Б. О. Волков, Применение дифференциальных операторов Леви в теории калибровочных полей, *Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2018, том 151, 21–36

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 151 (2018). С. 21–36

УДК 517.98

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ЛЕВИ В ТЕОРИИ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

© 2018 г. **Б. О. ВОЛКОВ**

Аннотация. Статья содержит обзор некоторых результатов о связи калибровочных полей и бесконечномерных уравнений на параллельный перенос, содержащих лапласиан Леви или ассоциированную с этим лапласианом дивергенцию. Параллельно рассматривается детерминистский случай, в котором параллельный перенос — это операторнозначный функционал на пространстве кривых, и случай так называемого исчисления Маллявэна, в котором (стохастический) параллельный перенос — это операторнозначный винеровский функционал.

Ключевые слова: лапласиан Леви, дивергенция Леви, калибровочные поля, уравнения Янга—Миллса, инстантоны, исчисление Маллявэна.

AMS Subject Classification: 60H40, 81T13

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

В 20-е годы прошлого века П. Леви ввел следующий бесконечномерный лапласиан, впоследствии названный его именем. Лапласиан Леви действует на функцию f, определенную на $L_2([0,1],\mathbb{R})$, по формуле

$$\Delta_L f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left\langle f''(x)e_k, e_k \right\rangle,$$

где $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в $L_2([0,1],\mathbb{R})$. Такое определение существенно зависит от выбора ортонормированного базиса $\{e_n\}$. Иначе П. Леви определял бесконечномерный лапласиан как интегральный функционал, порожденный специальным видом второй производной. Дифференциальными операторами Леви (лапласианом Леви, даламбертианом Леви, дивергенцией Леви) называют дифференциальные операторы, действующие на функции различных функциональных пространств, определенные по аналогии с двумя оригинальными определениями лапласиана Леви на функциях из $L_2([0,1],\mathbb{R})$. Задача о том, как связаны определения дифференциального оператора Леви с помощью чезаровского усреднения и с помощью интегрального функционала на одном пространстве функций, может оказаться нетривиальной.

Работа посвящена связи дифференциальных операторов Леви и калибровочных полей. Уравнения Янга—Миллса — это нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка на связность в векторном расслоении. Эти уравнения инвариантны относительно калибровочных преобразований. Одна из основных причин интереса к дифференциальным операторам Леви заключается в том, что уравнения Янга—Миллса допускают переформулировки с помощью таких дифференциальных операторов. С одной стороны, параллельный перенос, порожденный связностью, будет удовлетворять уравнению, содержащему дивергенцию Леви и являющемуся бесконечномерным аналогом уравнения движения кирального поля, тогда и только тогда, когда соответствующая связность является решением уравнений Янга—Миллса; этот факт впервые был замечен И. Я. Арефьевой и И. В. Воловичем (см. [4]). С другой стороны, параллельный перенос является решением уравнения Лапласа для лапласиана Леви тогда и только тогда, когда соответствующая связность является решением уравнений Янга—Миллса. Таким образом, система конечномерных нелинейных уравнений является эквивалентной бесконечномерному линейному дифференциальному уравнению. Теорема об эквивалентности уравнения Лапласа для лапласиана Леви и параллельного переноса и уравнений Янга—Миллса была доказана Л. Аккарди, П. Гибилиско и И. В. Воловичем (см. [13]) для связности в тривиальном векторном расслоении над $\mathbb{R}^d$ и Р. Леандром и И. В. Воловичем (см. [26]) для связности в векторном расслоении над римановым многообразием.

В [4, 12, 13, 26] дифференциальные операторы Леви определялись с помощью интегрального функционала, порожденного специальным видом второй производной. Тот факт, что лапласиан Леви, связанный с уравнениями Янга—Миллса, можно определить с помощью чезаровского усреднения, было показано в работах автора (см. [7, 9]).

В стохастическом анализе дифференциальные операторы Леви можно определить с помощью исчисления Маллявэна — теории пространств Соболева над мерами на бесконечномерных пространствах. Р. Леандр и И. В. Волович с помощью интегрального функционала перенесли определение лапласиана Леви на пространство Соболева над мерой Винера (см. [26]). В работе [31] автора были введены лапласиан и дивергенция Леви на пространстве Соболева над мерой Винера, определенные с помощью чезаровского усреднения. В [26, 31] были получены условия в терминах дифференциальных операторов Леви и стохастического параллельного переноса, эквивалентные тому, что ассоциированная связность является решением уравнения Янга—Миллса. В отличие от детерминистского случая значения лапласианов Леви, введенных в [26, 31], на стохастическом параллельном переносе не совпадают. Критерии в терминах стохастического параллельного переноса, не использующие дифференциальные операторы Леви, что ассоциированная связность является решением уравнений Янга—Миллса, были получены в [15, 17, 18, 27].

Если связность в векторном расслоении над $\mathbb{R}^4$ является решением уравнений автодуальности, то она также будет и решением уравнений Янга—Миллса. В 2014 г. автору на семинаре отдела математической физики МИАН им. В. А. Стеклова была поставлена задача: можно ли с помощью лапласианов Леви переформулировать уравнения автодуальности? Фактически эта задача была поставлена и в обзоре Л. Аккарди [11]. В работе автора [9] было показано, что уравнения автодуальности действительно можно сформулировать в терминах параллельного переноса и лапласианов Леви. В этой работе рассматривался только детерминистский случай. Как результаты работы [9] переносятся на случай исчисления Маллявэна, показано в конце настоящей статьи.

Настоящая работа содержит обзор теорем о связи дифференциальных операторов Леви и уравнений Янга—Миллса для связности в тривиальном векторном расслоении над $\mathbb{R}^d$ и уравнений автодуальности для связности в тривиальном векторном расслоении над $\mathbb{R}^4$ в детерминистском случае и в случае исчисления Маллявэна. Теоремы будут сформулированы в единообразной форме; при этом дифференциальные операторы Леви будут определены с помощью чезаровского усреднения.

Статья устроена следующим образом. В разделе 2 приводятся различные определения лапласиана и дивергенции Леви в терминах следов Леви. Во разделах 3 и 4 приводятся формулировки теорем о связи дифференциальных операторов Леви соответственно с уравнениями Янга—Миллса и уравнениями автодуальности в детерминистском случае. В разделах 5 и 6 рассматривается связь дифференциальных операторов Леви соответственно с уравнениями Янга—Миллса и уравнениями автодуальности в случае исчисления Маллявэна.

2. След Леви и дифференциальные операторы Леви

В этом разделе мы приведем различные определения лапласиана и дивергенции Леви. Определения будут даны в единообразной форме, несколько отличной от той, в которой эти определения были даны изначально. В этом разделе мы частично следуем изложению работы [30].

Пусть E и V — вещественные локально выпуклые пространства. Везде ниже символом $C(E,V)$ обозначается пространство непрерывных функций из E в V, символом $C^n(E,V)$ — пространство n раз дифференцируемых по Фреше функций из E в V (подробное изложение теории дифференцирования на линейных топологических пространствах см., например, в [1]), а символом $L(E,V)$ — пространство линейных непрерывных отображений из E в V. Пусть E^* — пространство, сопряженное к E. Если $f \in C^2(E,\mathbb{R})$, то $f'(x) \in E^*$ и $f''(x) \in L(E,E^*)$ для каждого $x \in E$. Если $B \in C^1(E,E^*)$, то $B'(x) \in L(E,E^*)$ для каждого $x \in E$. Пусть $\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ — пространство $\mathbb{R}$-значных функций на E.

Пусть $S : \operatorname{dom} S \to \mathbb{R}$ — линейный функционал, причем $\operatorname{dom} S \subset L(E,E^*)$. Функционал S определяет линейный дифференциальный оператор второго порядка $D^{2,S} : \operatorname{dom} D^{2,S} \to \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$, действующий по формуле
$$D^{2,S} f(x) = S(f''(x)),$$
где
$$\operatorname{dom} D^{2,S} = \Big\{ f \in C^2(E,\mathbb{R}) : f''(x) \in \operatorname{dom} S \text{ для всех } x \in E \Big\}.$$
Кроме того, функционал S определяет линейный дифференциальный оператор первого порядка $D^{1,S} : \operatorname{dom} D^{1,S} \to \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$, действующий по формуле
$$D^{1,S} B(x) = S(B'(x)),$$
где
$$\operatorname{dom} D^{1,S} = \Big\{ B \in C^1(E,E^*) : B'(x) \in \operatorname{dom} S \text{ для всех } x \in E \Big\}$$
(подробное изложение общей схемы определений дифференциальных операторов см. в [2]). Если выбрать $E = \mathbb{R}^d$ и $S = \operatorname{tr}$ (след), то $D^{2,\mathrm{tr}}$ — это конечномерный лапласиан Δ и $D^{1,\mathrm{tr}}$ — это конечномерная дивергенция div.

Пусть теперь $E \subset H \subset E^*$ — оснащенное гильбертово пространство и $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве H, состоящий из элементов E. След Леви $\operatorname{tr}_L^{\{e_n\}} : \operatorname{dom} \operatorname{tr}_L^{\{e_n\}} \to \mathbb{R}$ определяется формулой
$$\operatorname{tr}_L^{\{e_n\}} R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (Re_k, e_k), \tag{2.1}$$
где $\operatorname{dom} \operatorname{tr}_L^{\{e_n\}}$ состоит из всех отображений из $L(E,E^*)$, для которых правая часть (2.1) существует. Такое определение существенно зависит от выбора ортонормированного базиса $\{e_n\}$. Операторы $D^{1,\operatorname{tr}_L^{\{e_n\}}}$ и $D^{2,\operatorname{tr}_L^{\{e_n\}}}$ — это соответственно лапласиан Леви $\Delta_L^{\{e_n\}}$ и дивергенция Леви $\operatorname{div}_L^{\{e_n\}}$. Заметим, что для $f \in C^2(E,\mathbb{R})$ выполняется равенство
$$\Delta_L^{\{e_n\}} f(x) = \operatorname{div}_L^{\{e_n\}} f'(x).$$
Если выбрать $E = H = L_2([0,1],\mathbb{R})$, то
$$\Delta_L^{\{e_n\}} = D^{2,\operatorname{tr}_L^{\{e_n\}}}$$
— лапласиан, введенный П. Леви в [10].

Иначе П. Леви определял бесконечномерный лапласиан как интегральный функционал, порожденный специальным видом второй производной. Пусть $\operatorname{dom}\operatorname{tr}_L$ — пространство таких билинейных функционалов K на $L_2([0,1],\mathbb{R})\times L_2([0,1],\mathbb{R})$, что для всех $u,v\in L_2([0,1],\mathbb{R})$ выполняется равенство

$$K(u,v)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 K_V(t,s)u(t)v(s)\,dt\,ds+\int\limits_0^1 K_L(t)u(t)v(t)\,dt, \tag{2.2}$$

где $K_V\in L_2([0,1]\times[0,1],\mathbb{R})$ и $K_L\in L_\infty([0,1],\mathbb{R})$. Пусть след Леви $\operatorname{tr}_L:\operatorname{dom}\operatorname{tr}_L\to\mathbb{R}$ действует по формуле

$$\operatorname{tr}_L K=\int\limits_0^1 K_L(t)dt.$$

Тогда лапласиан Леви Δ_L можно определить как дифференциальный оператор $D^{2,\operatorname{tr}_L}$.

Определение 2.1 (П. Леви (см. [10]))**.** Ортонормированный базис $\{e_n\}$ в $L_2([0,1],\mathbb{R})$ называется *слабо равномерно плотным*, если

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 h(t)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e_k^2(t)-1\right)dt=0$$

для любой функции $h\in L_\infty([0,1],\mathbb{R})$.

Пример 2.1. Пусть $h_n(t)=\sqrt{2}\sin(\pi nt)$. Ортонормированный базис $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ является слабо равномерно плотным.

Очевидно, что, если $\{e_n\}$ — слабо равномерно плотный базис, то $\operatorname{tr}_L\subset\operatorname{tr}_L^{\{e_n\}}$ и, соответственно, $D^{2,\operatorname{tr}_L}\subset D^{2,\operatorname{tr}_L^{\{e_n\}}}$.

И. Я. Арефьева и И. В. Волович в связи с изучением калибровочных полей на физическом уровне строгости ввели дивергенцию Леви (см. [4], где использовался термин функциональная дивергенция). Л. Аккарди, П. Гибилиско и И. В. Волович по аналогии с оператором Δ_L ввели в рассмотрение оператор, который также был назван лапласианом Леви (см. [12, 13]. В терминах следов Леви определения из [4, 12, 13] можно переформулировать следующим образом.

Пусть $\{p_1,p_2,\dots,p_d\}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$. Пусть $\delta=(\delta_{\mu\nu})$ — евклидова метрика на $\mathbb{R}^d$, $E=C^1([0,1],\mathbb{R}^d)$, $E_0=\big\{\gamma\in E:\gamma(0)=\gamma(1)=0\big\}$, T_E^2 — пространство непрерывных билинейных функционалов на $E\times E$, ограничения которых на $E_0\times E_0$ имеют вид

$$Q(u,v)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 Q^V_{\mu\nu}(t,s)u^\mu(t)v^\nu(s)\,dt\,ds+\\ +\int\limits_0^1 Q^L_{\mu\nu}(t)u^\mu(t)v^\nu(t)\,dt+\frac12\int\limits_0^1 Q^S_{\mu\nu}(t)\Big(\dot u^\mu(t)v^\nu(t)+\dot v^\mu(t)u^\nu(t)\Big)\,dt, \tag{2.3}$$

где

$$Q^V_{\mu\nu}\in L_1([0,1]\times[0,1],\mathbb{R}),\quad Q^L_{\mu\nu}\in L_1([0,1],\mathbb{R}),\quad Q^S_{\mu\nu}\in L_\infty([0,1],\mathbb{R}),$$

$Q^L_{\mu\nu}$ — симметричный тензор, т.е. $Q^L_{\mu\nu}=Q^L_{\nu\mu}$, и $Q^S_{\mu\nu}$ — антисимметричный тензор, т.е. $Q^S_{\mu\nu}=-Q^S_{\nu\mu}$.

Определение 2.2. След Леви tr_L — это линейный функционал на T_E^2, определенный по формуле

$$\operatorname{tr}_L Q=\int\limits_0^1 Q^L_{\mu\nu}(t)\delta^{\mu\nu}dt. \tag{2.4}$$

В [12] была поставлена задача: можно ли представить лапласиан Леви, связанный с калибровочными полями, как среднее Чезаро вторых производных по направлению? Это действительно так.

Предложение 2.1. *Пусть* $\{h_n\}$ — *слабо равномерно плотный базис в* $L_2([0,1],\mathbb{R})$, *причем* $h_n \in E_0$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *и пусть* $e_n(t) = p_{a_n} h_{b_n}(t)$. *Тогда* $\operatorname{tr}_L \subset d\operatorname{tr}_L^{\{e_n\}}$ *и соответственно*

$$D^{1,\operatorname{tr}_L} \subset dD^{1,\operatorname{tr}_L^{\{e_n\}}}, \quad D^{2,\operatorname{tr}_L} \subset dD^{2,\operatorname{tr}_L^{\{e_n\}}}.$$

Замечание 2.1. Определения лапласианов Леви без изменения переносятся на функции, определенные на $W^{1,2}([0,1],\mathbb{R}^d)$ и $W^{1,1}([0,1],\mathbb{R}^d)$, и на функции, принимающие значения в конечномерных векторных пространствах.

Замечание 2.2. Если в определении следа Леви (2.4) заменить евклидову метрику на метрику Минковского, то след Леви будет порождать даламбертиан Леви (см. [12, 13]). Даламбертиан Леви и соответствующую дивергенцию можно определить и с помощью чезаровского усреднения (см. [8, 30]).

3. Дифференциальные операторы Леви и уравнения Янга—Миллса

Ниже греческие индексы пробегают $\{1,\dots,d\}$, если не оговорено обратное. Мы будем использовать обозначения Эйнштейна для суммирования и осуществлять опускание и подъем индексов с помощью евклидовой метрики.

Как и в предыдущем разделе, пусть $\{p_1, p_2, \dots, p_d\}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$. Ниже

$$H_0^1 = W_0^{1,2}\big([0,1],\mathbb{R}^d\big) := \Big\{\gamma \in AC([0,1],\mathbb{R}^d):\ \dot\gamma \in L_2([0,1],\mathbb{R}^d),\ \gamma(0)=0\Big\}.$$

Это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\gamma_1,\gamma_2)_{H_0^1} = \int\limits_0^1 (\dot\gamma_1(t),\dot\gamma_2(t))_{\mathbb{R}^d}dt.$$

Мы считаем, что на $M_N(\mathbb{C})$ задана гильбертова норма $\|M\|^2 = \operatorname{tr}(MM^*)$. Если B — $M_N(\mathbb{C})$-значный тензор ранга $(0,2)$ над $\mathbb{R}^d$, то

$$\|B\|^2 = \sum_{\mu=1}^d\sum_{\nu=1}^d \|B_{\mu\nu}\|^2.$$

Пусть $\mathfrak{H}^0 = L_2([0,1],M_N(\mathbb{C}))$ и $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}^0}$ — скалярное произведение на этом пространстве.

Ниже связность в тривиальном векторном расслоении с базой $\mathbb{R}^d$, слоем $\mathbb{C}^N$ и структурной группой $U(N)$ задана на $\mathbb{R}^d$ как $u(N)$-значная C^∞-гладкая 1-форма $A(x) = A_\mu(x)dx^\mu$, определенная на $\mathbb{R}^d$. Если $\phi \in C^1(\mathbb{R}^d, u(N))$, то ковариантная производная $\nabla\phi$, заданная связностью A, определяется формулой $\nabla_\mu\phi = \partial_\mu\phi + [A_\mu,\phi]$. Соответствующая связности кривизна — это $u(N)$-значная C^∞-гладкая 2-форма

$$F(x) = \sum_{\mu<\nu} F_{\mu\nu}(x)dx^\mu\wedge dx^\nu, \quad \text{где} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

Функционал действия Янга—Миллса определяется формулой

$$S(A) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \|F(x)\|^2dx. \tag{3.1}$$

Уравнения Янга—Миллса — это уравнения на связность A:

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = \sum_{\mu=1}^d \big(\partial_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}]\big) = 0. \tag{3.2}$$

Эти уравнения являются уравнениями Эйлера—Лагранжа для функционала действия (3.1). Калибровочное преобразование — это отображение $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d, U(N))$, которое действует на связность по формуле

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = g^{-1}(x)A_\mu(x)g(x) + g^{-1}(x)\partial_\mu g(x),$$

а на кривизну — по формуле

$$F_{\mu\nu}(x) \to F'_{\mu\nu}(x) = g^{-1}(x)F_{\mu\nu}(x)g(x).$$

Таким образом, функция Лагранжа в (3.1) инвариантна относительно действия калибровочных преобразований.

Параллельный перенос $U^A_t(\gamma)$ вдоль кривой $\gamma \in H^1_0$, порожденный связностью A, — это решение дифференциального уравнения, записанного в интегральной форме:

$$U^A_t(\gamma) = I_N - \int\limits_0^t A_\mu(\gamma(s))U^A_s(\gamma)\dot\gamma^\mu(s)ds. \tag{3.3}$$

У этого уравнения имеется единственное решение класса $AC([0,1], M_N(\mathbb{C}))$.

Пусть $L_{\mu\nu}(\gamma,t)$ и $J_{\lambda\mu\nu}(\gamma,t)$ для всех $\gamma \in H^1_0$ и $t \in [0,1]$ определены следующим образом:

$$L_{\mu\nu}(\gamma,t) = U^A_t(\gamma)^{-1}F_{\mu\nu}(\gamma(t))U^A_t(\gamma),$$
$$J_{\lambda\mu\nu}(\gamma,t) = U^A_t(\gamma)^{-1}\nabla_\lambda F_{\mu\nu}(\gamma(t))U^A_t(\gamma).$$

Предложение 3.1. *Функция $H^1_0 \ni \gamma \to U^A_1(\gamma)$ бесконечно дифференцируема по Фреше, причем для $u \in H^1_0$ выполняется соотношение*

$$\partial_u U^A_1(\gamma) = -U^A_1(\gamma)\int\limits_0^1 L_{\mu\nu}(\gamma,t)u^\mu(t)\dot\gamma^\nu(t)dt - A_\mu(\gamma(1))u^\mu(1)U^A_1(\gamma).$$

Для доказательства см. [21] (см. также [13, 20]).

Определение 3.1. Если $f \in C^1(H^1_0, M_N(\mathbb{C}))$, то α_0-градиент $\mathrm{grad}_{\alpha_0} f$ отображения f — это такой элемент из $C(H^1_0, \mathfrak{H}^0)$, что

$$\Big(\mathrm{grad}_{\alpha_0} f(\gamma),\ M\otimes h\Big)_{\mathfrak{H}^0} = \Big(\partial_h f(\gamma),\ M\Big)_{M_N(\mathbb{C})}$$

для всех $\gamma \in H^1_0$, всех таких $h \in H^1_0$, что $h(1) = 0$, и всех $M \in M_N(\mathbb{C})$.

Конечно, у отображения $f \in C^1(H^1_0, M_N(\mathbb{C}))$ может не существовать α_0-градиент.

Замечание 3.1. В [23] векторное расслоение над гильбертовым многообразием H^1-путей в конечномерном римановом многообразии M, слоем которого над кривой является пространство H^0-полей над этой кривой, обозначается символом α_0. Определение α_0-градиента переносится на пространство функций на гильбертовом многообразии H^1-путей, что позволяет перенести определение лапласиана Леви на случай многообразия (ср. [26]).

Прямым следствием предложения 3.1 является следующее утверждение.

Предложение 3.2. *Имеет место соотношение*

$$\Big(\mathrm{grad}_{\alpha_0} U^A_1(\gamma)\Big)_\mu(t) = -U^A_1(\gamma)L_{\mu\nu}(\gamma,t)\dot\gamma^\nu(t). \tag{3.4}$$

Мы изменим определения дивергенции Леви и лапласиана Леви из предыдущего раздела, так как измененные определения можно будет перенести на случай риманова многообразия.

Определение 3.2. Дивергенция Леви $\operatorname{div}_L^{\{e_n\}}$, порожденная ортонормированным базисом $\{e_n\}$ в $L_2([0,1],\mathbb{R}^d)$, состоящим из элементов H_0^1, — это линейное отображение из $\operatorname{dom}\operatorname{div}_L^{\{e_n\}}$ в пространство всех $M_N(\mathbb{C})$-значных функций на H_0^1, определенное формулой

$$\operatorname{div}_L^{\{e_n\}} B(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d_{e_k} B(\gamma)(e_k), \tag{3.5}$$

где $\operatorname{dom}\operatorname{div}_L^{\{e_n\}}$ состоит из всех $B \in C^1(H_0^1, \mathfrak{H}^0)$, для которых правая часть (3.5) существует для всех $\gamma \in H_0^1$.

Определение 3.3. Лапласиан Леви $\Delta_L^{\{e_n\}}$, порожденный ортонормированным базисом $\{e_n\}$ в $L_2([0,1],\mathbb{R}^d)$, состоящим из элементов H_0^1, — это линейное отображение из $\operatorname{dom}\Delta_L^{\{e_n\}}$ в пространство всех $M_N(\mathbb{C})$-значных функций на H_0^1, действующее по формуле

$$\Delta_L^{\{e_n\}} f(\gamma) = \operatorname{div}_L^{\{e_n\}} \operatorname{grad}_{\alpha_0} f(\gamma), \tag{3.6}$$

где $\operatorname{dom}\Delta_L^{\{e_n\}}$ состоит из всех $f \in C^2(H_0^1, M_N(\mathbb{C}))$, для которых правая часть (3.6) существует.

Пусть $B^A \in C^1(H_0^1, \mathfrak{H}^0)$ определена формулой

$$B^A(\gamma) = (U_1^A(\gamma))^{-1} \operatorname{grad}_{\alpha_0} U_1^A(\gamma). \tag{3.7}$$

Предложение 3.3. *Для всех $u, v \in H_0^1$, удовлетворяющих условию $u(1) = v(1) = 0$, выполняются соотношения*

$$\begin{aligned}
\partial_u B^A(\gamma)v = &\int_0^1 \left[L_{\mu\lambda}(\gamma,t)u^\mu(t)\dot\gamma^\lambda(t),\ \int_0^t L_{\nu\kappa}(\gamma,s)v^\nu(s)\dot\gamma^\kappa(s)ds \right] dt + \\
&+ \int_0^1 \left[L_{\nu\kappa}(\gamma,t)v^\nu(t)\dot\gamma^\kappa(t),\ \int_0^t L_{\mu\lambda}(\gamma,s)u^\mu(s)\dot\gamma^\lambda(s)ds \right] dt - \\
&- \frac12 \int_0^1 \Big(J_{\nu\mu\lambda}(\gamma,t) + J_{\mu\nu\lambda}(\gamma,t)\Big) u^\mu(t)v^\nu(t)\dot\gamma^\lambda(t)dt - \\
&- \frac12 \int_0^1 L_{\mu\nu}(\gamma,t)\Big(v^\mu(t)\dot u^\nu(t) + u^\mu(t)\dot v^\nu(t)\Big)dt,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
\partial_v\partial_u U_1^A(\gamma) = &\, U_1^A(\gamma)\int_0^1 L_{\mu\lambda}(\gamma,t)u^\mu(t)\dot\gamma^\lambda(t) \left(\int_0^t L_{\nu\kappa}(\gamma,s)v^\nu(s)\dot\gamma^\kappa(s)ds \right) dt + \\
&+ U_1^A(\gamma)\int_0^1 L_{\nu\kappa}(\gamma,t)v^\nu(t)\dot\gamma^\kappa(t) \left(\int_0^t L_{\mu\lambda}(\gamma,s)u^\mu(s)\dot\gamma^\lambda(s)ds \right) dt - \\
&- U_1^A(\gamma)\Bigg(\frac12 \int_0^1 \left(J^x_{\nu\mu\lambda}(\gamma,t) + J^x_{\mu\nu\lambda}(\gamma,t)\right) u^\mu(t)v^\nu(t)\dot\gamma^\lambda(t)dt + \\
&+ \frac12 \int_0^1 L^x_{\mu\nu}(\gamma,t)\Big(v^\mu(t)\dot u^\nu(t) + u^\mu(t)\dot v^\nu(t)\Big)dt \Bigg).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Формула (3.9) была доказана в [13] (см. также [9]). Формула (3.8) является следствием формулы (3.9).

Теорема 3.1. *Пусть в $L_2([0,1],\mathbb{R}^d)$ выбран ортонормированный базис $e_n(t)=p_{a_n}h_{b_n}(t)$, где*

$$a_n = n - d\left\lfloor \frac{n-1}{d}\right\rfloor, \quad b_n = \left\lfloor \frac{n+d-1}{d}\right\rfloor,$$

$\{h_n\}$ — слабо равномерно плотный базис в $L_2([0,1],\mathbb{R})$, причем $h_n \in W_0^{1,2}([0,1],\mathbb{R})$ и $h_n(1)=0$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_L^{\{e_n\}} B^A(\gamma) &= -\frac{1}{d}\int_0^1 J^{\mu}{}_{\mu\nu}(\gamma,t)\dot\gamma^{\nu}(t)dt, \\ \Delta_L^{\{e_n\}} U_1^A(\gamma) &= -\frac{1}{d}U_1^A(\gamma)\int_0^1 J^{\mu}{}_{\mu\nu}(\gamma,t)\dot\gamma^{\nu}(t)dt. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Теорема 3.1 является прямым следствием предложения 3.3.

Теорема 3.2. *Пусть базис $\{e_n\}$ определен, как в формулировке предыдущей теоремы. Следующие условия равносильны*:

(1) *связность A на $\mathbb{R}^d$ является решением уравнений Янга—Миллса* (3.2);

(2) *B^A является решением уравнения*

$$\operatorname{div}_L^{\{e_n\}} B^A = 0; \tag{3.11}$$

(3) *параллельный перенос U_1^A является решением уравнения Лапласа для лапласиана $\Delta_L^{\{e_n\}}$*:

$$\Delta_L^{\{e_n\}} U_1^A = 0.$$

Теорема 3.2 является следствием предыдущей теоремы 3.1. Эквивалентность условий (1) и (3) — это теорема Аккарди—Гибилиско—Воловича, которая была изначально доказана для лапласиана Леви, определенного с помощью интегрального функционала (см. [12,13]).

Замечание 3.2. Теорема 3.2 переносится без изменений для даламбертиана Леви и соответствующей дивергенции и для уравнений Янга—Миллса на пространстве Минковского (см. [13,30]). О связи даламбертиана Леви и соответствующей дивергенции с уравнениями Янга—Миллса—Дирака (уравнениями квантовой хромодинамики) см. [8,30]. О связи этих операторов с уравнениями Янга—Миллса—Хиггса см. [30].

Замечание 3.3. Поле $g:\mathbb{R}^d\to U(N)$ называется главным киральным полем (см., например, [5,6]). Его интеграл Дирихле имеет вид

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{tr}\Big(\partial_\mu g(x)\partial^\mu g^{-1}(x)\Big)dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\operatorname{tr}(Z_\mu(x)Z^\mu(x))dx, \tag{3.12}$$

где $Z_\mu = g^{-1}(x)\partial_\mu g(x)$. Уравнения движения кирального поля имеют вид

$$\begin{cases} \operatorname{div} Z = 0, \\ \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu + [Z_\mu, Z_\nu] = 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

где $Z=(Z_1,\ldots,Z_d)$. Параллельный перенос можно рассматривать как киральное поле на бесконечномерном пространстве H_0^1. Уравнение (3.11) является бесконечномерным аналогом первого уравнения системы (3.13). В [4] на физическом уровне строгости рассматривались законы сохранения для теории Янга—Миллса на $\mathbb{R}^3$ (см. также [29]). Было показано, что, если связность A является решением уравнений Янга—Миллса, то можно построить семейство сохраняющихся токов, первым элементом которого является B^A. Сохранение тока понималось в смысле (3.11).

Связь между киральными полями и полями Янга—Миллса заключается в том числе в следующем. Из некоммутативной леммы Пуанкаре, доказанной в [21], следует, что, при некоторых дополнительных условиях, если $B\in C^1(H_0^1,\mathfrak{H}^0)$ удовлетворяет бесконечномерным аналогам уравнений (3.13), то существует такая связность A, что $B=B^A$ и A является решением уравнений Янга—Миллса (см. [30]).

Замечание 3.4. Определение лапласиана Леви как интегрального функционала было перенесено на случай риманова многообразия в работе [26] Р. Леандра и И. В. Воловича. В этой статье было показано, что теорема об эквивалентности уравнений Янга—Миллса и уравнения Лапласа для лапласиана Леви верна и в этом случае. Определение лапласиана Леви с помощью чезаровского усреднения вторых производных по направлению было перенесено на случай риманова многообразия в работе [3] Л. Аккарди и О. Г. Смолянова. Теорема об эквивалентности уравнений Янга—Миллса и уравнения Лапласа—Леви для такого определения была доказана напрямую (см. [7]), при этом связь определений из [3, 26] не исследовалась. В нашей следующей статье мы покажем, что второе определение лапласиана Леви на многообразии является расширением первого.

4. Дифференциальные операторы Леви и инстантоны

В этом разделе $d = 4$. Оказывается, что если специальным образом выбрать ортонормированный базис $\{e_n\}$ в $L_2([0,1],\mathbb{R}^4)$, то уравнения Лапласа для параллельного переноса будут эквивалентны уравнениям автодуальности Янга—Миллса.

Пусть $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ — полностью антисимметричный единичный тензор на $\mathbb{R}^4$, а $*$ — оператор Ходжа. Тогда

$$(*F)_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}.$$

Введем обозначения $F_+ = \frac{1}{2}(F + *F)$ и $F_- = \frac{1}{2}(F - *F)$. Функционал действия Янга—Миллса имеет тогда вид

$$S(A) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^4} \|F(x)\|^2 dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^4} \Big(\|F_+(x)\|^2 + \|F_-(x)\|^2\Big)dx. \tag{4.1}$$

Из тождеств Бьянки следует, что если связность A является решением уравнений автодуальности

$$F = *F \tag{4.2}$$

или антиавдоуальности

$$F = - * F, \tag{4.3}$$

то связность A будет решением уравнений Янга—Миллса. Если связность A — решение уравнений автодуальности (4.2) (уравнений антиавтодуальности (4.3)) и при этом интеграл (4.1) конечен, то A называется инстантоном (антиинстантоном). Если A — инстантон, то функционал действия Янга—Миллса достигает на A своего минимума среди связностей с одинаковым топологическим зарядом

$$k(A) = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^4} \Big(-\|F_+(x)\|^2 + \|F_-(x)\|^2\Big)dx$$

(см., например, [5,6]). Пространство модулей инстантонов (классов эквивалентности относительно калибровочных преобразований) было описано в знаменитой работе [16].

Пусть B — $M_N(\mathbb{C})$-значный антисимметричный тензор ранга $(0,2)$ над $\mathbb{R}^4$, $\mathbf{B}$ — антисимметричная матрица 4×4, элементами которой являются матрицы из $M_N(\mathbb{C})$, определенная по формуле

$$\mathbf{B}_{\mu\nu} = B\left\langle p_\mu, p_\nu\right\rangle.$$

Теорема 4.1. *Пусть $T \in C^1([0,1], SO(4))$ и пусть в $L_2([0,1],\mathbb{R}^4)$ выбран ортонормированный базис $e_n^T(t) = (T(t)p_{a_n})h_{b_n}(t)$, где*

$$a_n = n - 4\left\lfloor\frac{n-1}{4}\right\rfloor, \quad b_n = \left\lfloor\frac{n+3}{4}\right\rfloor,$$

$\{h_n\}$ — слабо равномерно плотный базис в $L_2([0,1],\mathbb{R})$, причем $h_n \in H_0^1$ и $h_n(1) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Выполняются следующие равенства:

$$\operatorname{div}_L^{\{e_n^T\}} B^A(\gamma) = \frac{1}{4}\left(-\int_0^1 J^{\mu}{}_{\mu\nu}(\gamma,t)\dot\gamma^{\nu}(t)dt - \int_0^1 \operatorname{tr}\left(\dot T(t)T^{-1}(t)\boldsymbol{L}(\gamma,t)\right)dt\right), \tag{4.4}$$

$$\Delta_L^{\{e_n^T\}} U_1^A(\gamma) = \frac{1}{4}U_1^A(\gamma)\left(-\int_0^1 J^{\mu}{}_{\mu\nu}(\gamma,t)\dot\gamma^{\nu}(t)dt - \int_0^1 \operatorname{tr}\left(\dot T(t)T^{-1}(t)\boldsymbol{L}(\gamma,t)\right)dt\right). \tag{4.5}$$

Формула (4.5) доказана в [9] для ортонормированного базиса $\{h_n\}$, где $h_n(t) = \sqrt{2}\sin \pi n t$. Доказательство без изменений переносится на случай теоремы 4.1. Формулу (4.4) можно получить как следствие (4.5).

Группы S_L^3 и S_R^3 — нормальные подгруппы группы $SO(4)$, состоящие из вещественных матриц, имеющих вид соответственно

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix},$$

где $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$.

Теорема 4.2. *Пусть $S(A) < \infty$. Пусть $T \in C^1([0,1], S_R^3)$ ($T \in C^1([0,1], S_L^3)$), причем*

$$\dim\operatorname{span}\left\{\dot T(t)T^{-1}(t)\right\}_{t\in[0,1]} \geqslant 2.$$

Пусть базис $\{e_n^T\}$ определен, как в формулировке теоремы 4.1. Тогда следующие три условия равносильны:

(1) *связность A на $\mathbb{R}^4$ является инстантоном (антиинстантоном);*

(2) *параллельный перенос U_1^A является решением уравнения Лапласа для лапласиана $\Delta_L^{\{e_n^T\}}$:*

$$\Delta_L^{\{e_n^T\}} U_1^A = 0;$$

(3) *B^A является решением уравнения*

$$\operatorname{div}_L^{\{e_n^T\}} B^A = 0.$$

Эквивалентность условий (1) и (2) доказана в [9]. Как следствие можно получить эквивалентность условий (1) и (3).

5. Дифференциальные операторы Леви в исчислении Маллявэна

В этом и следующем разделах $h_n(t) = \sqrt{2}\sin\pi n t$.

Пусть $(\Omega,\mathcal{F},P)$ — стандартное вероятностное пространство, ассоциированное с d-мерным броуновским движением $b_t = (b_t^1,\dots,b_t^d)$ на отрезке $[0,1]$, т.е.

$$\Omega = C_0([0,1],\mathbb{R}^d) := \left\{\gamma \in C([0,1],\mathbb{R}^d):\ \gamma(0) = 0\right\},$$

$\mathcal{F}$ — σ-алгебра, порожденная b_t, и P — мера Винера. Стохастические дифференциалы Ито и Стратоновича будем обозначать символами db и $\circ db$ соответственно.

Пусть H — вещественное или комплексное пространство. Пусть $\mathcal{F}C^\infty(H)$ — пространство H-значных C^∞-гладких цилиндрических функций с компактным носителем на $C_0([0,1],\mathbb{R}^d)$. Пусть $\{g_n\}$ — произвольный ортонормированный базис в H_0^1. Соболевская норма $\|\cdot\|_{r,p}$ на $\mathcal{F}C^\infty(H)$ определяется следующим образом:

$$\|f\|_{r,p} = \sum_{k=0}^{r}\left(E\left(\sum_{i_1\dots i_k=1}^{\infty}\left\|\partial_{g_{i_1}}\dots\partial_{g_{i_k}} f\right\|_H^2\right)^{p/2}\right)^{1/p}.$$

Такое определение не зависит от выбора базиса $\{g_n\}$. Пространство Соболева $W^{r,p}(P,H)$ — это замыкание $\mathcal{F}C^\infty(H)$ с помощью нормы $\|\cdot\|_{r,p}$. Символ $W^{r,\infty}(P,H)$ обозначает проективный предел $\operatorname{proj}\lim\limits_{p\to+\infty} W^{r,p}(P,H)$.

Пусть $p \geqslant 1$. Если $h \in H_0^1$, то оператор ∂_h можно продолжить по непрерывности до линейного оператора из $W^{1,p}(P,H)$ в $L_p(P, H\otimes H_0^1)$. Это продолжение мы будем обозначать тем же символом ∂_h. Если $f \in W^{1,p}(P,H)$, то существует $Df \in L_2(P, H\otimes H_0^1)$, причем $(Df,h)_{H_0^1} = \partial_h F$. Если $f \in W^{2,p}(P,H)$, то $Df \in W^{1,p}(P, H\otimes H_0^1)$ и вторые производные f можно определить по аналогии. (О различных способах определения пространств Соболева на мерой Винера см., например, [19]). 8 Для каждого $x \in \mathbb{R}^d$ стохастический параллельный перенос $U^x(b,t)$, порожденный связностью A, — это решение стохастического дифференциального уравнения в смысле Стратоновича

$$U^x(b,t) = I_N - \int\limits_0^t A_\mu(x+b_s)U^x(b,s)\circ db_s^\mu. \tag{5.1}$$

Если связность A и все ее производные первого и второго порядка ограничены, у уравнения (5.1) существует единственное сильное решение.

Пусть стохастические процессы $L^x_{\mu\nu}(b,t)$ и $J^x_{\lambda\mu\nu}(b,t)$, принимающие значения в пространстве тензоров, определены следующим образом:

$$L^x_{\mu\nu}(b,t) = U^x(b,t)^{-1}F_{\mu\nu}(x+b_t)U^x(b,t),$$
$$J^x_{\lambda\mu\nu}(b,t) = U^x(b,t)^{-1}\nabla_\lambda F_{\mu\nu}(x+b_t)U^x(b,t).$$

Предложение 5.1. *Пусть связность A и все ее производные первого и второго порядка ограничены. Тогда $U^x(b,1) \in W^{1,\infty}(P, M_N(\mathbb{C}))$. Если $u \in H_0^1$, то*

$$\partial_u U^x(b,1) = -U^x(b,1)\int\limits_0^1 L^x_{\mu\nu}(b,s)u^\mu(t)\circ db_t^\nu - A_\mu(x+b_1)u^\mu(1)U^x(b,1).$$

Для случая исчисления Маллявэна понятия α_0-градиента, дивергенции Леви и лапласиана Леви можно перенести следующим образом.

Определение 5.1. Если $f \in W^{1,2}\big(P, M_N(\mathbb{C})\big)$, то запись

$$\operatorname{grad}_{\alpha_0} f \in L\Big(L_2\big([0,1],\mathbb{R}^d\big), L_2\big(P, M_N(\mathbb{C})\big)\Big)$$

означает, что $\operatorname{grad}_{\alpha_0} f(\gamma)h = \partial_h f$ для всех $h \in H_0^1$, удовлетворяющих условию $h(1)=0$.

Прямым следствием предложения 5.1 является следующее утверждение.

Предложение 5.2. *Для $h \in L_2([0,1],\mathbb{R}^d)$ выполняется соотношение*

$$\Big(\operatorname{grad}_{\alpha_0} U^x(b,1)\Big)h = -U^x(b,1)\int\limits_0^1 L_{\mu\nu}(b,t)h^\mu(t)\circ db_t^\nu.$$

Определение 5.2. Дивергенция Леви $\operatorname{div}_L^{\{e_n\}}$, порожденная ортонормированным базисом $\{e_n\}$ в $L_2\big([0,1],\mathbb{R}^d\big)$, состоящим из элементов H_0^1, — это линейное отображение из $\operatorname{dom}\operatorname{div}_L^{\{e_n\}}$ в $L_2(P, M_N(\mathbb{C}))$, определенное следующим образом:

$$\operatorname{div}_L^{\{e_n\}} B(b) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\sum_{\mu=1}^d \partial_{e_k}B(b)(e_k), \tag{5.2}$$

где последовательность в правой части (5.2) сходится сильно в $L_2\big(P, M_N(\mathbb{C})\big)$ и область определения $\operatorname{dom}\operatorname{div}_L^{\{e_n\}}$ состоит из всех $B \in L\big(L_2\big([0,1],\mathbb{R}^d\big),\ W^{1,2}\big(P, M_N(\mathbb{C})\big)\big)$, для которых правая часть (5.2) существует.

Определение 5.3. Лапласиан Леви $\Delta_L^{\{e_n\}}$, порожденный ортонормированным базисом $\{e_n\}$ в $L_2\big([0,1],\mathbb{R}^d\big)$, состоящим из элементов H_0^1, — это линейное отображение из $\operatorname{dom}\Delta_L^{\{e_n\}}$ в пространство $L_2\big(P, M_N(\mathbb{C})\big)$, действующее по формуле

$$\Delta_L^{\{e_n\}} f = \operatorname{div}_L^{\{e_n\}} \operatorname{grad}_{\alpha_0} f, \tag{5.3}$$

где $\operatorname{dom}\Delta_L^{\{e_n\}}$ состоит из всех $f \in W^{2,2}\big(P, M_N(\mathbb{C})\big)$, для которых правая часть (5.3) существует.

Замечание 5.1. Теория Соболева—Шварца над бесконечномерной гауссовской мерой — это исчисление Хиды (white noise analysis). В стохастическом анализе наиболее изучен лапласиан Леви, действующий на обобщенных функционалах Хиды (см. [24, 25]). Можно показать, что лапласиан, заданный определением 5.3, не совпадает с таким лапласианом при естественном вложении пространства Соболева в пространство обобщенных функционалов Хиды.

Пусть

$$B^{A,x} \in L\Big(L_2\big([0,1],\mathbb{R}^d\big),\ L_2\big(P, M_N(\mathbb{C})\big)\Big)$$

определена по формуле

$$B^{A,x}(b)u = U^x(b,1)^{-1}\big(\operatorname{grad}_{\alpha_0} U^x(b,1)u\big) = -\int_0^1 L^x_{\mu\nu}(b,t)u^\mu(t)\circ db_t^\nu.$$

Замечание 5.2. Пусть χ_t — индикатор отрезка $[0,t]$. Рассмотрим случайный процесс

$$R^x_\mu(b,t) := B^{A,x}_\mu(b)(p_\mu\chi_t) = -\int_0^t L^x_{\mu\nu}(b,s)\circ db_s^\nu = -\int_0^t L^x_{\mu\nu}(b,s)db_s^\nu - \frac{1}{2}\int_0^t J^x_{\nu\mu}{}^{\nu}(b,s)ds.$$

Процесс $R^x(b,t) = \Big(R^x_1(b,t),\dots,R^x_d(b,t)\Big)$ является мартингалом тогда и только тогда, когда связность A является решением уравнений Янга—Миллса (ср. [14, 15, 17]).

В настоящей статье лапласиан и дивергенция Леви определяются с небольшими отличиями от статьи автора [31]. Тем не менее, доказательства из [31] переносится практически без изменений для утверждений, приведенных ниже в этом разделе.

Предложение 5.3. *Пусть связность A и все ее частные производные до третьего порядка включительно ограничены. Тогда $U^x(b,1) \in W^{2,\infty}\big(P, M_N(\mathbb{C})\big)$ и $B^{A,x} \in L\Big(L_2\big([0,1],\mathbb{R}^d\big),\ W^{1,2}\big(P, M_N(\mathbb{C})\big)\Big)$. Если $u, v \in H_0^1$ и $u(1) = v(1) = 0$, то*

$$\begin{aligned}\partial_u B^{A,x}(b)v = &\int_0^1 \left[L^x_{\mu\lambda}(b,t)u^\mu(t),\ \int_0^t L^x_{\nu\kappa}(b,s)v^\nu(s)\circ db_s^\kappa\right]\circ db_t^\lambda + \\ &+ \int_0^1 \left[L^x_{\nu\kappa}(b,t)v^\nu(t),\ \int_0^t L^x_{\mu\lambda}(b,s)u^\mu(s)\circ db_s^\lambda\right]\circ db_t^\kappa - \\ &- \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(J^x_{\nu\mu\lambda}(b,t) + J^x_{\mu\nu\lambda}(b,t)\Big)u^\mu(t)v^\nu(t)\circ db_t^\lambda - \\ &- \frac{1}{2}\int_0^1 L^x_{\mu\nu}(b,t)\Big(v^\mu(t)\dot u^\nu(t) + u^\mu(t)\dot v^\nu(t)\Big)dt,\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}\partial_v\partial_u U^x(b,1) = U^x(b,1)\int_0^1 L^x_{\mu\lambda}(b,t)u^\mu(t)\left(\int_0^t L^x_{\nu\kappa}(b,s)v^\nu(s)\circ db^\kappa_s\right)\circ db^\lambda_t +\\ + U^x(b,1)\int_0^1 L^x_{\nu\kappa}(b,t)v^\nu(t)\left(\int_0^t L^x_{\mu\lambda}(b,s)u^\mu(s)\circ db^\lambda_s\right)\circ db^\kappa_t -\\ - U^x(b,1)\left(\frac{1}{2}\int_0^1 \Big(J^x_{\nu\mu\lambda}(b,t)+J^x_{\mu\nu\lambda}(b,t)\Big)u^\mu(t)v^\nu(t)\circ db^\lambda_t +\right.\\ \left. + \frac{1}{2}\int_0^1 L^x_{\mu\nu}(b,t)\Big(v^\mu(t)\dot{u}^\nu(t)+u^\mu(t)\dot{v}^\nu(t)\Big)dt\right). \quad (5.5)\end{aligned}$$

Теорема 5.1. *Пусть связность A и все ее частные производные до третьего порядка включительно ограничены. Пусть в $L_2\big([0,1],\mathbb{R}^d\big)$ выбран ортонормированный базис $e_n(t) = p_{a_n}h_{b_n}(t)$, где*

$$a_n = n - d\left\lfloor\frac{n-1}{d}\right\rfloor, \quad b_n = \left\lfloor\frac{n+d-1}{d}\right\rfloor.$$

Выполняются следующие равенства:

$$\operatorname{div}_L^{\{e_n\}} B^{A,x}(b) = -\frac{1}{d}\int_0^1 J^{x\mu}{}_{\mu\nu}(b,s)db^\nu_s, \quad (5.6)$$

$$\Delta_L^{\{e_n\}}U^x(b,1) = \frac{1}{d}U^x(b,1)\left(\int_0^1 L^x_{\mu\nu}(b,t)L^{x\mu\nu}(b,t)dt - \int_0^1 J^{x\mu}{}_{\mu\nu}(b,s)db^\nu_t\right). \quad (5.7)$$

Теорема 5.2. *Пусть связность A и все ее частные производные до третьего порядка включительно ограничены. Пусть базис $\{e_n\}$ определен, как в формулировке предыдущей теоремы. Следующие условия равносильны*:

(1) *связность A на $\mathbb{R}^d$ является решением уравнений Янга—Миллса* (3.2);
(2) *для стохастического параллельного переноса $U^x(b,1)$ выполняется соотношение*

$$\Delta_L^{\{e_n\}}U^x(b,1) = \frac{1}{d}U^x(b,1)\int_0^1 L^x_{\mu\nu}(b,t)L^{x\mu\nu}(b,t)dt; \quad (5.8)$$

(3) *$B^{A,x}$ является решением уравнения*

$$\operatorname{div}_L^{\{e_n\}} B^{A,x} = 0.$$

Замечание 5.3. В [31] рассматривался только случай связности в тривиальном расслоении над $\mathbb{R}^d$. Лапласиан Леви на пространстве Соболева над мерой Винера на компактном римановом многообразии и его связь с уравнениями Янга—Миллса в векторном расслоении над этим многообразием рассматривались в работе [26] Р. Леандра и И. В. Воловича. При этом лапласиан Леви в этой работе определялся как интегральный функционал, заданный специальным видом второй производной. В отличие от детерминистского случая в стохастическом случае лапласиан Леви, определенный как среднее Чезаро вторых производных по направлению, не является расширением лапласиана Леви, определенного как интегральный функционал, так как у значения лапласиана Леви из [26] на стохастическом параллельном переносе нет первого слагаемого из правой части (5.7). На данный момент связь между лапласианом, заданным определением 5.3, и лапласианом, введенным в [26], не исследована.

Функционал действия Янга—Миллса можно выразить как аналог интеграла Дирихле, где стохастический параллельный перенос является киральным полем, суммирование заменено на усреднение по Чезаре, а мера Лебега замена на произведение меры Лебега и меры Винера.

Теорема 5.3. *Если* $S(A) < \infty$ *и*

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^d} \operatorname{tr}\Big(\nabla_\mu F^{\mu}{}_{\nu}(x)\nabla_\lambda F^{\lambda\nu}(x)\big)dx < \infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{d}\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^d} E\Big(\operatorname{tr}\big(\partial_{p_\mu h_k}U^x(b,1)^{-1}\partial_{p_\mu h_k}U^x(b,1)\big)\Big)dx = S(A). \tag{5.9}$$

Функционал действия Янга—Миллса выражался с помощью стохастического параллельного переноса при $d = 4$ другим способом в [14, 15, 17].

6. Дифференциальные операторы Леви в исчислении Маллявэна и инстантоны

В этом разделе снова $d = 4$.

Теорема 6.1. *Пусть* $T \in C^1([0,1], SO(4))$ *и пусть в* $L_2([0,1],\mathbb{R}^4)$ *выбран ортонормированный базис* $e^T_n(t) = (T(t)p_{a_n})h_{b_n}(t)$*, где*

$$a_n = n - 4\left\lfloor\frac{n-1}{4}\right\rfloor, \quad b_n = \left\lfloor\frac{n+3}{4}\right\rfloor.$$

Пусть связность A *и все ее частные производные до третьего порядка включительно ограничены. Для всех* $x \in \mathbb{R}^d$ *выполняются равенства*

$$\operatorname{div}_L^{\{e^T_n\}} B^{A,x}(b) = \frac{1}{4}\left(-\int\limits_0^1 J^{x\mu}{}_{\mu\nu}(b,t)db^\nu_t - \int\limits_0^1 \operatorname{tr}\Big(\dot T(t)T^{-1}(t)\boldsymbol{L}^x(b,t)\Big)dt\right),$$

$$\Delta_L^{\{e^T_n\}}U^x(b,1) = \frac{1}{4}U^x(b,1)\Bigg(\int\limits_0^1 L^x_{\mu\nu}(b,t)L^{x\mu\nu}(b,t)dt -$$

$$-\int\limits_0^1 J^{x\mu}{}_{\mu\nu}(b,t)db^\nu_t - \int\limits_0^1 \operatorname{tr}\Big(\dot T(t)T^{-1}(t)\boldsymbol{L}^x(b,t)\Big)dt\Bigg).$$

Теорема 6.1 является прямым следствием предложения 5.3.

Теорема 6.2. *Пусть* $T \in C^1\big([0,1], S^3_R\big)$ $\big(T \in C^1\big([0,1], S^3_L\big)\big)$*, причем*

$$\dim\operatorname{span}\Big\{\dot T(t)T^{-1}(t)\Big\}_{t\in[0,1]} \geqslant 2.$$

Пусть базис $\{e^T_n\}$ *определен, как в формулировке теоремы* 6.1*. Пусть* $S(A) < \infty$*. Пусть связность* A *и все ее частные производные до третьего порядка включительно ограничены. Пусть* $x \in \mathbb{R}^d$*. Тогда следующие три условия равносильны*:

(1) *связность* A *на* $\mathbb{R}^4$ *является инстантоном (антиинстантоном)*;

(2) *для стохастического параллельного переноса* $U^x(b,1)$ *выполняется*:

$$\Delta_L^{\{e^T_n\}}U^x(b,1) = \frac{1}{4}U^x(b,1)\int\limits_0^1 L^x_{\mu\nu}(b,t)L^{x\mu\nu}(b,t)dt;$$

(3) $B^{A,x}$ *является решением уравнения*

$$\operatorname{div}_L^{\{e^T_n\}} B^{A,x} = 0.$$

Доказательство. Докажем нетривиальную часть теоремы. Пусть для простоты $x = 0$. Будем обозначать $L^0(b,t)$ и $J^0(b,t)$ символами $L(b,t)$ и $J(b,t)$. Если выполняется условие (2) или (3) теоремы 6.2, то

$$\int_0^1 J^{\mu}{}_{\mu\nu}(b,t)db_t^{\nu} + \int_0^1 \mathrm{tr}\,\Big(\dot{T}(t)T^{-1}(t)\mathbf{L}(b,t)\Big)dt = 0.$$

Из теоремы Струка—Варадана о носителе диффузионного процесса (см. [22, 28]) следует, что

$$\int_0^1 J^{\mu}{}_{\mu\nu}(\gamma,t)\dot{\gamma}^{\nu}(t)dt + \int_0^1 \mathrm{tr}\,\Big(\dot{T}(t)T^{-1}(t)\mathbf{L}(\gamma,t)\Big)dt = 0$$

для всех $\gamma \in H_0^1$. Таким образом, теорема 6.2 является следствием теоремы 4.2. □

Автор благодарит О. Г. Смолянова и И. В. Воловича за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авербух В. И., Смолянов О. Г.* Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах// Усп. мат. наук. — 1967. — *22*, № 6 (138). — С. 201–260.
2. *Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В.* Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. II. Дифференциальные операторы и их преобразования Фурье// Тр. Моск. мат. о-ва. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1972. — *27*. — С. 249–262.
3. *Аккарди Л., Смолянов О. Г.* Формулы Фейнмана для эволюционных уравнений с лапласианом Леви на бесконечномерных многообразиях// Докл. РАН. — 2006. — *407*, № 5. — С. 1–6.
4. *Арефьева И. Я., Волович И. В.* Функциональные высшие законы сохранения в калибровочных теориях, Обобщенные функции и их применения в математической физике// Тр. Междунар. конф. — М.: ВЦ АН СССР, 1981. — С. 43–49.
5. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. — М.: Наука, 1986.
6. *Сергеев А. Г.* Гармонические отображения/ Лекц. курсы НОЦ. — М.: Мат. ин-т им. В. А. Стеклова, 2008. — *10*.
7. *Волков Б. О.* Лапласианы Леви и связанные с ними конструкции/ Дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук. — М., 2014.
8. *Волков Б. О.* Даламбертианы Леви и их применение в квантовой теории// Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. — 2015. — *19*, № 2. — С. 241–258.
9. *Волков Б. О.* Лапласианы Леви и инстантоны// в сб.: Современные проблемы математики, механики и математической физики/ Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — М.: 2015. — *290*. — С. 226–238.
10. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. — М.: Наука, 1967.
11. *Accardi L.* Yang–Mills equations and Lévy–Laplacians// в кн.: Dirichlet Forms and Stochastic Processes (Beijing, 1993). — Berlin: de Gruyter, 1995. — С. 1–24.
12. *Accardi L., Gibilisco P., Volovich I. V.* The Lévy Laplacian and the Yang–Mills equations// Rend. Lincei. — 1993. — *4*. — С. 201–206.
13. *Accardi L., Gibilisco P., Volovich I. V.* Yang–Mills gauge fields as harmonic functions for the Levy Laplacians// Russ. J. Math. Phys. — 1994. — *2*, № 2. — С. 235–250.
14. *Arnaudon M., Bauer R. O., Thalmaier A.* A probabilistic approach to the Yang–Mills heat equation// J. Math. Pures Appl. — 2002. — *81*. — С. 143–166.
15. *Arnaudon M., Thalmaier A.* Yang–Mills fields and random holonomy along Brownian bridges// Ann. Probab. — 2003. — *31*, № 2. — С. 769–790.
16. *Atiyah M. F., Drinfeld V. G., Hitchin N. J., Manin Yu. I.* Construction of instantons// Phys. Lett. A. — 1978. — *65*. — С. 185–187.
17. *Bauer R. O.* Characterizing Yang–Mills fields by stochastic parallel transport// J. Fuct. Anal. — 1998. — *155*, № 1. — С. 536–549.
18. *Bauer R. O.* Yang—Mills fields and stochastic parallel transport in small geodesic balls// Stochastic Process. Appl. — 2000. — *89*, № 2. — С. 213—226.
19. *Bogachev V. I.* Gaussian measures. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1998.
20. *Driver B.* Classifications of bundle connection pairs by parallel translation and lassos// J. Funct. Anal. — 1989. — *83*. — С. 185–231.

21. *Gross L.* A Poincarè lemma for connection forms// J. Funct. Anal. — 1985. — *63.* — C. 1–46.
22. *Ikeda N., Watanabe S.* Stochastic differential equations and diffusions processes. — Amsterdam: North-Holland, 1981.
23. *Klingenberg W.* Riemannian geometry. Vol. 1. — Berlin: de Gruyter, 1982.
24. *Kuo H.-H., Obata N., Saitô K.* Lévy Laplacian of generalized functions on a nuclear space// J. Funct. Anal. — 1990. — *94*, № 1. — C. 74–92.
25. *Kuo H.-H.* Recent progress on the white noise approach to the Levy Laplacian// в сб.: Quantum Information and Complexity/ Proc. Meijo Winter School 2003, Nagoya, Japan, January 6–10, 2003. — River Edge, New Jersey: World Scientific, 2004. — C. 267–295.
26. *Leandre R., Volovich I. V.* The stochastic Lévy Laplacian and Yang–Mills equation on manifolds// Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. — 2001. — *4*, № 2. — C. 151–172.
27. *Stafford S.* A stochastic criterion for Yang–Mills connections// в кн.: Diffusion Processes and Related Problems in Analysis, Vol. I. — Boston, MA: Birkhäuser, 1990. — C. 313–322.
28. *Stroock D. W., Varadhan S. R. S.* On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle// Proc. 6 Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probability. Vol. 3. Probability Theory. — Berkeley, California: University of California Press, 1972. — C. 333–359.
29. *Polyakov A. M.* Gauge fields as rings of glue// Nucl. Phys. B. — 1980. — *164.* — C. 171–188.
30. *Volkov B. O.* Levy differential operators and gauge invariant equations for Dirac and Higgs fields/ e-print `arXiv: 1612.00310` (2016).
31. *Volkov B. O.* Stochastic Lévy differential operators and Yang–Mills equations// Infin. Dimens. Anal. Quant. Probab. Relat. Top. — 2017. — *20*, № 2. — 1750008.

Б. О. Волков
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук;
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
E-mail: `borisvolkov1986@gmail.com`