 5. — С. 1044–1046.
2. *Баев А. Д.* Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка// Докл. РАН. — 2008. — *422*, № 6. — С. 727–728.
3. *Баев А. Д., Бахтина Ж. И., Бунеев С. С., Ковалевский Р. А., Бабайцев А. А.* О существовании решений граничных задач в полупространстве для некоторых классов вырождающихся псевдодифференциальных уравнений// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — *2*. — С. 64–76.
4. *Баев А. Д., Бахтина Ж. И., Бунеев С. С., Ковалевский Р. А., Бабайцев А. А.* Об априорных оценках решений граничных задач для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — *2*. — С. 77–92.
5. *Баев А. Д., Бахтина Ж. И., Бунеев С. С., Ковалевский Р. А., Бабайцев А. А., Леженина И. Ф., Глушко А. В.* Об априорных оценках решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — *3*. — С. 64–76.
6. *Баев А. Д., Кобылинский П. А.* О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов// Докл. РАН. — 2015. — *460*, № 2. — С. 133–135.
7. *Баев А. Д., Ковалевский Р. А., Бабайцев А. А., Харченко В. Д.* О существовании решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — *4*. — С. 51–66.
8. *Баев А. Д., Ковалевский Р. А., Кобылинский П. А.* О вырождающихся эллиптических уравнениях высокого порядка и псевдодифференциальных операторах с вырождением// Докл. РАН. — 2016. — *471*, № 4. — С. 387–390.
9. *Баев А. Д., Найдюк Ф. О., Бабайцев А. А., Харченко В. Д., Леженина И. Ф., Плетнева О. К.* О некоторых начально-краевых задачах для вырождающихся параболических уравнений// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2019. — *1*. — С. 59–69.
10. *Баев А. Д., Панков В. В., Харченко В. Д.* Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — *4*. — С. 161–171.
11. *Баев А. Д., Работинская Н. И.* О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 1. — С. 7–10.
12. *Вишик М. И.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области// Мат. сб. — 1954. — *35 (77)*, № 33. — С. 513–568.
13. *Вишик М. И., Грушин В. В.* Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы// Усп. мат. наук. — 1970. — *25*, № 4. — С. 29–56.
14. *Глушко В. П.* Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка// в кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными. Тр. семин. акад. С. Л. Соболева. — Новосибирск, 1978. — С. 49–68.
15. *Келдыш М. В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области// Докл. АН СССР. — 1951. — *77*, № 2. — С. 181–183.
16. *Левендорский С. З.* Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе// Мат. сб. — 1980. — *111 (153)*, № 4. — С. 483–501.

17. *Михлин С. Г.* Вырождающиеся эллиптические уравнения// Вестн. Ленинград. ун-та. — 1954. — *8*. — С. 19–48.
18. *Олейник О. А.* Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области// Докл. АН СССР. — 1952. — *87*, № 6. — С. 885–887.

Баев Александр Дмитриевич
Воронежский государственный университет
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Бабайцев Андрей Александрович
Воронежский государственный университет
E-mail: 259608@mail.ru

Харченко Виктория Дмитриевна
Воронежский государственный университет
E-mail: dmitrieva9696@gmail.com