П. А. Крылов, А. А. Туганбаев, А. В. Царев, Вокруг Теоремы Бэра—Капланского, *Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 159, 46–67

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 159 (2019). С. 46–67

УДК 512.541

ВОКРУГ ТЕОРЕМЫ БЭРА—КАПЛАНСКОГО

© 2019 г. П. А. КРЫЛОВ, А. А. ТУГАНБАЕВ, А. В. ЦАРЕВ

Аннотация. На примере модулей и ряда известных абелевых групп демонстрируется метод Капланского доказательства теорем изоморфизма для колец эндоморфизмов.

Ключевые слова: абелева группа, кольцо эндоморфизмов, теорема изоморфизма для колец эндоморфизмов, теорема Бэра—Капланского, метод Капланского.

AROUND BAER–KAPLANSKY THEOREM

© 2019 P. A. KRYLOV, A. A. TUGANBAEV, A. V. TSAREV

Abstract. Using the example of modules and a number of familiar Abelian groups, we demonstrate the Kaplansky method of proving isomorphism theorems for endomorphism rings.

Keywords and phrases: Abelian group, endomorphism ring, isomorphism theorem for endomorphism rings, Baer–Kaplansky theorem, Kaplansky method.

AMS Subject Classification: 16D10, 16D70, 20K30

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Одной из центральных проблем о кольцах эндоморфизмов является вопрос о том, насколько кольцо эндоморфизмов определяет абелеву группу или модуль. В самой простой формулировке результаты, положительно решающие эту проблему (их обычно называют *теоремами изоморфизма для колец эндоморфизмов*), имеют следующий вид: если $\operatorname{End} A \cong \operatorname{End} B$, то $A \cong B$. Более сильная формулировка теоремы об изоморфизме выглядит так: данный кольцевой изоморфизм $\psi : \operatorname{End} A \to \operatorname{End} B$ индуцируется некоторым групповым или модульным изоморфизмом

Работа А. А. Туганбаева выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10013).

$\varphi : A \to B$, т.е. $\psi(h) = \varphi h \varphi^{-1}$, $h \in \mathrm{End}\, A$. (В случае модулей, как правило, возникают полулинейные изоморфизмы модулей.) Теоремы подобного рода связаны со следующей задачей: для каких модулей все автоморфизмы их колец эндоморфизмов являются внутренними автоморфизмами?

На кольце эндоморфизмов можно задать конечную топологию и рассматривать непрерывные изоморфизмы колец эндоморфизмов. Они несут больше информации об исходных модулях. В таком случае говорят о *теоремах топологического изоморфизма.*

Данная статья носит обзорный характер. Ее цель — дать подробное изложение нескольких характерных теорем изоморфизма для колец эндоморфизмов модулей и абелевых групп. Что примечательно, для доказательства этих теорем применяется та или иная модификация метода Капланского.

Разделы 1 и 2 содержат некоторые необходимые сведения об абелевых группах и их кольцах эндоморфизмов. Здесь же принимаются соглашения об обозначениях и терминах.

В разделе 3 рассматривается конечная топология на кольце эндоморфизмов. Оставшиеся разделы 4–7 посвящены теоремам изоморфизма для колец эндоморфизмов, причем в разделе 4 рассматривается классический случай векторных пространств над телами и полями. Здесь возникает наиболее прозрачная ситуация для данной проблемы. В разделе 5 доказана теорема Бэра—Капланского для p-групп. Она может служить эталоном для теорем подобного рода. В разделе 6 доказана одна теорема топологического изоморфизма. В последнем разделе показано, что для p-групп с неограниченными базисными подгруппами в теореме Бэра—Капланского можно ограничиться изоморфизмом между радикалами Джекобсона колец эндоморфизмов.

1. Некоторые определения и обозначения в теории абелевых групп

Под словом «группа» будем понимать аддитивно записанную абелеву группу, за исключением случая группы автоморфизмов. Чаще всего обозначаем группу буквой A или G.

В теории абелевых групп исключительно важная роль принадлежит прямым суммам и прямым произведениям. Прямую сумму групп $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обозначаем $A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$ или $\bigoplus_{i=1}^{n} A_i$. Символ $\bigoplus_{i \in I} A_i$ обозначает прямую сумму множества групп A_i, $i \in I$.

Порядком $o(a)$ элемента a группы A называется наименьшее число $n \in \mathbb{N}$, для которого $na = 0$. Если такого n не существует, то полагают $o(a) = \infty$ и говорят, что элемент a *имеет бесконечный порядок.*

Каждая абелева группа относится к одному из следующих трех классов групп: периодические группы, группы без кручения и смешанные группы. В периодической группе всякий элемент имеет конечный порядок, в группе без кручения, напротив, все ненулевые элементы имеют бесконечный порядок. Смешанная группа содержит как ненулевые элементы конечного порядка, так и элементы бесконечного порядка. В смешанной группе A подгруппа $t(A)$, состоящая из всех элементов конечного порядка, называется *периодической частью* или *периодической подгруппой* группы A.

Примарной группой или *p-группой* называется группа, порядки элементов которой являются степенями фиксированного простого числа p. Периодическая группа A равна прямой сумме p-групп $t_p(A)$ для различных p, называемых *p-компонентами* группы A. Если A — смешанная группа, то ее p-компонентой называется p-компонента ее периодической части $t(A)$.

Существует несколько известных классов групп, являющихся прямыми суммами циклических групп. Группа называется *ограниченной*, если порядки всех ее элементов ограничены некоторым натуральным числом. Ограниченная группа есть прямая сумма циклических p-групп. Если всякий элемент периодической группы A имеет порядок, не делящийся на квадрат, то A называется *элементарной* группой. Элементарная группа является прямой суммой циклических групп простых порядков.

Подгруппа H группы A называется *вполне инвариантной*, если $\alpha H \subseteq H$ для каждого эндоморфизма α группы A. Периодическая часть группы, ее p-компоненты суть вполне инвариантные подгруппы. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$nA = \{na \mid a \in A\}, \quad A[n] = \{a \in A \mid na = 0\}.$$

Подгруппы nA и $A[n]$ вполне инвариантны в A.

Пусть p — некоторое простое число, A — группа и $a \in A$. Наибольшее неотрицательное целое число k, для которого уравнение $p^k x = a$ имеет решение в A, называется *p-высотой* $h_p^A(a)$ элемента a в группе A. Если уравнение $p^k x = a$ разрешимо при любом натуральном k, то a называется элементом бесконечной p-высоты, $h_p^A(a) = \infty$. Если ясно, о каких A и p идет речь, то пишем $h_p(a)$ и $h(a)$ и называем $h(a)$ высотой элемента a.

Говорят, что подгруппа B группы A *чиста* (в A), если уравнение $nx = b \in B$, имеющее решение в группе A, имеет решение и в подгруппе B. Подгруппа B будет чистой в точности тогда, когда $B \cap nA = nB$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Приведем некоторые факты о свободных и делимых группах. Свободная группа является прямой суммой некоторого числа копий группы $\mathbb{Z}$. Делимая группа D есть прямая сумма квазициклических групп $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ для различных p и копий группы $\mathbb{Q}$,

$$D = \bigoplus_p \bigoplus_{\mathfrak{m}_p} \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \bigoplus_{\mathfrak{m}_0} \mathbb{Q}.$$

Кардинальные числа $\mathfrak{m}_0$ и $\mathfrak{m}_p$ по всем p составляют полную и независимую систему инвариантов делимой группы D. Группа называется редуцированной, если она не имеет делимых подгрупп, отличных от нуля. Любая группа представима в виде $A = D \oplus V$, где D — делимая, а V — редуцированная группы. Подгруппа D определяется однозначно; ее называют *делимой частью* группы A. Подгруппа V называется *редуцированной частью* группы A. Она определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Всякую группу A можно вложить в качестве подгруппы в делимую группу E, причем в E нет собственных делимых подгрупп, содержащих A. Такая группа E называется *делимой оболочкой* группы A. Любые две делимые оболочки E_1 и E_2 изоморфны над A, т.е. существует изоморфизм $E_1 \to E_2$, оставляющий элементы из A на месте.

Подгруппа B p-группы A называется *базисной*, если выполнены следующие три условия:

1) B — прямая сумма циклических групп;
2) B есть чистая подгруппа группы A;
3) фактор-группа A/B является делимой группой.

Всякая p-группа содержит базисные подгруппы. Любые две базисные подгруппы изоморфны между собой.

Пусть B — базисная подгруппа группы A. Запишем

$$B = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus \ldots, \quad \text{где} \quad B_n = \bigoplus_{\mathfrak{m}_n} \mathbb{Z}_{p^n}.$$

Имеют место прямые разложения

$$A = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus A_n \quad \text{и} \quad A_n = B_{n+1} \oplus A_{n+1}$$

для каждого n. При этом группа A_n не содержит циклических прямых слагаемых порядков $\leqslant p^n$.

Для p-групп большое значение имеют следующие классические результаты Куликова.

Теорема 1.1 (см. [7, теорема 27.5, следствие 27.2])**.** *Всякая ограниченная чистая подгруппа является прямым слагаемым. Каждый элемент порядка p и конечной высоты некоторой p-группы можно вложить в ее циклическое прямое слагаемое.*

Отсюда можно вывести, что если элемент x p-группы A имеет конечную высоту, то существует такое разложение $A = \langle y \rangle \oplus Y$, что элемент x имеет ненулевую компоненту в $\langle y \rangle$.

В теории абелевых групп часто используются $\mathbb{Z}$-адическая и p-адическая топологии. Базис окрестностей нуля группы A в $\mathbb{Z}$-адической топологии образуют подгруппы nA, $n \in \mathbb{N}$. В p-адической топологии в качестве базиса берут подгруппы $p^k A$, $k \geqslant 0$. Строение полных в этих топологиях групп известно (см. [7, гл. 7], [3, секция 11]). Они обладают полной и независимой системой инвариантов, состоящей из кардинальных чисел. Класс полных в $\mathbb{Z}$-адической топологии групп совпадает с классом редуцированных алгебраически компактных групп.

Рангом $r(A)$ группы без кручения A называется мощность некоторой максимальной линейно независимой системы элементов группы A, а *p-рангом* $r_p(A)$ группы A называется размерность векторного пространства A/pA над полем $\mathbb{Z}_p$:

$$r_p(A) = \dim_{\mathbb{Z}_p}(A/pA).$$

Справедливо неравенство

$$r_p(A) \leqslant r(A).$$

Рангом без кручения смешанной группы A называют ранг фактор-группы $A/t(A)$. Обычно вместо «ранг без кручения» говорят просто «ранг». Группа без кручения имеет ранг 1 в точности тогда, когда она изоморфна некоторой подгруппе группы $\mathbb{Q}$.

Тензорное произведение групп без кручения — снова группа без кручения. Для группы без кручения A тензорное произведение $A \otimes \mathbb{Q}$ есть $\mathbb{Q}$-пространство, причем

$$r(A) = \dim_{\mathbb{Q}}(A \otimes \mathbb{Q}).$$

Имеется вложение групп $A \to A \otimes \mathbb{Q}$, $a \mapsto a \otimes 1$, $a \in A$. Группа $A \otimes \mathbb{Q}$ является делимой оболочкой группы A.

Для групп без кручения исключительно полезны понятия, связанные с делимостью элементов на простые числа. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ — последовательность всех простых чисел, упорядоченных по возрастанию. Последовательность p-высот

$$\chi(a) = \Big(h_{p_1}(a), h_{p_2}(a), \dots, h_{p_n}(a), \dots\Big)$$

называется *характеристикой элемента* a группы без кручения A. Пишут $\chi_A(a)$, если нужно указать группу, в которой вычисляются p-высоты и характеристики.

Под *характеристикой* $(k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)$ подразумеваем любую упорядоченную последовательность целых неотрицательных чисел и символов ∞. Характеристики можно сравнивать. Именно, считаем

$$\big(k_1, k_2, \dots, k_n, \dots\big) \leqslant \big(l_1, l_2, \dots, l_n, \dots\big),$$

если $k_n \leqslant l_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Это отношение $\leqslant$ превращает множество всех характеристик в полную решетку.

Введем теперь отношение эквивалентности на множестве всех характеристик, что приведет к основному понятию для групп без кручения — понятию типа. Две характеристики $(k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)$ и $(l_1, l_2, \dots, l_n, \dots)$ считаем эквивалентными, если $k_n \neq l_n$ лишь для конечного числа номеров n, причем для таких n символы k_n и l_n конечны.

Класс эквивалентности в множестве характеристик называется *типом*. Если $\chi(a) \in \mathbf{t}$ для некоторого типа $\mathbf{t}$, то говорят, что элемент a имеет тип $\mathbf{t}$ и пишут $\mathbf{t}(a) = \mathbf{t}$ или $\mathbf{t}_A(a) = \mathbf{t}$. Если $\chi(a) = (k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)$, то пишут

$$\mathbf{t}(a) = \big[(k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)\big] = \big[(k_i)\big],$$

т.е. тип представляется характеристикой, принадлежащей этому типу. Порядок на множестве характеристик индуцирует порядок на множестве типов.

Группа без кручения A, в которой все ненулевые элементы имеют один и тот же тип $\mathbf{t}$, называется *однородной типа* $\mathbf{t}$. При этом пишут $\mathbf{t}(A) = \mathbf{t}$. Группа ранга 1 является однородной. По одной из теорем Бэра группы без кручения A и B ранга 1 изоморфны в том и только в том случае, когда $\mathbf{t}(A) = \mathbf{t}(B)$.

Группа без кручения A называется *вполне разложимой*, если она является прямой суммой групп ранга 1. Любые два разложения вполне разложимой группы в прямую сумму групп ранга 1 изоморфны. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ — вполне разложимая группа без кручения, $r(A_i) = 1$, $i \in I$. Для всякого типа $\mathbf{t}$ обозначим через $A_{\mathbf{t}}$ прямую сумму всех групп A_i типа $\mathbf{t}$ (если таких нет, то $A_{\mathbf{t}} = 0$). Ранги $r(A_{\mathbf{t}})$, где $\mathbf{t}$ пробегает множество всех типов, образуют полную и независимую систему инвариантов группы A. Введем обозначение $\Omega(A) = \{\mathbf{t}(A_i) \mid i \in I\}$. Разложение

$$A = \bigoplus_{\mathbf{t} \in \Omega(A)} A_{\mathbf{t}}$$

называется *каноническим разложением* группы A.

Более широкий класс по сравнению с вполне разложимыми группами составляют сепарабельные группы. Группа без кручения A называется *сепарабельной*, если каждое конечное подмножество элементов из A содержится в некотором вполне разложимом прямом слагаемом группы A.

Абелевы группы и модули над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ можно не различать, это суть одни и те же объекты. Теорию абелевых групп можно считать ветвью теории модулей, в которой используется специфика кольца $\mathbb{Z}$. Все понятия и конструкции теории модулей применимы к абелевым группам.

В теории абелевых групп встречаются и различные другие кольца, кроме кольца $\mathbb{Z}$. Взгляд на абелевы группы как на модули над какими-то кольцами иногда бывает полезным. Так, делимые группы без кручения — это в точности векторные пространства над полем $\mathbb{Q}$. Модули над кольцом классов вычетов $\mathbb{Z}_{p^n}$ — это такие ограниченные p-группы, порядки элементов которых не превосходят p^n.

Важнейшим с точки зрения теории абелевых групп кольцом является кольцо целых p-адических чисел $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. Известно, что p-группы и примарные $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-модули совпадают. Полные в p-адической топологии группы естественным образом являются $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-модулями. Кольцо $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ является примером полной области дискретного нормирования. Теории абелевых групп и модулей над областями дискретного нормирования — родственные теории. Последняя довольно подробно изложена в книге [3].

2. Первичные свойства эндоморфизмов абелевых групп

Если A и B — абелевы группы, то $\operatorname{Hom}(A, B)$ — группа всех гомоморфизмов из A в B, $\operatorname{End} A$ (иногда $\operatorname{End}(A)$) — кольцо эндоморфизмов группы A.

Приведем некоторые элементарные свойства колец эндоморфизмов. Все они справедливы для колец эндоморфизмов произвольных модулей.

Пусть $A = B \oplus C$ — некоторое прямое разложение группы A. *Проекцией* группы A на прямое слагаемое B с ядром C называется гомоморфизм $\pi : A \to B$, определяемый следующим образом. Если $a \in A$ и $a = b + c$, где $b \in B$ и $c \in C$, то $\pi(a) = b$. Обозначим через $i : B \to A$ вложение группы B в группу A. Тогда $i\pi \in \operatorname{End} A$ и $(i\pi)^2 = i\pi$, т.е. $i\pi$ — идемпотент кольца $\operatorname{End} A$. Он называется *идемпотентным эндоморфизмом* группы A. Введем обозначение $\varepsilon = i\pi$. Будем отождествлять ε с π. Таким образом, считаем проекцию π эндоморфизмом группы A, действующим на B тождественно и аннулирующим C. Понятно, что $1 - \varepsilon$ — тоже идемпотент, ортогональный к ε. Кроме того, $B = \varepsilon A$, $C = (1 - \varepsilon)A = \ker \varepsilon$; таким образом, $A = \varepsilon A \oplus (1 - \varepsilon)A$. Полученное разложение справедливо для любого идемпотента ε кольца $\operatorname{End} A$.

Более общим образом, если $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$ — некоторое прямое разложение группы A, то, обозначив через ε_i проекцию $A \to A_i$ с ядром $\bigoplus_{j \neq i} A_j$, получим $A_i = \varepsilon_i A$ (($i = 1, 2, \ldots, n$), а $\{\varepsilon_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ — полная ортогональная система идемпотентных эндоморфизмов группы A.

Предложение 2.1. *Соответствие*

$$A = \varepsilon_1 A \oplus \ldots \oplus \varepsilon_n A \mapsto \operatorname{End} A = (\operatorname{End} A)\varepsilon_1 \oplus \ldots \oplus (\operatorname{End} A)\varepsilon_n,$$

где $\{\varepsilon_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ *— полная ортогональная система идемпотентов кольца* $\operatorname{End} A$*, между конечными прямыми разложениями группы* A *и разложениями кольца* $\operatorname{End} A$ *в прямые суммы левых идеалов является взаимно однозначным.*

Доказательство. Мы уже показали, что для данного прямого разложения $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$ существует такая полная система $\{\varepsilon_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ ортогональных идемпотентов кольца $\operatorname{End} A$, что $A_i = \varepsilon_i A$ при всех i. Эта система дает разложение $\operatorname{End} A = (\operatorname{End} A)\varepsilon_1 \oplus (\operatorname{End} A)\varepsilon_2 \oplus \ldots \oplus (\operatorname{End} A)\varepsilon_n$ кольца $\operatorname{End} A$ в прямую сумму левых идеалов.

Обратно, если $\operatorname{End} A = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n$, где L_i — левые идеалы кольца $\operatorname{End} A$, то, записав $1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$, $\varepsilon_i \in L_i$, получим полную ортогональную систему $\{\varepsilon_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ идемпотентов кольца $\operatorname{End} A$. Нетрудно убедиться, что имеет место разложение $A = \varepsilon_1 A \oplus \varepsilon_2 A \oplus \ldots \oplus \varepsilon_n A$. Построенное соответствие является взаимно однозначным. □

Рассмотрим несколько стандартных соотношений между группой и ее кольцом эндоморфизмов, связанных с идемпотентными эндоморфизмами. Из предложения 2.1 непосредственно вытекают следующие свойства.

(a) *Если* ε *— идемпотент кольца* $\operatorname{End} A$*, то* εA *будет неразложимым прямым слагаемым группы* A *тогда и только тогда, когда* ε *— примитивный идемпотент.*

(b) *Пусть* ε, ω *— идемпотенты кольца* $\operatorname{End} A$*. Существуют канонические изоморфизмы групп* $\operatorname{Hom}(\omega A, \varepsilon A) \cong \varepsilon(\operatorname{End} A)\omega$ *и колец* $\operatorname{End}(\varepsilon A) \cong \varepsilon(\operatorname{End} A)\varepsilon$*.*

Действительно, пусть $\varphi : \omega A \to \varepsilon A$ — некоторый гомоморфизм. Продолжим φ до эндоморфизма $\overline{\varphi}$ группы A, считая, что $\overline{\varphi}$ аннулирует дополнительное слагаемое $(1-\omega)A$ к ωA. Искомый изоморфизм $f : \operatorname{Hom}(\omega A, \varepsilon A) \to \varepsilon(\operatorname{End} A)\omega$ получается сопоставлением $\varphi \overset{f}{\longmapsto} \varepsilon\overline{\varphi}\omega$. В самом деле, если $\varepsilon\psi\omega \in \varepsilon(\operatorname{End} A)\omega$ для некоторого $\psi \in \operatorname{End} A$, то $\varepsilon\psi\omega|_{\omega A}$ есть гомоморфизм $\omega A \to \varepsilon A$ и $f : \varepsilon\psi\omega|_{\omega A} \mapsto \varepsilon\psi\omega$. При $\varepsilon = \omega$ имеем изоморфизм $\operatorname{End}(\varepsilon A) \cong \varepsilon(\operatorname{End} A)\varepsilon$, причем это кольцевой изоморфизм.

Пусть $A = B \oplus C$ и $\varepsilon : A \to B$ — проекция с ядром C. Можно считать $\operatorname{End} B$ подкольцом кольца $\operatorname{End} A$, если отождествить $\operatorname{End} B$ с $\varepsilon(\operatorname{End} A)\varepsilon$ при помощи построенного в свойстве (b) изоморфизма.

Рассмотрим два первичных факта о соотношении между изоморфизмами групп и изоморфизмами их колец эндоморфизмов.

(c) *Если группы* A *и* C *изоморфны, то их кольца эндоморфизмов изоморфны. Более точно, всякий групповой изоморфизм* $\varphi : A \to C$ *индуцирует кольцевой изоморфизм* $\psi : \operatorname{End} A \to \operatorname{End} C$*, действующий по закону* $\psi : \eta \mapsto \varphi\eta\varphi^{-1}$*,* $\eta \in \operatorname{End} A$*.*

Для $\eta_1, \eta_2 \in \operatorname{End} A$ имеем равенства

$$\psi(\eta_1 + \eta_2) = \psi(\eta_1) + \psi(\eta_2), \quad \psi(\eta_1\eta_2) = \psi(\eta_1)\psi(\eta_2), \quad \psi(id_A) = id_C.$$

Следовательно, ψ — гомоморфизм колец. Далее, если $0 \neq \eta \in \operatorname{End} A$, то ясно, что $\varphi\eta\varphi^{-1} \neq 0$, т.е. $\ker\psi = 0$. Пусть теперь $\xi \in \operatorname{End} C$; тогда $\psi(\varphi^{-1}\xi\varphi) = \xi$, а значит, ψ — кольцевой изоморфизм.

(d) *Пусть даны группы* $A = A_1 \oplus A_2$ *и* C*. Если* $\psi : \operatorname{End} A \to \operatorname{End} C$ *— изоморфизм колец, то группа* C *обладает разложением* $C = C_1 \oplus C_2$*, причем* ψ *индуцирует изоморфизмы* $\operatorname{End} A_i \to \operatorname{End} C_i$*,* $i = 1, 2$*.*

Обозначим через ε проекцию $A \to A_1$ с ядром A_2. Тогда $\omega = \psi(\varepsilon)$ — идемпотент кольца $\operatorname{End} C$. Получаем равенство $C = C_1 \oplus C_2$, где $C_1 = \omega C$ и $C_2 = \ker\omega$. Изоморфизм ψ индуцирует изоморфизм колец $\varepsilon(\operatorname{End} A)\varepsilon \to \omega(\operatorname{End} C)\omega$ и, значит, изоморфизм колец $\operatorname{End} A_1 \to \operatorname{End} C_1$ (см. свойство (b)). Второй изоморфизм $\operatorname{End} A_2 \to \operatorname{End} C_2$ устанавливается аналогично.

В ряде случаев кольцо эндоморфизмов можно легко вычислить. Например, $\operatorname{End}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$, $\operatorname{End}\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_n$, $\operatorname{End}\mathbb{Q}_p \cong \mathbb{Q}_p$, где $\mathbb{Q}_p = \{s/t \in \mathbb{Q} \mid (t,p) = 1\}$, $\operatorname{End}\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$, $\operatorname{End}\mathbb{Z}_{p^\infty} \cong \operatorname{End}\widehat{\mathbb{Z}}_p \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p$.

Рассматривая прямые суммы групп, можно получать примеры колец эндоморфизмов в матричной форме. Прежде рассмотрим соответствующую конструкцию.

Пусть дана прямая сумма групп $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$. Составим квадратную матрицу

$$(\alpha_{ji}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

с элементами $\alpha_{ji} \in \mathrm{Hom}(A_i, A_j)$. Для таких матриц можно определить обычные матричные операции сложения и умножения. Нетрудно убедиться, что сложение и умножение матриц всегда выполнимы и приводят к матрицам этого же вида. В результате получаем кольцо матриц указанного вида (такие кольца называют кольцами формальных или обобщенных матриц, см. [4–6]). Стандартный изоморфизм кольца операторов конечномерного векторного пространства кольцу матриц в случае абелевых групп (и модулей) принимает следующий вид.

Предложение 2.2. *Кольцо эндоморфизмов группы* $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$ *изоморфно кольцу всех матриц* (α_{ji}) *порядка* n*, где* $\alpha_{ji} \in \mathrm{Hom}(A_i, A_j)$.

Теперь можно продолжить список колец эндоморфизмов. Именно, справедливы изоморфизмы:

$$\mathrm{End}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}) \cong \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{End}(\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}) \cong \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_n & \mathbb{Z}_n \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{End}(\mathbb{Z}_{p^n} \oplus \mathbb{Z}_{p^m}) \cong \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{p^n} & \mathbb{Z}_{p^n} \\ \mathbb{Z}_{p^n} & \mathbb{Z}_{p^m} \end{pmatrix} \ (n < m), \quad \mathrm{End}(\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Q}) \cong \begin{pmatrix} \widehat{\mathbb{Z}}_p & \widehat{\mathbb{Q}}_p \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix},$$

где $\widehat{\mathbb{Q}}_p$ — поле p-адических чисел.

Область, изучающую кольца эндоморфизмов абелевых групп, можно отнести и к теории абелевых групп и к теории колец эндоморфизмов произвольных модулей. Книга [2] целиком посвящена различным аспектам теории колец эндоморфизмов абелевых групп.

3. Конечная топология

На кольце эндоморфизмов любого модуля можно задать одну весьма полезную топологию. Это так называемая конечная топология, являющаяся примером линейной топологии. *Линейная топология* на модуле (кольце) — это такая топология, при которой имеется базис окрестностей нуля, состоящий из подмодулей (левых идеалов), причем соответствующие смежные классы образуют базис открытых множеств. Примерами линейных топологий также являются $\mathbb{Z}$-адическая и p-адическая топологии на абелевых группах.

Пусть M — правый модуль над некоторым кольцом, $\mathrm{End}\, M$ — его кольцо эндоморфизмов. *Конечная топология* на кольце $\mathrm{End}\, M$ задается с помощью следующего подбазиса окрестностей нуля:

$$U_x = \{\alpha \in \mathrm{End}\, M \mid \alpha(x) = 0\},$$

где x пробегает все элементы модуля M. Понятно, что U_x — левые идеалы кольца $\mathrm{End}\, M$. Базис окрестностей нуля составляют идеалы

$$U_X = \{\alpha \in \mathrm{End}\, M \mid \alpha X = 0\},$$

где X пробегает все конечные подмножества модуля M. Поскольку верно равенство $U_X = \bigcap_{x \in X} U_x$, то базис окрестностей элемента $\alpha \in \mathrm{End}\, M$ составляют смежные классы $\alpha + U_X$ для всех конечных подмножеств X модуля M. Конечная топология всегда хаусдорфова. Сформулируем основную теорему о конечной топологии.

Теорема 3.1. *Кольцо эндоморфизмов любого модуля M является полным топологическим кольцом в конечной топологии.*

Доказательство. Поскольку U_x — левые идеалы, непрерывность сложения и вычитания в кольце $\operatorname{End} M$ очевидна. Проверим непрерывность умножения. Возьмем произвольные эндоморфизмы $\alpha, \beta \in \operatorname{End} M$, и пусть $\alpha\beta + U_x$ — окрестность элемента $\alpha\beta$. Так как $U_{\beta(x)}\beta \subseteq U_x$, то справедливо включение

$$(\alpha + U_{\beta(x)})(\beta + U_x) \subseteq \alpha\beta + U_x,$$

что дает требуемую непрерывность.

Итак, $\operatorname{End} M$ — топологическое кольцо. Покажем его полноту. Предположим, что $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ — последовательность Коши в кольце $\operatorname{End} M$. Согласно определениям конечной топологии и последовательности Коши, множество индексов I упорядочено с помощью порядка, двойственного к порядку на конечных подмножествах модуля M. Тогда для данного $x \in M$ существует такой $i_0 \in I$, что $\alpha_i - \alpha_j \in U_x$ при всех $i, j > i_0$. Это означает, что $\alpha_i(x) = \alpha_j(x)$ при достаточно больших индексах i и j. Определим эндоморфизм α модуля M, взяв в качестве $\alpha(x)$ общее значение всех таких $\alpha_i(x)$. Тогда $\alpha - \alpha_i \in U_x$ при $i > i_0$. Таким образом, α является пределом данной последовательности Коши $\{\alpha_i\}_{i\in I}$. Получили, что всякая последовательность Коши сходится в кольце $\operatorname{End} M$, что означает его полноту. □

При применении конечной топологии наиболее важны полнота кольца эндоморфизмов и непрерывные изоморфизмы между кольцами эндоморфизмов.

Иногда конечную топологию можно определить в терминах самого кольца эндоморфизмов.

Предложение 3.2. *Справедливы следующие утверждения*:

1. *Пусть V — векторное пространство над некоторым телом. Конечная топология кольца операторов $\operatorname{End} V$ пространства V будет определена, если в качестве подбазиса окрестностей нуля взять совокупность левых аннуляторов примитивных идемпотентов.*
2. *Пусть G — редуцированная p-группа. Конечную топологию кольца $\operatorname{End} G$ можно задать, взяв в качестве подбазиса окрестностей нуля совокупность левых аннуляторов элементов $\alpha\varepsilon$, где $\alpha \in \operatorname{End} G$ и ε — примитивный идемпотент. Если группа G не имеет элементов бесконечной высоты, то достаточно взять лишь левые аннуляторы примитивных идемпотентов.*
3. *Если G — сепарабельная группа без кручения, то конечную топологию кольца $\operatorname{End} G$ можно аналогично задать, взяв в качестве подбазиса окрестностей нуля совокупность левых аннуляторов примитивных идемпотентов.*

Доказательство. 1. Пусть x — произвольный вектор пространства V, X — подпространство, порожденное вектором x, и $\varepsilon : V \to X$ — проекция. Равенство $U_x = (\operatorname{End} V)(1-\varepsilon)$ означает, что U_x — левый аннулятор примитивного идемпотента ε.

2. Для каждого элемента $x \in G$ существует такое циклическое прямое слагаемое $\langle y\rangle$ группы G, что $o(x) \leqslant o(y)$. Следовательно, существует $\alpha \in \operatorname{End} G$, переводящий y в x. Пусть $\varepsilon : G \to \langle y\rangle$ — проекция. Тогда U_x — это в точности левый аннулятор элемента $\alpha\varepsilon$, причем ε — примитивный идемпотент. Если группа G не имеет элементов бесконечной высоты, то подбазисом окрестностей нуля для конечной топологии является совокупность левых идеалов U_x, где элемент x пробегает только такие элементы, что $\langle x\rangle$ — прямое слагаемое группы G. Если $\varepsilon : G \to \langle x\rangle$ — проекция, то, как и в п. 1, $U_x = (\operatorname{End} V)(1-\varepsilon)$.

3. Как и в п. 2, подбазис окрестностей нуля может быть задан как совокупность левых идеалов U_x, где x пробегает только такие элементы, что $\langle x\rangle_*$ — прямое слагаемое группы G (где $\langle x\rangle_*$ — чистая подгруппа, порожденная элементом x). □

4. Случай векторных пространств

Изоморфные группы, конечно, имеют изоморфные кольца эндоморфизмов. Обратная задача, в общем случае, намного более трудна. В самом общем виде ее можно сформулировать следующим образом: как связаны две группы, если их кольца эндоморфизмов изоморфны? Будут ли, например, эти группы изоморфны? Естественную формулировку этой проблемы подсказывает свойство (c) из раздела 2. Будет ли данный кольцевой изоморфизм $\psi : \operatorname{End} A \to \operatorname{End} B$ индуцироваться некоторым групповым изоморфизмов $\varphi : A \to B$, т.е. верна ли формула $\psi(\eta) = \varphi\eta\varphi^{-1}$ для всех $\eta \in \operatorname{End} A$?

При переходе к модулям возникают новые варианты формулировки указанной проблемы. Так, можно рассматривать модули над разными кольцами. В этой ситуации используются полулинейные изоморфизмы модулей. Пусть R и S — некоторые кольца, A — правый R-модуль, а B — правый S-модуль. Аддитивный изоморфизм $\varphi : A \to B$ называется *полулинейным изоморфизмом* модулей A и B, если имеется такой кольцевой изоморфизм $\tau : R \to S$, что $\varphi(ar) = \varphi(a)\tau(r)$ для всех $a \in A$ и $r \in R$. При этом говорят, что изоморфизм колец (или алгебр) эндоморфизмов $\psi : \operatorname{End}_R A \to \operatorname{End}_S B$ индуцируется полулинейным изоморфизмом $\varphi : A \to B$, если $\psi(\eta) = \varphi\eta\varphi^{-1}$, $\eta \in \operatorname{End}_R A$.

Этот и следующие два раздела непосредственно связаны с проблемой определяемости группы (модуля) ее кольцом эндоморфизмов. Прежде всего мы обратимся к случаю векторных пространств и их колец операторов. В силу простого (с точки зрения теории модулей) строения векторных пространств ряд идей и методов, которые мы будем далее применять, предстают здесь в довольно простом и непосредственном виде.

Будем рассматривать правые векторные пространства над телами.

Теорема 4.1 (Бэр [9]). *Пусть V и W — векторные пространства над телами D и F соответственно. Тогда всякий кольцевой изоморфизм между кольцами операторов $\operatorname{End}_D V$ и $\operatorname{End}_F W$ индуцируется некоторым полулинейным изоморфизмом между V и W.*

Доказательство. Пусть $\psi : \operatorname{End}_D V \to \operatorname{End}_F W$ — некоторый кольцевой изоморфизм. Далее для удобства будем писать α^* вместо $\psi(\alpha)$, где $\alpha \in \operatorname{End}_D V$. Зафиксируем ненулевой вектор $a \in V$. Пусть $\varepsilon : V \to aD$ — проекция, где aD — одномерное подпространство, порожденное вектором a. Тогда $aD = \varepsilon V$. Так как ε — идемпотент кольца $\operatorname{End}_D V$, то ε^* — идемпотент кольца $\operatorname{End}_F W$. Следовательно, $\varepsilon^* W$ — одномерное прямое слагаемое пространства W. Пусть b — некоторый ненулевой вектор из $\varepsilon^* W$. Тогда $bF = \varepsilon^* W$. Согласно свойству (b) из раздела 2 отождествляем кольца $\operatorname{End}_D(aD)$ и $\varepsilon(\operatorname{End}_D V)\varepsilon$, а также $\operatorname{End}_F(bF)$ и $\varepsilon^*(\operatorname{End}_F W)\varepsilon^*$. Следовательно, ψ индуцирует изоморфизм колец $\operatorname{End}_D(aD) \to \operatorname{End}_F(bF)$.

Теперь заметим следующее. Для фиксированного элемента $d \in D$ существует единственный оператор $\sigma_d \in \operatorname{End}_D(aD)$, действующий по правилу $\sigma_d(ad') = add'$, где $d' \in D$. В частности, $\sigma_d(a) = ad$. Соответствие $d \mapsto \sigma_d$ задает кольцевой изоморфизм $D \to \operatorname{End}_D(aD)$. Существует аналогичный изоморфизм $F \to \operatorname{End}_F(bF)$. Композицию изоморфизмов

$$D \to \operatorname{End}_D(aD) \xrightarrow{\psi} \operatorname{End}_F(bF) \to F$$

обозначим через τ. При этом верно равенство $\sigma_d^*(b) = b\tau(d)$.

Построим искомый полулинейный изоморфизм между V и W. Для произвольного вектора $x \in V$ выберем такой оператор α пространства V, что $x = \alpha(a)$. Определим отображение $\varphi : V \to W$, полагая $\varphi(x) = \alpha^*(b)$. Отображение φ задано корректно, т.е. не зависит от выбора оператора α. Действительно, если $x = \alpha_1(a)$ ($\alpha_1 \in \operatorname{End}_D(V)$), то $(\alpha - \alpha_1)(a) = 0$ и $(\alpha - \alpha_1)\varepsilon = 0$. Отсюда

$$\big((\alpha - \alpha_1)\varepsilon\big)^* = (\alpha^* - \alpha_1^*)\varepsilon^* = 0;$$

следовательно, $(\alpha^* - \alpha_1^*)(b) = 0$ и $\alpha^*(b) = \alpha_1^*(b)$.

Возьмем еще один вектор $y \in V$ и выберем $\beta \in \operatorname{End}_D V$ со свойством $y = \beta(a)$. Тогда $x + y = (\alpha + \beta)(a)$; значит,

$$\varphi(x + y) = (\alpha + \beta)^*(b) = \alpha^*(b) + \beta^*(b) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Итак, φ — аддитивный гомоморфизм.

Покажем, что φ — полулинейное отображение, т.е. убедимся в справедливости равенства $\varphi(xd) = \varphi(x)\tau(d)$ для любых $x \in V$ и $d \in D$. Пусть как и выше $x = \alpha(a)$. Тогда $xd = \alpha(a)d = \alpha(ad)$. Поскольку $\varphi(x) = \alpha^*(b)$, то

$$\varphi(x)\tau(d) = \alpha^*(b)\tau(d) = \alpha^*\big(b\tau(d)\big).$$

С другой стороны, из $xd = \alpha(ad) = \alpha\sigma_d(a)$ находим

$$\varphi(xd) = (\alpha\sigma_d)^*(b) = \alpha^*(\sigma_d^*(b)) = \alpha^*\big(b\tau(d)\big).$$

Таким образом, $\varphi(xd) = \varphi(x)\tau(d)$.

Если $\varphi(x) = \alpha^*(b) = 0$ для какого-то $x \in V$, то $(\alpha\varepsilon)^* = \alpha^*\varepsilon^* = 0$. Отсюда следует, что $\alpha\varepsilon = 0$ и $x = \alpha\varepsilon(a) = 0$, т.е. $\ker\varphi = 0$. Для каждого вектора $z \in W$ существует такой оператор $\gamma \in \operatorname{End}_F W$, что $z = \gamma(b)$. Пусть $\gamma = \alpha^*$ для какого-то $\alpha \in \operatorname{End}_D V$; тогда $z = \gamma(b) = \alpha^*(b) = \varphi(x)$, где $x = \alpha(a)$. Получили, что φ — биекция, иными словами, φ — полулинейный изоморфизм.

Возьмем произвольный оператор $\mu \in \operatorname{End}_D V$ и вектор $z \in W$. Выберем далее вектор $x \in V$ со свойством $z = \varphi(x)$ и оператор $\alpha \in \operatorname{End}_D V$, для которого $x = \alpha(a)$. Тогда $z = \varphi(x) = \alpha^*(b)$. Теперь можно записать равенства

$$\mu^*(z) = (\mu\alpha)^*(b) = \varphi\big(\mu\alpha(a)\big) = \varphi\mu(x) = (\varphi\mu\varphi^{-1})(z).$$

Таким образом, $\psi(\mu) = \mu^* = \varphi\mu\varphi^{-1}$, т.е. изоморфизм ψ индуцируется изоморфизмом φ. $\square$

Если пространство V имеет конечную размерность m, то кольцо $\operatorname{End}_D V$ изоморфно кольцу матриц $M_m(D)$ порядка m над телом D. Тогда можно записать следующий частный случай теоремы 4.1.

Следствие 4.2. *Если кольца $M_m(D)$ и $M_n(F)$ изоморфны, то $m = n$ и изоморфны тела D и F.*

Рассмотрим ситуацию, когда D и F являются полями. Отождествим любой элемент $d \in D$ с его действием на V. Говоря короче, будем считать, что D — это центр кольца $\operatorname{End}_D V$. Аналогичным образом отождествляем поле F с центром кольца $\operatorname{End}_F W$. При изоморфизме колец центр переходит в центр, поэтому в условиях теоремы 4.1 можно считать, что V и W — пространства над одним и тем же полем, скажем, F. Однако и в этом случае удается лишь доказать, что изоморфизм колец $\psi : \operatorname{End}_F V \to \operatorname{End}_F W$ индуцируется некоторым полулинейным изоморфизмом F-пространств $V \to W$.

Поскольку кольца $\operatorname{End}_F V$ и $\operatorname{End}_F W$ являются F-алгебрами, то естественно пойти дальше и считать, что ψ — изоморфизм F-алгебр, т.е. $\psi(s\alpha) = s\psi(\alpha)$ для всех $s \in F$ и $\alpha \in \operatorname{End}_F V$. При таком предположении, учитывая равенства $\psi(s \cdot id_V) = s\psi(id_V) = s \cdot id_W$, получаем, что изоморфизм F-алгебр $\operatorname{End}_F V$ и $\operatorname{End}_F W$ действует на F тождественно. И вообще, изоморфизмы между алгебрами эндоморфизмов $\operatorname{End}_F V$ и $\operatorname{End}_F W$ — это в точности кольцевые изоморфизмы, оставляющие элементы из центра на месте. Учитывая это, можно записать следующий результат.

Следствие 4.3. *Пусть V и W — векторные пространства над полем F. Тогда всякий изоморфизм алгебр эндоморфизмов $\operatorname{End}_F V$ и $\operatorname{End}_F W$ индуцируется некоторым изоморфизмом пространств V и W.*

Теоремы изоморфизма имеют одно важное применение. Пусть ψ — автоморфизм F-алгебры $\operatorname{End}_F V$. Согласно следствию 4.3 найдется такой автоморфизм (обратимый оператор) φ пространства V, что $\psi(\alpha) = \varphi\alpha\varphi^{-1}$ для всякого $\alpha \in \operatorname{End}_F V$. Поскольку автоморфизмы пространства V — это в точности обратимые элементы алгебры $\operatorname{End}_F V$, то последнее равенство означает, что ψ является внутренним автоморфизмом алгебры $\operatorname{End}_F V$.

Следствие 4.4. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Всякий автоморфизм алгебры эндоморфизмов векторного пространства над полем является внутренним.*
2. (Сколем, Нетер). *Всякий автоморфизм алгебры матриц $M_n(F)$ является внутренним.*

Доказательство Бэра теоремы 4.1 в [9] носит, можно сказать, геометрический характер. Метод, использованный нами в доказательстве теоремы 4.1, будем называть методом Капланского. Соответствующие рассуждения впервые появились в его книге [21]. Суть метода Капланского в следующем. Примитивные идемпотенты кольца операторов соответствуют неразложимым (т.е. в этом случае одномерным) подпространствам. Чтобы построить изоморфизм пространства V на пространство W, используется перенос свойств таких слагаемых при помощи операторов с целью получить нужные элементы пространства W. В том или ином виде метод Капланского мы применим еще несколько раз в оставшихся разделах этой статьи.

5. Теорема Бэра—Капланского

Сформулируем и докажем, пожалуй, самый известный результат на тему определяемости абелевой группы или модуля своим кольцом эндоморфизмов. Речь идет о следующей замечательной теореме.

Теорема 5.1 (Бэр [8], Капланский [21]). *Если A и C — периодические группы с изоморфными кольцами эндоморфизмов, то всякий кольцевой изоморфизм $\operatorname{End} A \to \operatorname{End} C$ индуцируется некоторым изоморфизмом групп $A \to C$.*

Доказательство. Можно ограничиться случаем p-групп. В самом деле, запишем

$$A = \bigoplus_{p \in P} t_p(A), \quad C = \bigoplus_{p \in P} t_p(C),$$

где $t_p(A)$ и $t_p(C)$ — p-компоненты групп A и C соответственно. Тогда

$$\operatorname{End} A = \prod_{p \in P} \operatorname{End} t_p(A), \quad \operatorname{End} C = \prod_{p \in P} \operatorname{End} t_p(C).$$

Так как

$$\operatorname{End} t_p(A) = \bigcap_{(n,p)=1} n \operatorname{End} A, \quad \operatorname{End} t_p(C) = \bigcap_{(n,p)=1} n \operatorname{End} C,$$

то всякий кольцевой изоморфизм $\operatorname{End} A \to \operatorname{End} C$ должен переводить $\operatorname{End} t_p(A)$ в $\operatorname{End} t_p(C)$. Поэтому достаточно предполагать, что A и C являются p-группами, что и будем делать.

Работаем далее с фиксированным кольцевым изоморфизмом $\psi : \operatorname{End} A \to \operatorname{End} C$. Для всякого $\eta \in \operatorname{End} A$ пишем $\psi(\eta) = \eta^*$.

Если A — циклическая или квазициклическая p-группа, то нетрудно понять, что $A \cong C$ (см. в разделе 2 о строении колец эндоморфизмов таких групп). Далее разобьем доказательство на три случая.

Случай 1: A — ограниченная группа. Тогда A является прямой суммой циклических p-групп. Пусть g — один из образующих элементов некоторого циклического прямого слагаемого группы A наибольшего порядка p^k. Если $\varepsilon : A \to \langle g \rangle$ — проекция, то ε — идемпотент кольца $\operatorname{End} A$, а ε^* — идемпотент кольца $\operatorname{End} C$. Следовательно, $\varepsilon^* C$ — прямое слагаемое группы C. Ввиду свойства (d) из раздела 2 изоморфизм ψ индуцирует изоморфизм колец $\operatorname{End}\langle g \rangle \to \operatorname{End}(\varepsilon^* C)$. Значит, $\varepsilon^* C$ — циклическая группа $\langle h \rangle$ порядка p^k. Теперь можем построить искомый изоморфизм $\varphi : A \to C$. Для произвольного элемента $a \in A$ выберем эндоморфизм $\eta \in \operatorname{End} A$, при котором $a = \eta(g)$, и определим отображение $\varphi : A \to C$ так, что $\varphi(a) = \eta^*(h)$. Проверка корректности задания отображения φ, того, что φ — изоморфизм и, наконец, того, что φ индуцирует ψ, аналогична тому, как это делалось в доказательстве теоремы 4.1.

Случай 2: $A = B \oplus D$, где B — ограниченная, а D — ненулевая делимая группы. Пусть $\langle g \rangle$ — циклическое прямое слагаемое максимального порядка p^k в группе B, E — прямое слагаемое группы D, изоморфное группе $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, и пусть

$$E = \langle d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots \rangle, \quad pd_1 = 0, \quad pd_{n+1} = d_n \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

Обозначим соответствующие проекции через $\varepsilon : A \to \langle g \rangle$ и $\pi : A \to E$. Так же, как и в первом случае, получаем, что $\varepsilon^* C$ — циклическое прямое слагаемое группы C, а $\pi^* C$ — прямое слагаемое группы C, изоморфное группе $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Зададим группы $\varepsilon^* C$ и $\pi^* C$ через их образующие:

$$\varepsilon^* C = \langle h \rangle, \quad \pi^* C = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots \rangle, \quad pe_1 = 0, \quad pe_{n+1} = e_n \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

Произвольный элемент $a \in A$ запишем в виде $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in B$, $a_2 \in D$, и возьмем такой эндоморфизм $\eta \in \operatorname{End} A$, что $\eta(g) = a_1$, $\eta(d_n) = a_2$ при некотором n. Построим отображение $\varphi : A \to C$, положив $\varphi(a) = \eta^*(h + e_n)$. Покажем сначала, что φ не зависит от выбора η и n. Возьмем такой $\eta_1 \in \operatorname{End} A$, что $\eta_1(g) = a_1$ и $\eta_1(d_m) = a_2$, причем можно считать, что $m \geqslant n$. Тогда получаем равенства

$$(\eta - \eta_1)(g) = 0, \quad (p^{m-n}\eta - \eta_1)(d_m) = 0.$$

Значит, $(\eta - \eta_1)\varepsilon = 0$, а эндоморфизм $(p^{m-n}\eta - \eta_1)\pi$ аннулирует $E[p^m]$. Последнее означает, что эндоморфизм $(p^{m-n}\eta - \eta_1)\pi$ делится на p^m. Тогда эндоморфизм $\big((p^{m-n}\eta - \eta_1)\pi\big)^*$ также делится на p^m, следовательно, он аннулирует элемент e_m. Таким образом, получаем, что $\eta^*(h) = \eta_1^*(h)$ и $\eta^*(e_n) = p^{m-n}\eta^*(e_m) = \eta_1^*(e_m)$, откуда $\eta^*(h + e_n) = \eta_1^*(h + e_m)$.

Относительно проверки того, что φ — изоморфизм, индуцирующий изоморфизм ψ, как и в первом случае, отсылаем к доказательству теоремы 4.1.

Случай 3: A имеет неограниченную базисную подгруппу. По свойствам базисных подгрупп (см. раздел 1) существуют такие разложения

$$A = \langle a_1 \rangle \oplus \langle a_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle a_k \rangle \oplus A_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

что $A_k = \langle a_{k+1} \rangle \oplus A_{k+1}$ и $o(a_k) = p^{n_k}$, где $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Пусть $\varepsilon_k : A \to \langle a_k \rangle$ — проекция. Для несовпадающих индексов j и k определим эндоморфизм γ_{jk} группы A следующим образом. Эндоморфизм γ_{jk} отображает прямое слагаемое в указанном выше разложении группы A дополнительное к $\langle a_k \rangle$ в 0. Кроме того, он переводит a_k в a_j (соответственно, в $p^{n_j - n_k} a_j$), если $j < k$ (соответственно, $j > k$). Тогда

(1) $\gamma_{jk}\varepsilon_k = \gamma_{jk} = \varepsilon_j\gamma_{jk}$ при всех $j \neq k$;
(2) $\gamma_{kj}\gamma_{jk} = p^{|n_j - n_k|}\varepsilon_k$ при всех $j \neq k$;
(3) $\gamma_{ij}\gamma_{jk} = \gamma_{ik}$, если $i < j < k$ или $i > j > k$.

Эндоморфизмы ε_k^* и γ_{jk}^* группы C также удовлетворяют условиям (1)–(3). Подгруппы $\varepsilon_k^* C$ — циклические прямые слагаемые группы C тех же порядков, что и группы $\varepsilon_k A$ (по свойству (d) из раздела 2). Ввиду условия (2) эндоморфизм $\gamma_{k,k+1}^*$ отображает $\varepsilon_{k+1}^* C$ в $\varepsilon_k^* C$. Положим $\varepsilon_k^* C = \langle c_k \rangle$ и покажем, что образующие c_k можно выбрать таким образом, чтобы $\gamma_{k,k+1}^*(c_{k+1}) = c_k$ при всех k. Действительно, если элементы $c_1, c_2, \ldots, c_k$ уже выбраны и элемент c_{k+1}' порождает подгруппу $\varepsilon_{k+1}^* C$, то $\gamma_{k,k+1}^*(c_{k+1}') = tc_k$ для некоторого $t \in \mathbb{Z}$. Далее из (2) находим $\gamma_{k+1,k}^*(tc_k) = p^{n_{k+1} - n_k} c_{k+1}'$, и рассмотрение порядков элементов показывает, что $(p, t) = 1$. Возьмем элемент $c_{k+1} = sc_{k+1}'$, где $st \equiv 1 (\mathrm{mod} p^{n_k})$. Тогда $\gamma_{k,k+1}^*(c_{k+1}) = c_k$. Более того, по свойству (3) имеем $\gamma_{jk}^*(c_k) = c_j$ для всех $j < k$.

Для произвольного элемента $a \in A$ выберем такой эндоморфизм $\eta \in \operatorname{End} A$, что $\eta(a_k) = a$ при некотором $k \in \mathbb{N}$. Определим отображение $\varphi : A \to C$, полагая $\varphi(a) = \eta^*(c_k)$. Убедимся, что отображение φ задано корректно. Пусть $\eta_1(a_j) = a$, где $\eta_1 \in \operatorname{End} A$ и $j \geqslant k$. Тогда $(\eta\gamma_{kj} - \eta_1)\varepsilon_j = 0$, откуда $(\eta^*\gamma_{kj}^* - \eta_1^*)\varepsilon_j^* = 0$, что означает $\eta^*(c_k) = \eta_1^*(c_j)$.

Наконец, как и в теореме 4.1 проверяется, что построенное отображение φ является изоморфизмом, индуцирующим изоморфизм ψ. □

Как и в случае векторных пространств получаем следствие об автоморфизмах периодических групп.

Следствие 5.2. *Всякий автоморфизм кольца эндоморфизмов периодической группы является внутренним.*

6. Топологические изоморфизмы колец эндоморфизмов

На кольце эндоморфизмов существует конечная топология, поэтому естественно рассмотреть непрерывные в обе стороны изоморфизмы колец эндоморфизмов. Они более точно определяют строение исходного модуля. Такие изоморфизмы будем называть *топологическими* и говорить о *теоремах топологического изоморфизма*. Итак, под топологическим изоморфизмом $\psi : \operatorname{End} A \to \operatorname{End} C$ понимаем такой кольцевой изоморфизм ψ, что ψ и ψ^{-1} непрерывны относительно конечной топологии. Непосредственно проверяется, что всякий групповой изоморфизм $A \to C$ индуцирует топологический кольцевой изоморфизм $\operatorname{End} A \to \operatorname{End} C$. Обратим еще внимание на то, что кольцевые изоморфизмы, фигурирующие в теоремах 4.1 и 5.1, являются топологическими. Это вытекает из предложения 3.2.

В этом разделе все группы не имеют кручения. Большинство встречающихся здесь понятий, связанных с группами без кручения, определяются в разделе 1. Дополнительно напомним, что тип называется идемпотентным, если он содержит характеристику, состоящую из символов 0 и ∞. Идемпотентность типа группы без кручения A ранга 1 равносильна тому, что A изоморфна аддитивной группе некоторого подкольца поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Каждая абелева группа A естественным образом является левым модулем над своим кольцом эндоморфизмов. Пусть A не имеет кручения. В таком случае $\mathbb{Q}$-алгебра $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q}$ называется кольцом квазиэндоморфизмов или алгеброй квазиэндоморфизмов группы A. Действие кольца $\operatorname{End} A$ на группе A продолжается до действия кольца $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q}$ на делимой оболочке $A \otimes \mathbb{Q}$ группы A. Таким образом получаем левый $(\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q})$-модуль $A \otimes \mathbb{Q}$.

Считаем группу A вложенной в $\mathbb{Q}$-пространство $A \otimes \mathbb{Q}$, отождествляя элемент $a \in A$ с элементом $a \otimes 1$. Такое же соглашение принимаем и относительно $\operatorname{End} A$ и $\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q}$.

Чистые вполне инвариантные подгруппы группы A кратко будем называть *pfi-подгруппами*. Нетрудно проверить, что соответствия

$$H \mapsto H \otimes \mathbb{Q}, \quad W \mapsto W \cap A$$

являются взаимно обратными изоморфизмами между решеткой pfi-подгрупп группы A и решеткой подмодулей $(\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q})$-модуля $A \otimes \mathbb{Q}$.

Напомним, что группа A называется *неприводимой*, если она не имеет собственных pfi-подгрупп. Неприводимость группы A равносильна неприводимости $(\operatorname{End} A \otimes \mathbb{Q})$-модуля $A \otimes \mathbb{Q}$.

Определение 6.1. Группа без кручения G называется *вполне транзитивной*, если для любых ее элементов $a, b \neq 0$, удовлетворяющих условию $\chi(a) \leqslant \chi(b)$, существует такой эндоморфизм $\alpha \in \operatorname{End} G$, что $\alpha(a) = b$.

Простейшими примерами вполне транзитивных групп являются однородные сепарабельные группы и алгебраически компактные группы.

Лемма 6.2. *Однородная вполне транзитивная группа без кручения G является неприводимой. Если дополнительно G имеет идемпотентный тип, то всякая ее чистая подгруппа содержит образующий элемент $\operatorname{End} G$-модуля G.*

Доказательство. Предположим, что H — ненулевая pfi-подгруппа группы G. Пусть $a \in H$ и $b \in G$ — некоторые ненулевые элементы. Выберем натуральное число n так, что $\chi(a) \leqslant \chi(nb)$. Тогда $\alpha(a) = nb$ для некоторого $\alpha \in \operatorname{End} G$. Отсюда в силу вполне инвариантности подгруппы H получаем, что $nb \in H$, а в силу ее чистоты — что $b \in H$. Следовательно, $H = G$ и, значит, G не содержит собственных pfi-подгрупп.

Если группа G имеет идемпотентный тип, то всякая ее ненулевая чистая подгруппа содержит элемент $a \neq 0$ с характеристикой $\chi(a)$, состоящей из 0 и ∞. Тогда $\chi(a) \leqslant \chi(b)$ для любого ненулевого элемента $b \in G$. Отсюда $b \in (\operatorname{End} G)a$ и $(\operatorname{End} G)a = G$, т.е. элемент a порождает $\operatorname{End} G$-модуль G. □

Теорема 6.3 (см. [1])**.** *Пусть G и H — однородные вполне транзитивные группы без кручения, типы которых идемпотентны. Тогда всякий топологический кольцевой изоморфизм между $\operatorname{End} G$ и $\operatorname{End} H$ индуцируется некоторым групповым изоморфизмом между G и H.*

Доказательство. Пусть $\psi : \operatorname{End} G \to \operatorname{End} H$ — некоторый топологический кольцевой изоморфизм. Для удобства введем следующие обозначения:

$$V = G \otimes \mathbb{Q}, \quad W = H \otimes \mathbb{Q}, \quad R = \operatorname{End} G \otimes \mathbb{Q}, \quad S = \operatorname{End} H \otimes \mathbb{Q}.$$

Тогда V — точный неприводимый R-модуль, W — точный неприводимый S-модуль (по лемме 6.2). Положим далее

$$D = \operatorname{End}_R V, \quad F = \operatorname{End}_S W, \quad K = \operatorname{End}_D V, \quad L = \operatorname{End}_F W.$$

Здесь D и F — тела согласно лемме Шура. По известной теореме плотности Джекобсона—Шевалле для неприводимых модулей кольцо R плотно в конечной топологии кольца K, а кольцо S плотно в конечной топологии кольца L.

Кольцо $\operatorname{End} G$ (соответственно, $\operatorname{End} H$) отождествляем с его образом при каноническом вложении $\operatorname{End} G \to R$ (соответственно, $\operatorname{End} H \to S$). Тогда конечная топология кольца $\operatorname{End} G$ (соответственно, $\operatorname{End} H$) совпадает с топологией, индуцированной конечной топологией кольца K (соответственно, L). Поэтому $\psi \otimes id_{\mathbb{Q}}$ будет топологическим изоморфизмом колец R и S, который также будем обозначать ψ. Так как R (соответственно, S) плотно в полном кольце K (соответственно, L), то ψ однозначно продолжается до изоморфизма колец $K \to L$, который снова обозначим через ψ. Как и ранее, условимся писать η^* вместо $\psi(\eta)$.

Пусть g — некоторый фиксированный образующий элемент $\operatorname{End} G$-модуля G (существующий по лемме 6.2). Обозначим через A подпространство D-пространства V, порожденное элементом g, и рассмотрим проекцию $\pi : V \to A$. Тогда $\pi \in K$ и $\pi^2 = \pi$. Отсюда $(\pi^*)^2 = \pi^*$ и $\pi^* : W \to \pi^* W$ — проекция. Кроме того,

$$D \cong \operatorname{End}_D A \cong \pi K \pi \cong \pi^* L \pi^* \cong \operatorname{End}_F(\pi^* W)$$

и, следовательно, $\dim_F(\pi^* W) = 1$ (по поводу изоморфизма $\operatorname{End}_D A \cong \pi K \pi$ и аналогичного изоморфизма для кольца L см. свойство (b) из раздела 2). Выберем в $\pi^* W \cap H$ некоторый элемент h, порождающий $\operatorname{End} H$-модуль H.

Определим отображение $\varphi : G \to H$ следующим образом. Для произвольного элемента $a \in G$ возьмем эндоморфизм $\eta \in \operatorname{End} G$ со свойством $a = \eta(g)$. Положим $\varphi(a) = \eta^*(h)$. Проверим, что действие φ не зависит от выбора эндоморфизма η. Если $a = \eta_1(g)$, где $\eta_1 \in \operatorname{End} G$, то $(\eta - \eta_1)(g) = 0$. Следовательно, $(\eta - \eta_1)\pi = 0$ ввиду одномерности D-пространства A. Отсюда $(\eta^* - \eta_1^*)\pi^* = 0$ и $(\eta^* - \eta_1^*)(h) = 0$, т.е. $\eta^*(h) = \eta_1^*(h)$. Таким образом, отображение φ задано корректно.

Осталось проверить, что φ — изоморфизм, индуцирующий изоморфизм ψ. В целом она повторяет соответствующие места в доказательстве теоремы 4.1. □

Конечно, в опосредованном виде доказательство теоремы 6.3 опирается на метод Капланского.

Применение теоремы 6.3 к самой однородной вполне транзитивной группе дает результат, подобный следствиям 4.4 и 5.2.

Следствие 6.4. *Всякий топологический автоморфизм кольца эндоморфизмов однородной вполне транзитивной группы без кручения идемпотентного типа является внутренним.*

Применим теорему 6.3 к однородным сепарабельным группам без кручения (определенным в разделе 1). В качестве легкого упражнения читателю предлагается доказать, что такая группа вполне транзитивна. Кроме того, из п. 3 предложения 3.2 получается, что всякий изоморфизм между кольцами эндоморфизмов двух сепарабельных групп без кручения является топологическим. Тогда получаем следующий результат.

Следствие 6.5. *Если G и H — однородные сепарабельные группы без кручения идемпотентных типов, то всякий изоморфизм $\operatorname{End} G \to \operatorname{End} H$ индуцируется некоторым изоморфизмом $G \to H$.*

Справедливо также следующее утверждение.

Следствие 6.6. *Пусть G и H — такие вполне разложимые группы без кручения, что типы всех однородных компонент этих групп идемпотентны. Тогда каждый изоморфизм $\operatorname{End} G \to \operatorname{End} H$ индуцируется некоторым изоморфизмом $G \to H$.*

Доказательство. Пусть канонические разложения групп G и H имеют вид

$$G = \bigoplus_{\mathbf{t}\in\Omega(G)} G_{\mathbf{t}}, \quad H = \bigoplus_{\mathbf{t}\in\Omega(H)} H_{\mathbf{t}},$$

где $G_{\mathbf{t}}$ и $H_{\mathbf{t}}$ — так называемые однородные компоненты групп G и H соответственно. Пусть $\psi : \operatorname{End} G \to \operatorname{End} H$ — некоторый кольцевой изоморфизм. Для каждого $\mathbf{t} \in \Omega(G)$ обозначим через $\varepsilon_{\mathbf{t}}$ проекцию $G \to G_{\mathbf{t}}$. Имеют место изоморфизмы

$$\operatorname{End} G_{\mathbf{t}} \cong \varepsilon_{\mathbf{t}}(\operatorname{End} G)\varepsilon_{\mathbf{t}} \cong \psi(\varepsilon_{\mathbf{t}})(\operatorname{End} H)\psi(\varepsilon_{\mathbf{t}}) \cong \operatorname{End}\big(\psi(\varepsilon_{\mathbf{t}})H\big).$$

Так как $G_{\mathbf{t}}$ — однородная группа идемпотентного типа, то $\psi(\varepsilon_{\mathbf{t}})H$ — тоже однородная группа идемпотентного типа. По следствию 6.5 получаем изоморфизм $G_{\mathbf{t}} \cong \psi(\varepsilon_{\mathbf{t}})H$, поэтому $\Omega(G) \subseteq \Omega(H)$. По симметрии получаем обратное включение. Таким образом, $\Omega(G) = \Omega(H)$.

Теперь можно построить изоморфизм из группы G в группу H методом Капланского. Для каждого типа $\mathbf{t} \in \Omega(G)$ зафиксируем прямое слагаемое $A_{\mathbf{t}}$ ранга 1 группы $G_{\mathbf{t}}$. Возьмем ненулевой элемент $a_{\mathbf{t}} \in A_{\mathbf{t}}$, характеристика которого состоит из символов 0 и ∞. Пусть $\pi_{\mathbf{t}} : G \to A_{\mathbf{t}}$ — проекция; тогда $\psi(\pi_{\mathbf{t}})H$ — прямое слагаемое ранга 1 группы $H_{\mathbf{t}}$. Выберем в $\psi(\pi_{\mathbf{t}})H$ ненулевой элемент $b_{\mathbf{t}}$ с характеристикой, состоящей из символов 0 и ∞. Тогда $\{a_{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in\Omega(G)}$ — система образующих $\operatorname{End} G$-модуля G и $\{b_{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t}\in\Omega(H)}$ — система образующих $\operatorname{End} H$-модуля H. Любой элемент a группы G может быть записан в виде

$$a = \alpha_{\mathbf{t}_1}(a_{\mathbf{t}_1}) + \alpha_{\mathbf{t}_2}(a_{\mathbf{t}_2}) + \ldots + \alpha_{\mathbf{t}_k}(a_{\mathbf{t}_k}),$$

где $\alpha_{\mathbf{t}_1}, \alpha_{\mathbf{t}_2}, \ldots, \alpha_{\mathbf{t}_k} \in \operatorname{End} G$. Тогда положим

$$\varphi(a) = \psi(\alpha_{\mathbf{t}_1})(b_{\mathbf{t}_1}) + \psi(\alpha_{\mathbf{t}_2})(b_{\mathbf{t}_2}) + \ldots + \psi(\alpha_{\mathbf{t}_k})(b_{\mathbf{t}_k}).$$

Как и в теоремах 4.1, 5.1 и 6.3, можно проверить, что отображение φ задано корректно и является изоморфизмом, индуцирующим изоморфизм ψ. □

В конце раздела, используя топологические изоморфизмы, распространим теорему Бэра—Капланского (теорему 5.1) на случай произвольных групп.

Отметим следующий полезный факт. Пусть A — группа, ε — некоторый идемпотент кольца $\operatorname{End} A$. Тогда канонический изоморфизм $\operatorname{End}(\varepsilon A) \cong \varepsilon(\operatorname{End} A)\varepsilon$, указанный в свойстве (b) раздела 2, является топологическим, если считать, что на $\operatorname{End}(\varepsilon A)$ задана конечная топология, а на $\varepsilon(\operatorname{End} A)\varepsilon$ — топология, индуцированная конечной топологией кольца $\operatorname{End} A$.

Напомним, что периодическая часть смешанной группы G (т.е. ее наибольшая периодическая подгруппа) обозначается $t(G)$. Кроме того, если G — периодическая группа, то $t(G) = G$; $t(G) = 0$ для группы без кручения G.

Теорема 6.7 (Мэй [23])**.** *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Пусть G и H — группы и $\psi : \operatorname{End} G \to \operatorname{End} H$ — топологический изоморфизм. Тогда существует такой изоморфизм $\varphi : t(G) \to t(H)$, что $\psi(\eta)$ и $\varphi\eta\varphi^{-1}$ совпадают на $t(H)$ для всякого $\eta \in \operatorname{End} G$.*

2. *Пусть T — периодическая, а H — произвольная группы. Тогда всякий топологический изоморфизм* $\operatorname{End} T \to \operatorname{End} H$ *индуцируется изоморфизмом* $T \to H$.

Доказательство. 1. Требуемый изоморфизм φ можно построить методом Капланского, ограничившись при этом периодическими частями групп G и H. Нужно лишь уточнить следующий момент. Если ε — идемпотент кольца $\operatorname{End} G$, причем $\varepsilon G \cong \mathbb{Z}_{p^k}$ $(k \geqslant 1)$, то ясно, что $\psi(\varepsilon)H \cong \mathbb{Z}_{p^k}$. Пусть $\varepsilon G \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$; тогда $\operatorname{End}(\varepsilon G) \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p$ ($\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо или группа целых p-адических чисел) и, следовательно, $\operatorname{End}\bigl(\psi(\varepsilon)H\bigr) \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p$. Из этого вытекает, что $\psi(\varepsilon)H \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$ или $\psi(\varepsilon)H \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p$. Как замечено перед теоремой, кольца $\operatorname{End}(\varepsilon G)$ и $\operatorname{End}\bigl(\psi(\varepsilon)H\bigr)$ топологически изоморфны. Однако конечные топологии на кольцах $\operatorname{End} \mathbb{Z}_{p^\infty}$ и $\operatorname{End} \widehat{\mathbb{Z}}_p$ различны (первая — p-адическая, вторая — дискретная). Поэтому возможно лишь $\psi(\varepsilon)H \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Теперь путь к применению метода Капланского открыт.

2. Пусть $\psi : \operatorname{End} T \to \operatorname{End} H$ — некоторый топологический изоморфизм. В силу непрерывности ψ для произвольного элемента $y \in H$ найдутся такие элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in T$, что если $\alpha \in \operatorname{End} T$ и $\alpha(x_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то $\psi(\alpha)(y) = 0$. Существует такое натуральное число m, что $mx_i = 0$ для всех i. Отсюда получаем $\psi(m \cdot id_T)(y) = (m \cdot id_H)(y) = my = 0$. Следовательно, H — периодическая группа, и можно применить теорему 5.1. □

7. Определяемость p-группы радикалом кольца эндоморфизмов

Можно поставить вопрос об определяемости группы не всем кольцом эндоморфизмов, а какой-то его частью. Из теоремы 7.1 вытекает, что p-группа с неограниченной базисной подгруппой определяется радикалом Джекобсона своего кольца эндоморфизмов (как кольцом без единицы). Другие подобные результаты приводятся в замечаниях. Раздел основан на статье [20]. Различные факты о радикалах колец эндоморфизмов приводятся в [2, гл. 4].

Сделаем одно терминологическое замечание. Групповые термины, примененные к кольцу, идеалу или модулю, относятся к их аддитивным группам; то же касается и отдельных элементов этих объектов. Так, например, под порядком элемента кольца (идеала или модуля) подразумевается его порядок как элемента соответствующей аддитивной группы.

Пусть G — некоторая группа. Тогда $\mathrm{J}(\operatorname{End} G)$ — радикал Джекобсона ее кольца эндоморфизмов, $\mathrm{K}(G)$ — периодическая подгруппа идеала $\mathrm{J}(\operatorname{End} G)$. Ясно, что $\mathrm{K}(G)$ — идеал в $\operatorname{End} G$ и кольцо без единицы. Часто вместо $\mathrm{K}(G)$ будем просто писать K.

Теорема 7.1. *Пусть G — p-группа, базисная подгруппа которой является неограниченной группой, и G' — произвольная p-группа. Тогда всякий кольцевой изоморфизм $\psi : \mathrm{K}(G) \to \mathrm{K}(G')$ индуцируется некоторым групповым изоморфизмом $\varphi : G \to G'$, т.е. $\psi(\eta) = \varphi\eta\varphi^{-1}$ для любого $\eta \in \mathrm{K}(G)$.*

Предварительно докажем ряд вспомогательных утверждений. Сначала отметим, что любой кольцевой изоморфизм $\operatorname{End} G \to \operatorname{End} G'$, конечно, индуцирует кольцевой изоморфизм $\mathrm{K}(G) \to \mathrm{K}(G')$.

До конца раздела G — некоторая p-группа, $\mathrm{N}(\operatorname{End} G)$ — нильрадикал кольца $\operatorname{End} G$, т.е. сумма сумма всех его нильидеалов. Определим также идеал Пирса $\mathrm{P}(G)$ группы G, а именно, положим

$$\mathrm{P}(G) = \bigl\{\alpha \in \operatorname{End} G \mid x \in G[p],\ h(x) < \infty \ \Rightarrow\ h(x) < h\bigl(\alpha(x)\bigr)\bigr\}.$$

Нетрудно убедиться, что $\mathrm{P}(G)$ — идеал кольца $\operatorname{End} G$. Также верно равенство

$$\mathrm{P}(G) = \bigl\{\alpha \in \operatorname{End} G \mid \alpha\bigl((p^n G)[p]\bigr) \subseteq \bigl(p^{n+1} G\bigr)[p] \text{ для всех } n \geqslant 0\bigr\}.$$

Различные факты о идеале Пирса можно найти в [2, § 20]. Самый важный из них — это включение $\mathrm{J}(\operatorname{End} G) \subseteq \mathrm{P}(G)$. Следовательно, имеют место вложения

$$\mathrm{N}(\operatorname{End} G) \subseteq \mathrm{J}(\operatorname{End} G) \subseteq \mathrm{P}(G). \qquad (*)$$

Далее мы докажем, что периодические части этих идеалов совпадают. Прежде заметим, что если I — идеал некоторого кольца, то $t(I)$ — также идеал. Кроме того, в нашем случае $t(\operatorname{End} G)$ есть p-группа.

Лемма 7.2. *Справедливы равенства*

$$t\big(\mathrm{N}(\operatorname{End} G)\big) = t\big(\mathrm{J}(\operatorname{End} G)\big) = t\big(\mathrm{P}(G)\big).$$

Доказательство. Ввиду $(*)$ достаточно показать, что каждый элемент из $t\big(\mathrm{P}(G)\big)$ нильпотентен. Пусть $\alpha \in t\big(\mathrm{P}(G)\big)$; тогда $p^n\alpha = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha G \subseteq G[p^n]$. Пусть $\alpha' = \alpha|_{G[p^{n+1}]}$. Так как $\alpha \in \mathrm{P}(G)$, то ясно, что $(\alpha')^m = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда $\alpha^{m+1} = 0$. □

Напомним, что идеал $\mathrm{K}(G)$ мы обозначаем одной буквой K.

Лемма 7.3. *Идеал* K *является неограниченным тогда и только тогда, когда группа* G *имеет неограниченную базисную подгруппу.*

Доказательство. Допустим, имеется разложение $G = \langle a\rangle \oplus \langle b\rangle \oplus H$, $o(a) < o(b)$. Определим эндоморфизм α группы G, полагая $\alpha(b) = a$ и $\alpha\big(\langle a\rangle \oplus H\big) = 0$. Тогда $\alpha \in \mathrm{K}$ и $o(\alpha) = o(a)$. Это доказывает, что K — неограниченный идеал, если G имеет неограниченную базисную подгруппу. Для доказательства обратного допустим, что $G = A \oplus D$, где $p^nA = 0$ для некоторого n и D — делимая группа. Пусть $\beta \in \mathrm{K}$. Тогда $p^n\beta = 0$, поскольку делимая группа не имеет ненулевых эндоморфизмов конечного порядка. Следовательно, $p^n\,\mathrm{K} = 0$. □

Будем использовать следующее обозначение. Для эндоморфизма $\eta \in \mathrm{K}$ и подмножества $L \subseteq \mathrm{K}$ под $L \cdot \eta$ понимаем множество $\{\lambda\eta \mid \lambda \in L\}$. Аналогично определяется $\eta \cdot L$.

Лемма 7.4. *Пусть группа* G *имеет неограниченную базисную подгруппу,* t — *положительное целое число и* $\eta \in \mathrm{K}$. *Равенство* $\mathrm{K}[p^t] \cdot \eta = 0$ *справедливо в точности тогда, когда* $\eta G \subseteq p^tG$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathrm{K}$. Ясно, что $p^t\alpha = 0 \Leftrightarrow (p^t\alpha)G = 0$. Поэтому, если $\eta G \subseteq p^tG$, то $\mathrm{K}[p^t] \cdot \eta = 0$. Для доказательства обратного предположим, что $\eta G \nsubseteq p^tG$. Построим такой эндоморфизм $\lambda \in \mathrm{K}[p^t]$, что $\lambda\eta \neq 0$. Выберем элемент $x \in \eta G$, обладающий свойством $x \notin p^tG$. Тогда $h(x) < t$ и, следовательно, существует разложение $G = \langle y\rangle \oplus Y$, причем $x = p^sy + u$, где $p^sy \neq 0$, $s < t$ и $u \in Y$ (см. раздел 1). Пусть $o(y) = p^n$ и пусть $m = \min\{n, t\}$; тогда $m > s$. Поскольку базисная подгруппа группы G неограниченная, то Y имеет прямое слагаемое $\langle z\rangle$ порядка p^k с $k > m$. Определим эндоморфизм λ, положив $\lambda(y) = p^{k-m}z$ и $\lambda Y = 0$. Тогда $\lambda \in \mathrm{K}[p^t]$ и $\lambda(x) = p^{k-(m-s)}z \neq 0$. Следовательно, $\lambda\eta \neq 0$, как и утверждалось. □

Предложение 7.5. *Пусть выполняются условия леммы 7.4 и* $\eta \in \mathrm{K}[p^t]$. *Тогда* $\mathrm{K}[p^t]\cdot p^{t-1}\eta \neq 0$ *в том и только том случае, когда группа* G *имеет такие разложения* $G = \langle y\rangle \oplus Y = \langle \eta(y)\rangle \oplus X$, *что* $o(\eta(y)) = p^t$.

Доказательство. Считаем сначала, что $\mathrm{K}[p^t] \cdot p^{t-1}\eta \neq 0$. Тогда по лемме 7.4 $(p^{t-1}\eta)G \nsubseteq p^tG$. Следовательно, существует прямое слагаемое $\langle y\rangle$ в G, для которого $\eta(p^{t-1}y) \notin p^tG$. Отсюда делаем вывод, что элемент $\eta(p^{t-1}y)$ имеет порядок p и высоту $t-1$. Можно заключить, что $\langle \eta(y)\rangle$ есть прямое слагаемое в G (см. раздел 1). Ясно также, что $o(\eta(y)) = p^t$.

Для доказательства обратного предположим, что группа G имеет указанные разложения. Тогда элемент $p^{t-1}\eta(y)$ имеет высоту меньшую, чем t, что влечет $(p^{t-1}\eta)G \nsubseteq p^tG$. Далее на основании леммы 7.4 получаем $\mathrm{K}[p^t] \cdot p^{t-1}\eta \neq 0$. □

Введем одно новое понятие.

Определение 7.6. Правый K-модуль T будем называть *сильно однородным*, если T — периодическая группа и для любых ненулевых $\sigma, \tau \in T$ пересечение $\sigma K \cap \tau K$ содержит такой элемент α, что $o(\alpha) = \min\{o(\sigma), o(\tau)\}$.

Предложение 7.7. *Пусть выполняются условия леммы 7.4 и $\eta \in \mathrm{K}[p^t]$ таков, что $\mathrm{K}[p^t] \cdot p^{t-1}\eta \neq 0$. Подгруппа ηG является циклической в точности тогда, когда $\eta\,\mathrm{K}$ — сильно однородный K-модуль.*

Доказательство. Согласно предложению 7.5 существуют разложения

$$G = \langle y\rangle \oplus Y = \langle x\rangle \oplus X$$

со свойствами $\eta(y) = x$ и $o(x) = o(\eta) = p^t$.

Предположим сначала, что ηG — циклическая группа. Тогда обязательно имеет место $\eta G = \langle x\rangle$. Пусть эндоморфизмы $\tau_i \in \mathrm{K}$ таковы, что $\eta\tau_i \neq 0$, $i = 1, 2$. Далее, пусть $o(\eta\tau_i) = p^{n_i}$. Тогда $n_i \leqslant t$, $i = 1, 2$, и не уменьшая общности можно считать, что $n_1 \leqslant n_2$. Существуют элементы $g_i \in G$, $i = 1, 2$, для которых $\eta\tau_i(g_i) = p^{t-n_i}x$. Имеется такое разложение $G = \langle z\rangle \oplus Z$, что порядок элемента z превышает порядки элементов g_1 и g_2. Выберем эндоморфизмы $\sigma_i \in \mathrm{K}$, обладающие свойствами $\sigma_i(z) = g_i$ и $\sigma_i Z = 0$, $i = 1, 2$. Положим $\lambda_i = \eta\tau_i\sigma_i$, $i = 1, 2$. Тогда $\lambda_i Z = 0$ и $\lambda_i(z) = p^{t-n_i}x$, так что $o(\lambda_i) = p^{n_i} = o(\eta\tau_i)$, $i = 1, 2$. Далее находим, что $p^{n_2-n_1}\lambda_2 = \lambda_1$ и $\lambda_1 \in (\eta\tau_1)\,\mathrm{K} \cap (\eta\tau_2)\,\mathrm{K}$. Кроме того, порядок элемента λ_1 равен минимальному из порядков элементов $\eta\tau_1$ и $\eta\tau_2$.

Для доказательства обратного допустим, что $\eta G \neq \langle x\rangle$. Тогда существует такой элемент g, что $\eta(g) = w$ для некоторого $w \notin \langle x\rangle$. Если $o(w) = p^s$, то ясно, что $s \leqslant t$. Опять выберем разложение $G = \langle z\rangle \oplus Z$, обладающее тем свойством, что порядок элемента z строго превышает порядки элементов y и g. В такой ситуации найдутся эндоморфизмы $\sigma, \tau \in \mathrm{K}$, для которых $\sigma(z) = y$, $\tau(z) = g$ и $\sigma Z = 0 = \tau Z$. Далее получаем $\eta\sigma(z) = x$, $\eta\tau(z) = w$, $o(\eta\sigma) = p^t$ и $o(\eta\tau) = p^s$. Мы утверждаем, что пересечение $(\eta\sigma)\,\mathrm{K} \cap (\eta\tau)\,\mathrm{K}$ не содержит элементов порядка p^s. Допустим противное, т.е. предположим, что найдутся такие $\alpha, \beta \in \mathrm{K}$, что элемент $\eta\sigma\alpha = \eta\tau\beta$ имеет порядок p^s. Пусть a — произвольный элемент группы G. Запишем $\alpha(a) = mz + z'$ и $\beta(z) = nz + z''$ для некоторых целых чисел m, n и элементов $z', z'' \in Z$. Теперь находим $\eta\sigma\alpha(a) = mx$, $\eta\tau\beta(a) = nw$ и $mx = nw$. Так как $w \notin \langle x\rangle$, то p делит n. Но тогда $p^{s-1}\eta\tau\beta(a) = 0$ и $p^{s-1}\eta\tau\beta = 0$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Сформулируем основной вспомогательный результат.

Предложение 7.8. *p-Группа G имеет неограниченную базисную подгруппу в точности тогда, когда существуют такая последовательность $1 < n_1 < n_2 < \ldots$ натуральных чисел и такие элементы $\eta_1, \eta_2, \ldots$ из K, что для каждого $i \geqslant 1$ выполняются следующие условия:*

(1) $o(\eta_i) = p^{n_i}$;
(2) $\mathrm{K}[p^{n_i}] \cdot p^{n_i-1}\eta_i \neq 0$;
(3) $\eta_i\,\mathrm{K}$ — *сильно однородный* K-*модуль*;
(4) *отображение* $f_i : \mathrm{K}\,\eta_i \to \mathrm{K}\,\eta_{i+1}$, $\alpha\eta_i \mapsto \alpha\eta_i\eta_{i+1}$, $\alpha \in \mathrm{K}$, *является мономорфизмом.*

Кроме того, для данной последовательности $1 < n_1 < n_2 < \ldots$ и данных эндоморфизмов $\eta_i \in \mathrm{K}$, обладающих свойствами (1)–(4), существуют такие элементы $d_1, d_2, \ldots$ в G, что для каждого $i \geqslant 1$ верно следующее:

$$o(d_i) = p^{n_i}, \quad \eta_i(d_{i+1}) = d_i, \quad \eta_i G = \langle d_i\rangle, \quad \langle d_i\rangle \text{ — прямое слагаемое группы } G.$$

Доказательство. Пусть G имеет неограниченную базисную подгруппу. Тогда для любого $i \geqslant 1$ существует элемент $a_i \in G$ порядка p^{n_i}, где $1 < n_1 < n_2 < \ldots$, и верны равенства

$$G = \langle a_i\rangle \oplus \langle a_2\rangle \oplus \ldots \oplus \langle a_t\rangle \oplus H_t, \quad H_t = \langle a_{t+1}\rangle \oplus H_{t+1}.$$

Определим эндоморфизмы η_i, положив $\eta_i(a_{i+1}) = a_i$ и считая, что η_i аннулирует все дополнительные слагаемые к $\langle a_{i+1}\rangle$. Ясно, что η_i имеет порядок p^{n_i}. Предложения 7.5 и 7.7 влекут справедливость условий (2) и (3). Условие (4) проверяется непосредственно.

Для доказательства обратного достаточно заметить, что по лемме 7.3 из условия (1) уже вытекает, что G имеет неограниченную базисную подгруппу.

Теперь предположим, что условия (1)–(4) выполняются, и убедимся в существовании элементов d_i с указанными свойствами. Согласно предложению 7.5 для каждого $i \geqslant 1$ существуют такие разложения $G = \langle y_i \rangle \oplus Y_i = \langle x_i \rangle \oplus X_i$, что $\eta_i(y_i) = x_i$ и $o(x_i) = p^{n_i}$. На основании предложения 7.7 имеем также $\eta_i G = \langle \eta_i(y_i) \rangle$. Это влечет равенство $G = \langle y_i \rangle \oplus \ker \eta_i$. Следовательно, можно записать $x_{i+1} = k_i y_i + z_i$, где k_i — целое число и $\eta_i(z_i) = 0$.

Допустим, что p делит k_i; тогда

$$p^{n_i-1}\eta_i\eta_{i+1}G = p^{n_i-1}\langle \eta_i(x_{i+1}) \rangle = p^{n_i-1}\langle k_i x_i \rangle = 0.$$

С другой стороны, $p^{n_i-1}\eta_i\eta_{i+1} = f_i(p^{n_i-1}\eta_i)$ и f_i — инъекция. Получили противоречие. Таким образом, k_i взаимно просто с p.

Пусть $d_1 = x_1$; предположим, что t — такое положительное целое число, что для всех $i = 1, 2, \ldots, t$ элемент d_i уже определен, причем таким образом, что $d_i = m_i x_i$, где целое число m_i взаимно просто с p и $\eta_i(d_{i+1}) = d_i$ для каждого $i < t$. Из равенства $x_{t+1} = k_t y_t + z_t$ (см. выше) выводим, что $\eta_t(x_{t+1}) = k_t x_t$. Поскольку k_t и m_t взаимно просты с p, найдется целое число m_{t+1}, также взаимно простое с p, такое что справедливы равенства

$$\eta_t(m_{t+1}x_{t+1}) = m_{t+1}k_t x_t = m_t x_t = d_t.$$

Положим $d_{t+1} = m_{t+1}x_{t+1}$. Таким образом, для каждого i группа $\langle d_i \rangle = \langle x_i \rangle$ является прямым слагаемым группы G порядка p^{n_i}, как и утверждалось. Остальные свойства элементов d_i верны по их выбору. □

Доказательство теоремы 7.1. Договоримся, что символ K' будет обозначать идеал $\mathrm{K}(G')$, а K, как и раньше, обозначает $\mathrm{K}(G)$. Пусть $\psi : \mathrm{K} \to \mathrm{K}'$ — некоторый кольцевой изоморфизм (колец без единицы). Для эндоморфизма $\alpha \in \mathrm{K}$ полагаем $\alpha' = \psi(\alpha) \in \mathrm{K}'$. На основании предложения 7.8 существуют натуральные числа $n_1 < n_2 < \ldots$ и эндоморфизмы $\eta_i \in \mathrm{K}$, удовлетворяющие условиям (1)–(4) из этого предложения. Соответствующие свойства сохраняются при кольцевых изоморфизмах, поэтому эндоморфизмы $\eta_i' \in \mathrm{K}'$ удовлетворяют аналогичным условиям (1′)–(4′). Применяя предложение 7.8, еще раз получаем, что существуют элементы $d_i \in G$ и $d_i' \in G'$, обладающие следующими свойствами: данные элементы порождают прямые слагаемые порядка p^{n_i} и $\eta_i(d_{i+1}) = d_i$, $\eta_i G = \langle d_i \rangle$, $\eta_i'(d_{i+1}') = d_i'$, $\eta_i' G' = \langle d_i' \rangle$.

Определим отображение $\varphi : G \to G'$ следующим образом. Для элемента $x \in G$ выберем такое натуральное число k, что $o(x) < p^{n_k}$. Пусть ε — такой эндоморфизм группы G, что $\varepsilon(d_k) = x$ и ε аннулирует дополнительное слагаемое к $\langle d_k \rangle$. Тогда $\varepsilon \in t\big(\mathrm{P}(G)\big) = \mathrm{K}$ (по лемме 7.2). Полагаем $\varphi(x) = \varepsilon'(d_k')$. Отображение φ задано корректно. Действительно, допустим, что $x = \omega(d_j)$ для некоторых $j \geqslant k$ и $\omega \in \mathrm{K}$. Тогда $d_k = (\eta_k\eta_{k+1} \cdot \ldots \cdot \eta_{j-2}\eta_{j-1})d_j$, что влечет $(\varepsilon\eta_k \cdot \ldots \cdot \eta_{j-2}\eta_{j-1} - \omega)d_j = 0$. Поэтому

$$(\varepsilon\eta_k \cdot \ldots \cdot \eta_{j-2}\eta_{j-1} - \omega)\eta_j\eta_{j+1}G = \langle (\varepsilon\eta_k \cdot \ldots \cdot \eta_{j-2}\eta_{j-1} - \omega)d_j \rangle = 0.$$

Условие (4) влечет $(\varepsilon\eta_k \cdot \ldots \cdot \eta_{j-2}\eta_{j-1} - \omega)\eta_j = 0$ и далее $\varepsilon'\eta_k' \cdot \ldots \cdot \eta_{j-1}'\eta_j' = \omega'\eta_j'$. В итоге приходим к равенству $\omega'(d_j') = \varepsilon'(d_k')$, которое означает, что действие φ не зависит от выбора элемента d_k и эндоморфизма ε.

Наконец, как и в теореме 4.1, прямо проверяется, что φ есть изоморфизм, индуцирующий изоморфизм ψ. □

Замечания 1. Примечательный факт: группа с достаточно богатой делимой подгруппой определяется своим топологическим кольцом эндоморфизмов в классе всех групп. Именно, Мэй доказал следующее утверждение (см. [22]). *Пусть группа G содержит копии групп $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ для каждого простого p. Тогда для любой группы H всякий топологический изоморфизм* $\operatorname{End} G \to \operatorname{End} H$ *индуцируется некоторым изоморфизмом* $G \to H$ (ср. с теоремой 6.7).

Не так много работ, посвященных определяемости групп без кручения кольцами эндоморфизмов. Очень содержательна работа Баззони и Метелли [10]. Они доказали, что *сепарабельная* *группа без кручения G определяется своим кольцом эндоморфизмов в классе всех таких групп тогда и только тогда, когда каждое прямое слагаемое ранга* 1 *группы G делится почти на все простые числа.* Следует отметить, что группы без кручения часто бедны эндоморфизмами, а кольцо эндоморфизмов, вообще говоря, слабо влияет на исходную группу. Для групп без кручения теоремы изоморфизма — весьма редкое явление.

Для смешанных групп, наоборот, имеется довольно богатая литература по теоремам изоморфизма. Но сразу укажем на то, что даже для таких смешанных групп G, что $G/t(G) \cong \mathbb{Q}$, два центральных вопроса имеют отрицательный ответ. Имеются в виду следующие вопросы:

(i) *Будет ли из изоморфизма* $\operatorname{End} G \cong \operatorname{End} H$ *вытекать изоморфизм* $G \cong H$*?*
(ii) *Является ли всякий автоморфизм кольца* $\operatorname{End} G$ *внутренним?*

Соответствующие примеры есть в статье Мэя и Тубасси [31].

Если теорема изоморфизма не верна для каких-то групп, то можно расширить проблему и пытаться для двух данных групп G и H найти условия изоморфизма их колец эндоморфизмов. Мэй и Тубасси [35] сделали это для смешанных групп ранга 1 с тотально проективными периодическими частями.

Различные другие результаты, связанные с определяемостью смешанных групп их кольцами эндоморфизмов, содержатся в статьях Мэя и Тубасси [23, 29, 30].

В конце раздела 1 указывалось на тесные связи абелевых групп с модулями над областями дискретного нормирования. Кольцо $\mathbb{Q}_p$ рациональных чисел со знаменателями, взаимно простыми с p, дает пример такой области. $\mathbb{Q}_p$-Модули — это, собственно, такие группы G, что $nG = G$ для всех целых чисел n, обладающих свойством $(n, p) = 1$.

$\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — это полная область дискретного нормирования. Она является пополнением кольца $\mathbb{Q}_p$ в p-адической топологии. $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-Модули называют еще p-адическими модулями.

Значительное число работ посвящено теоремам изоморфизма для колец (или алгебр) эндоморфизмов смешанных модулей над областями дискретного нормирования. Понятно, что все получаемые при этом результаты применимы, в частности, к $\mathbb{Q}_p$-модулям и $\widehat{\mathbb{Z}}_p$-модулям. К сожалению, даже если принять самые сильные предположения, т.е. считать область дискретного нормирования R полной и рассматривать топологические изоморфизмы R-алгебр эндоморфизмов, то даже для смешанных модулей ранга 1 два сформулированных выше центральных вопроса имеют отрицательное решение (см., например, [28]).

Большинство результатов по проблеме изоморфизма в случае смешанных модулей относятся к модулям с тотально проективными периодическими подмодулями или же к модулям Уорфилда. Характерным здесь результатом является следующая теорема Мэя и Тубасси (см. [32]). *Пусть M — смешанный модуль ранга* 1 *над областью дискретного нормирования R с тотально проективным периодическим подмодулем. Если N — модуль ранга* 1*, то всякий изоморфизм* $\operatorname{End}_R M \to \operatorname{End}_R N$ *индуцируется некоторым изоморфизмом* $M \to N$. Из результатов работы Гёбеля и Мэя [18] следует, что указанный результат нельзя перенести на смешанные модули других конечных рангов, даже если предполагать делимость их фактор-модулей без кручения. Правда, это можно сделать, если считать область R полной (см. [24]).

Другие результаты по данной тематике можно найти в [11–13, 25–27]. Отметим, что в этих и других статьях построены весьма неожиданные примеры. В частности, они показывают, что существуют разного рода серьезные препятствия для поиска теорем изоморфизма для колец эндоморфизмов смешанных модулей над областями дискретного нормирования, в том числе и при условии их полноты.

Что касается теоремы 7.1, то в [19, 34] полностью выяснено, когда для двух p-групп G и H всякий изоморфизм колец $\mathrm{J}(\operatorname{End} G) \to \mathrm{J}(\operatorname{End} H)$ индуцируется некоторым изоморфизмом $G \to H$.

В работах М.Флэгг [14–17] исследуется определяемость модуля над областью дискретного нормирования радикалом своего кольца эндоморфизмов. В [16] ей удалось заменить кольцо эндоморфизмов на радикал кольца эндоморфизмов в известных теоремах об определяемости смешанных модулей с тотально проективными периодическими подмодулями и модулей Уорфилда.

С некоторыми результатами об изоморфизмах колец эндоморфизмов модулей можно познакомиться по обзору [33].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крылов П. А.* Сильно однородные абелевы группы без кручения// Сиб. мат. ж., **24**, № 2. — 1983. — С. 77–84.
2. *Крылов П. А., Михалев А. В., Туганбаев А. А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. — М.: Факториал Пресс, 2006.
3. *Крылов П. А., Туганбаев А. А.* Модули над областями дискретного нормирования. — М.: Факториал Пресс, 2007.
4. *Крылов П. А., Туганбаев А. А.* Модули над кольцами формальных матриц// Фундам. прикл. мат., **15**, № 8. — 2009. — С. 145–211.
5. *Крылов П. А., Туганбаев А. А.* Формальные матрицы и их определители// Фундам. прикл. мат., **19**, № 1. — 2014. — С. 65–119.
6. *Крылов П. А., Туганбаев А. А.* Кольца формальных матриц и модули над ними. — М.: МЦНМО, 2017.
7. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М.: Мир, 1973.
8. *Baer R.* Automorphism rings of primary Abelian operator groups// Ann. Math., **44**, № 2. — 1943. — P. 192–227.
9. *Baer R.* Linear Algebra and Projective Geometry. — New York: Academic Press, 1952.
10. *Bazzoni S., Metelli C.* On Abelian torsion-free separable groups and their endomorphism rings// Symp. Math., **23**. — 1979. — P. 259–285.
11. *Files S. T.* Endomorphisms of local Warfield groups// Contemp. Math., **171**. — 1994. — P. 99–107.
12. *Files S. T.* Outer automorphisms of endomorphism rings of Warfield groups// Arch. Math., **65**. — 1995. — P. 15–22.
13. *Files S. T.* Endomorphism algebras of modules with distinguished torsion-free elements// J. Algebra, **178**. — 1995. — P. 264–276.
14. *Flagg M.* A Jacobson radical isomorphism theorem for torsion-free modules// in: Models, Modules and Abelian Groups (Göbel R., Goldsmith B., eds.). — Berlin: Walter de Gruyter, 2008. — P. 309–314.
15. *Flagg M.* Jacobson radical isomorphism theorems for mixed modules. Part one: determining the torsion// Commun. Algebra, **37**, № 5. — 2009. — P. 1739–1747.
16. *Flagg M.* The role of the Jacobson radical in isomorphism theorems// Contemp. Math., **576**. — 2012. — P. 77–88.
17. *Flagg M.* The Jacobson radical's role in isomorphism theorems for p-adic modules extends to topogical isomorphism// in: Groups, Modules, and Model Theory—Surveys and Recent Developments (Droste M., Fuchs L., Goldsmith B., Strüngmann L., eds.). — Springer, 2017. — P. 285–300.
18. *Göbel R., May W.* The construction of mixed modules from torsion modules// Arch. Math., **48**. — 1987. — P. 476–490.
19. *Hausen J., Johnson J. A.* Determining Abelian p-groups by the Jacobson radical of their endomorphism rings// J. Algebra, **174**, № 1. — 1995. — P. 217–224.
20. *Hausen J., Praeger C. E., Schultz P.* Most Abelian p-groups are determined by the Jacobson radical of their endomorphism rings// Math. Z., **216**. — 1994. — P. 431–436.
21. *Kaplansky I.* Infinite Abelian Groups. — Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1954.
22. *May W.* Endomorphism rings of Abelian groups with ample divisible subgroups// Bull. London Math. Soc., **10**, № 3. — 1978. — P. 270–272.
23. *May W.* Endomorphism rings of mixed Abelian groups// Contemp. Math., **87**. — 1989. — P. 61–74.
24. *May W.* Isomorphisms of endomorphism algebras over complete discrete valuation rings// Math. Z., **204**, № 4. — 1990. — P. 485–499.
25. *May W.* Endomorphism algebras of not necessarily cotorsion-free modules// in: Abelian Groups and Noncommutative Rings (Fuchs L., Goodearl K. R., Stafford J. T., Vinsonhaler C., eds.). — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1992. — P. 257–264.

26. *May W.* Endomorphisms over incomplete discrete valuation domains// Contemp. Math., **171**. — 1994. — P. 277–285.
27. *May W.* The theorem of Baer and Kaplansky for mixed modules// J. Algebra, **177**. — 1995. — P. 255–263.
28. *May W.* The use of the finite topology on endomorphism rings// J. Pure Appl. Algebra, **163**. — 2001. — P. 107–117.
29. *May W., Toubassi E.* Endomorphisms of Abelian groups and the theorem of Baer and Kaplansky// J. Algebra, **43**, № 1. — 1976. — P. 1–13.
30. *May W., Toubassi E.* A result on problem 87 of L. Fuchs// Lect. Notes Math., **616**. — 1977. — P. 354–367.
31. *May W., Toubassi E.* Isomorphisms of endomorphism rings of rank one mixed groups// J. Algebra, **71**, № 2. — 1981. — P. 508–514.
32. *May W., Toubassi E.* Endomorphisms of rank one mixed modules over discrete valuation rings// Pac. J. Math., **108**, № 1. — 1983. — P. 155–163.
33. *Mikhalev A. V.* Isomorphisms and anti-isomorphisms of endomorphism rings of modules// in: Proc. First Int. Algebraic Workshop. — Berlin, 1996. — P. 69–122.
34. *Schultz P.* When is an Abelian p-group determined by the Jacobson radical of its endomorphism ring// Contemp. Math., **171**. — 1994. — P. 385–396.
35. *Toubassi E., May W.* Classifying endomorphism rings of rank one mixed groups// in: Abelian Groups and Modules/ Proc. Conf. Udine, 1984. — Vienna: Springer, 1984. — P. 253–263.

Крылов Петр Андреевич
Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск
E-mail: krylov@math.tsu.ru

Туганбаев Аскар Аканович
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
E-mail: tuganbaev@gmail.com

Царев Андрей Валерьевич
Московский педагогический государственный университет, Москва
E-mail: an-tsarev@yandex.ru