Л. А. Скорняков, Модули, *Итоги науки. Сер. Мат. Алгебра. Топол. Геом. 1965*, 1967, 181–216

МОДУЛИ

Л. А. Скорняков

В настоящем обзоре рассматриваются работы по теории модулей, прореферированные в РЖ Математика в 1963—1965 гг. Оставлены без внимания статьи, относящиеся к гомологической алгебре. Это касается, в частности, исследования фильтрованных модулей. Не упоминаются также статьи, в которых модули применяются к изучению радикала в ассоциативных кольцах. Относящиеся сюда работы рассмотрены в обзоре по теории колец. Если не оговорено противное, все рассматриваемые в обзоре модули считаются левыми и унитарными. Поэтому, как правило, излагаются левосторонние варианты результатов вне зависимости от того, какой вариант избран автором или референтом. В заключение отметим, что в рассматриваемый период появились книги Маклейна [159] и Джанса [128], посвященные гомологической алгебре. Здесь же следует назвать заметку Фландерса [193], в которой исправляется доказательство одной из теорем известной книги Картана и Эйленберга (Гомологическая алгебра. М., ИЛ, 1960).

1. Радикал. Следуя А. Г. Курошу [8—10], назовем класс r модулей радикальным, если: 1) Класс r замкнут относительно эпиморфных образов; 2) Всякий модуль A обладает r-радикалом, т. е. подмодулем $r(A)$ из r, содержащим все остальные подмодули, принадлежащие r; 3) Фактормодуль всякого модуля по его r-радикалу r-полупрост, т. е. $r(A/r(A))=0$. Кручением или наследственным радикалом называется такой радикал r, что $r(A)=A$ для всякого подмодуля A модуля $r(B)$. В работах А. Г. Куроша содержится полное описание радикалов периодических абелевых групп, полученное позже Диксоном [75]. Маранда [162] предложил использовать для описания радикалов в модулях язык инъективных структур. Модуль Q называется инъективным относительно отображения $f: A \to B$, если для любого $\varphi: A \to Q$, существует такое отображение $\psi: B \to Q$, что $\varphi = f\psi$. Пара $\mathfrak{B} = (\mathfrak{S}, \mathfrak{Q})$, где $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{Q}$ — некоторые классы гомоморфизмов и модулей, соответственно, называется инъективной структурой, если; (С1) $\mathfrak{Q}$ — совокупность всех модулей, инъективных относительно всех гомоморфизмов из $\mathfrak{S}$; (С2) $\mathfrak{S}$ — совокупность всех гомоморфизмов, относительно которых инъективны все модули из $\mathfrak{Q}$; (С3) Для всякого модуля A найдутся модуль Q из $\mathfrak{Q}$ и гомоморфизм $f: A \to Q$, принадлежащий $\mathfrak{S}$. Модули из $\mathfrak{Q}$ будем называть $\mathfrak{B}$-инъективными. Инъективная структура $\mathfrak{B}$ называется регулярной, если f и Q в свойстве С3) всегда можно выбрать так, что для всякого гомоморфизма $\varphi: A \to Q'$, где $Q' \in \mathfrak{Q}$, существует один и только один гомоморфизм $\psi: Q \to Q'$ такой, что $\varphi = f\psi$. Всякая инъективная структура $\mathfrak{B}$ определяет радикал $\mathfrak{R}$, где $\mathfrak{R}(A)$ — наибольшее среди ядер гомоморфизмов из $\mathfrak{S}$, определенных на A. Наоборот, если $\mathfrak{R}$ — радикал, то класс всех $\mathfrak{R}$-полупростых модулей является классом инъективных объектов наибольшей инъективной структуры, определяющей радикал $\mathfrak{R}$. Для любой инъективной структуры $\mathfrak{B}$ описана наименьшая регулярная структура, содержащая $\mathfrak{B}$ и определяющая тот же самый радикал. Если $\mathfrak{R}$ — кручение, то совокупность $\mathfrak{J}$ левых идеалов кольца Λ, фактормодули по которым $\mathfrak{R}$-радикальны, обладает следующими свойствами: 1) Если $I \in \mathfrak{J}$, J — левый идеал и $I \subseteq J$, то $J \in \mathfrak{J}$; 2) Если $I, J \in \mathfrak{J}$, то $I \cap J \in \mathfrak{J}$; 3) Если $I \in \mathfrak{J}$, то $(I:\xi) = \{\lambda / \lambda \in \Lambda, \lambda\xi \in \mathfrak{J}\} \in \mathfrak{J}$ для всякого $\xi \in \Lambda$; 4) Если I — левый идеал, $I \subseteq J$, $J \in \mathfrak{J}$ и $(I:\xi) \in \mathfrak{J}$ для всякого $\xi \in J$, то $I \in \mathfrak{J}$. Наоборот, для каждой системы J левых идеалов кольца Λ, обладающей свойствами 1) — 4), существует одно и только одно кручение $\mathfrak{R}$, при котором $I \in \mathfrak{J}$ равносильно $\mathfrak{R}$-радикальности фактормодуля Λ / I. Кручение модуля A, указанное выше, определяется равенством $\mathfrak{R}(A) = \{a \mid a \in A, (0:a) \in \mathfrak{J}\}$. Ю. М. Рябухин [15] доказал, что свойства 2) и 4) могут быть заменены свойством 2'): если I и J — левые идеалы кольца Λ, причем $J \in \mathfrak{J}$ и $(I:\xi) \in \mathfrak{J}$ для всех $\xi \in \Lambda$, то $I \in \mathfrak{J}$. Из результатов Маранды и Рябухина нетрудно извлечь описание всех кручений для случая абелевых групп. Некоторые общие результаты о радикале модуля получил Диксон [74], [75]. Далее, легко видеть, что для абелевых групп радикальным классом является класс всех периодических групп. Ясно также, что дословное перенесение группового определения периодичности на произвольные модули не является удачным. В обзоре [21] уже упоминалась работа Хаттори [114], где вносились необходимые коррективы. В том же направлении пошли Леви [157] и Л. Ш. Иоффе [7]. Элемент a называется периодическим в смысле Леви (в смысле Л. Ш. Иоффе), если найдется такой λ из кольца Λ, что $\lambda a=0$ и $r(\lambda)$ или $l(\lambda)=0$*) ($r(\lambda)=0$). Модуль, не содержащий ненулевых периодических элементов, называется модулем без кручения в соответствующем смысле. Проверяется, что классы $\mathfrak{R}_л$ и $\mathfrak{R}_и$ модулей, не допускающих ненулевых отображений на модули без кручения в смысле Леви и Л. Ш. Иоффе, соответственно, оказываются радикальными. Если Λ — кольцо без делителей нуля, то наследственность радикала $\mathfrak{R}_и$ эквивалентна каждому из следующих свойств кольца Λ: 1) $\mathfrak{R}_и(A)$ совпадает с множеством периодических элементов для каждого Λ-модуля A; 2) совокупность периодических элементов каждого Λ-модуля образует подмодуль; 3) кольцо Λ обладает левым кольцом частных. Заметим, что кольцо допускает левое кольцо частных тогда и только тогда, когда во всяком модуле над ним периодические в смысле Леви элементы образуют подмодуль. Если каждый полупростой в смысле Леви конечно-порожденный Λ-модуль вложим в свободный и Λ обладает двусторонним кольцом частных, то и всякий конечно-порожденный Λ-модуль вложим в свободный [157]. Некоторые результаты, связанные с понятием кручения в модуле имеются в работе Банашевского [39]. Л. Ш. Иоффе [7] отметила, что почти дословное повторение рассуждений Ротмана ([214], [21], стр. 82) позволяет перенести его результат на кольцо Λ, в котором из $r(\lambda)=0$ вытекает $\Lambda\lambda=\lambda\Lambda$. Точнее, обратимость слева всех левых неделителей нуля такого кольца Λ равносильна расщепляемости последовательности $0\to\mathfrak{R}_и(A)\to A\to A/\mathfrak{R}_и(A)\to 0$ для всякого Λ-модуля A. С расщепляемостью этой последовательности связаны и исследования Капланского [133], предполагавшего, что Λ является коммутативной областью целостности. Периодический модуль T он называется UT-модулем, если точная последовательность $0\to T\to A\to B\to 0$ расщепляема для всякого модуля B без кручения. В свою очередь модуль B без кручения называется UF-модулем, если та же точная последовательность расщепляема для всякого периодического модуля T. Оказалось, что всякий UF-модуль является плоским, а его проективная размерность $\leqslant 1$. Инъективная размерность UT-модуля также не превосходит единицы. Дано условие, достаточное для того, чтобы модуль оказался UT-модулем. Чейс [64] получил некоторые результаты о моду-

*) Через $l(\lambda)$ и $r(\lambda)$ обозначаются левый и правый аннулятор элемента λ, соответственно.

лях без кручения над кольцом многочленов от двух переменных. Босток и Паттерсон [52] исследовали радикал Дивинского. Для определения этого радикала в модуле A рассматривается некоторое множество $\mathfrak{F}$ эндоморфизмов модуля A, замкнутое относительно присоединенного умножения $f \circ g = f + g - fg$. Подгруппа H из A называется $\mathfrak{F}$-допустимой, если для каждого x из H найдется такое $g \in \mathfrak{F}$, что $g(x) = x$. Объединение всех $\mathfrak{F}$-допустимых подгрупп оказывается $\mathfrak{F}$-допустимым подмодулем, который и называется радикалом Дивинского. Вопрос о том, будет ли радикал Дивинского радикалом в смысле А. Г. Куроша, Босток и Паттерсон, не рассматривают. То же самое можно сказать и о радикале Голди [104]. Он положил $Z(A) = \{a \mid a \in A, \text{Апп}_\Lambda a$ плотен в $\Lambda\}$*)**) и определил радикал Z_2 как полный прообраз модуля $Z(A/Z(A))$ в A. Доказано, что $Z(Z_2(A)) = Z_2(A)$ и что $Z_2(A) = Z(A)$, если $Z(\Lambda) = 0$. Большая серия работ связана с терциарным радикалом [95 — 97, 152, 153, 207]. Однако полученные здесь результаты настолько тесно примыкают к теории разложения идеалов в кольцах, что их целесообразнее рассматривать в соответствующем обзоре.

В заключение остановимся на понятии сердцевины модуля, исследованном Лесьёром и Круазо [71, 72, 151, 154, 155]. Сердцевина $C(Q)$ инъективного модуля Q определяется как пересечение всех плотных в Q ядер эндоморфизмов модуля Q. Для произвольного модуля A сердцевина определяется равенством $C(A) = C(\hat{A}) \cap A$, где $\hat{A}$ — инъективная оболочка модуля A. Заметим, что совокупность $J(Q)$ упомянутых выше эндоморфизмов с плотными ядрами совпадает с радикалом Джекобсона кольца эндоморфизмов $\mathfrak{E}(Q)$ модуля Q [89]. Если A — конечномерный Λ-модуль ([21], стр. 86), то факторкольцо $\Gamma = \mathfrak{E}(Q)/J(Q)$ оказывается полупростым в классическом смысле. Если, кроме того, $Z(A) = 0$, то $C(\hat{A}) = \hat{A}$. Из конечномерности модуля A вытекает, что $\hat{A} = \dot{\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}} Q_i$, где Q_i — неразложимы. Если среди модулей Q_i имеется в точности p попарно неизоморфных, то скажем, что степень неоднородности модуля A равна p. Если $p = 1$, то модуль называется изотипическим. Кольцо Γ оказывается простым (телом) тогда и только тогда, когда $p = 1$ $(n = 1)$. Сердце-

---

*) Если A—Λ-модуль и $S \subseteq A$, то полагаем $\text{Апп}_\Lambda S = \{\lambda \mid \lambda \in \Lambda, \lambda s = 0$ для всех $s \in S\}$. Если $T \subseteq \Lambda$, то $\text{Апп}_A T = \{a \mid a \in A, \tau a = 0$ для всех $\tau \in T\}$.

**) Будем говорить, что подмодуль A модуля B плотен в B, если A имеет ненулевое пересечение со всяким ненулевым подмодулем модуля B.

вина $C(A)$ совпадает с пересечением подмодулей X модуля A, обладающих следующими свойствами: а) X плотно в A; б) $\widehat{A/X}$ разлагается в прямую сумму модулей, изоморфных каким-либо из Q_i. Если кольцо Λ-нётерово слева, а A — Λ-модуль, все ненулевые подмодули которого плотны в нем, то $C(A)$ совпадает с пересечением ненулевых изотипических подмодулей модуля A. Заметим еще, что $C(\hat{A})$ можно рассматривать как правый Γ-модуль. Правые идеалы кольца Γ, содержащие $\text{Анн}_\Gamma C(\hat{A})$, образуют дедекиндову структуру L с дополнениями длины $\leqslant n$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\text{Анн}_\Gamma C(\hat{A}) = 0$. Структура L антиизоморфна структуре замкнутых подмодулей Γ-модуля $C(\hat{A})$ (подмодуль M называется замкнутым, если $\text{Анн}_{C(\hat{A})}\text{Анн}_\Gamma M = M$), а также $C(A)$. Правые идеалы I из L характеризуются свойством $\text{Анн}_\Gamma\text{Анн}_{C(\hat{A})} I = I$. Замкнутые подмодули Γ-модуля $C(A)$ характеризуются тем, что фактормодули по ним имеют инъективные оболочки, разлагающиеся в прямую сумму модулей, изоморфных каким-либо из Q_i. К рассматриваемому кругу вопросов относится и результат Ренольта [203], показавшего, что сердцевина любого ненулевого модуля над C-кольцом отлична от нуля. Под C-кольцом понимается такое кольцо Λ, что отличен от нуля цоколь всякого ненулевого фактормодуля любого Λ-модуля A по плотному в нем подмодулю. Ренольт же [200] опубликовал статью, посвященную изотипическим модулям. В его работе, а также в статье Феллера [91] получен ряд результатов об указанном выше разложении инъективной оболочки в прямую сумму.

2. Проективность, инъективность и т. п. Начнем этот пункт с рассмотрения результатов Исикавы [124]. Функтор T категории Λ-модулей в себя называется вполне точным, если последовательности $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ и $T(A) \xrightarrow{T(\alpha)} T(B) \xrightarrow{T(\beta)} T[C]$ точны одновременно. Модуль A называется вполне проективным, вполне плоским или вполне инъективным, если, соответственно, вполне точны функторы $T(X) = \text{Hom}(A, X)$, $U(X) = X \otimes A$ или $V(X) = \text{Hom}(X, A)$. Само кольцо Λ является вполне проективным модулем. Всякий вполне проективный модуль оказывается вполне плоским. Вполне инъективным модулем является инъективная оболочка E прямой суммы $\dot{\sum\limits_\alpha} \Lambda/\mathfrak{M}_\alpha$, где $\mathfrak{M}_\alpha$ пробегает все максимальные левые идеалы кольца I. Всякий проективный вполне плоский модуль над коммутативным кольцом вполне проективен. Доказана равносильность следующих свойств проективного Λ-модуля P: 1) P — вполне проективен; 2) Существует такое натуральное n, что $\underbrace{P+\ldots+P}_{n}$ содержит прямое слагаемое, изоморфное Λ; 3) Прямая сумма некоторого бесконечного набора модулей P является свободным Λ-модулем. Для инъективного Λ-модуля Q оказываются равносильными следующие свойства: (1) Q — вполне инъективен; (2) Q содержит изоморфный образ всякого простого Λ-модуля; (3) Q имеет прямое слагаемое, изоморфное E. В случае коммутативности кольца к этому списку можно присоединить: (4) $\mathrm{Ann}_\Lambda \mathrm{Ann}_Q I = I$ для всякого идеала I из Λ; (5) $\mathrm{Ann}_\Lambda \mathrm{Ann}_Q \mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ для всякого максимального идеала $\mathfrak{M}$ из Λ. Если все ненулевые инъективные модули над коммутативным кольцом Λ вполне инъективны, то Λ вполне примарно. Если Λ — нётерово, то справедливо и обратное. Если Λ — коммутативное кольцо и Q — вполне инъективный Λ — модуль, то модуль A является (вполне) плоским тогда и только тогда, когда модуль $\mathrm{Hom}_\Lambda (A, Q)$ (вполне) инъективен. Далее отметим несколько общих результатов об инъективных и проективных модулях, полученных Банашевским [38]: 1) Если A и B — проективные Λ-модули, I — левый идеал кольца Λ, $I^m A = I^m B = 0$ для некоторого m и $A/IA \cong B/IB$, то $A \cong B$; 2) Если Λ — нётерово слева, то проективность/(инъективность) Λ-модуля в категории Λ-модулей конечного происхождения равносильна его проективности (инъективности) в категории всех Λ-модулей; 3) Если модуль удовлетворяет условию минимальности для подмодулей, то его инъективная оболочка удовлетворяет условию минимальности для всех инъективных подмодулей; 4) Если кольцо Λ удовлетворяет условию минимальности для левых идеалов, то всякий инъективный Λ-модуль разлагается в прямую сумму неразложимых модулей (см. также п. 1). Заметим, что конечной целью этих исследований является новое доказательство теоремы Нагао и Накаямы [181] о строении инъективного модуля над конечномерной алгеброй. Хинохара [118, 120] доказал, что над коммутативным слабо нётеровым кольцом (т. е. кольцом, в котором пространство максимальных идеалов удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подмножеств) всякий проективный модуль разлагается в прямую сумму конечнопорожденных модулей. Феллер [91] установил, что (нётеров) инъективный модуль над нётеровым слева кольцом разлагается в прямую сумму (конечного числа) модулей, в которых плотен каждый ненулевой подмодуль. Интересный критерий проективности модуля над коммутативным кольцом предложили М. Ауслендер и Буксбаум [34], а также Микали [168]

Рейнауд [198] исследовал проективные модули P над коммутативным кольцом Λ, удовлетворяющие соотношению $P+\Lambda^q = \Lambda^n$ для всех $q \leqslant n$*). Отметим еще две работы Суона, относящиеся по существу к гомологической алгебре. В одной из них [220] устанавливается эквивалентность категории конечно-порожденных проективных модулей над кольцом непрерывных функций, отображающих бикомпактное хаусдорфово пространство $\mathfrak{X}$ в тело K (K — действительные числа, комплексные числа или кватернионы) с категорией так называемых K-векторных расслоений над $\mathfrak{X}$. Из результатов, полученных во второй [222], отметим отрицательное решение проблемы: будут ли конечно-порожденные проективные модули A и B над целочисленным групповым кольцом Λ конечной группы изоморфны, если $A+\Lambda \cong B+\Lambda$. Однако в случае дедекиндовых колец такое «сокращение» возможно даже, если вместо Λ стоит любой конечно-порожденный модуль [123]. Сюда же примыкают и некоторые результаты Чейса [64]. Накаяма [185] доказал, что группа Гротендика конечно-порожденных модулей над нётеровым слева кольцом, имеющих конечную проективную размерность, совпадает с группой Гротендика конечно-порожденных проективных модулей. Отсюда выводится, что группа классов (т. е. факторгруппа группы Гротендика по подгруппе, порожденной свободными модулями) проективных модулей над конечной группой совпадает с группой классов конечно-порожденных когомологически тривиальных модулей. Показывается, что последняя группа порождается когомологически тривиальными модулями конечного порядка. Группа классов проективных модулей над целочисленным групповым кольцом абелевой группы порядка pq исследовалась в диссертации Розена [213]. Суон [222] изучал кольцо Гротендика конечной группы над коммутативным кольцом. Обзорную статью о конечно-порожденных проективных модулях над коммутативным кольцом опубликовали Карденас и Васкес [59].

Пейнадо [194] предложил прямое доказательство равномощности всех баз свободного модуля с бесконечной системой образующих (см. также [130]). Для конечно-порожденных модулей это не всегда верно. Классификация колец, основанная на этом свойстве, была предложена Левиттом ([148]; [21], стр. 82). Исследование этого вопроса продолжается в работах Пейнадо [193] и Левитта [150]. У Вулфсона [233] и Чейса [65] по разным поводам появились локально свободные модули. Первый называет Λ-модуль A локально свободным, если всякое его конечное подмножество содержится в свободном прямом слагаемом.

*) Здесь $\Lambda^m = \Lambda + \ldots + \Lambda$ как Λ-модуль

Если Λ-область главных левых идеалов, то всякий локально свободный Λ-модуль счетного ранга оказывается свободным [102]. Чейс, рассматривавший модули над коммутативным кольцом главных идеалов, назвал модуль локально свободным, если всякий его чистый подмодуль конечного ранга является свободным прямым слагаемым. Локально свободные абелевы группы возникают при решении проблемы Уайтхеда, состоящей в описании всех абелевых групп A, для которых $\mathrm{Ext}^1(A,Z)=0$, где Z — кольцо целых чисел. С проблемой Уайтхеда связаны работы Вильена [228] и Чейса [62]. Последний рассматривал модули над коммутативной областью главных идеалов. Ряд свойств модулей, локально свободных в смысле Чейса, рассмотрен в п. 4.

Хорошо известно понятие инъективной оболочки модуля (см., в частности, [199]). Фейт и Уцуми [89] доказали ее существование, не предполагая, что модули унитарны. Для этого же общего случая доказано, что инъективность модуля A равносильна как расщепляемости всякой точной последовательности $0 \to A \to B \to C \to 0$, так и отсутствию у A истинных существенных расширений (т. е. $A \subseteq B$, где A плотно в B, влечет $A=B$). Установлено также, что инъективность относительно вложений левых идеалов в кольцо (см. п. 1), в отличие от унитарного случая, не влечет инъективности модуля.

Басс [42] ввел понятие, двойственное инъективной оболочке. Он назвал подмодуль A модуля C тонким, если $A+B=C$ возможно лишь при $B=C$. Проективный модуль P называется проективным покрытием модуля A, если $A = P/K$, где K—тонкий подмодуль в P. Проективное покрытие существует не всегда. Для того чтобы оно существовало для всех Λ-модулей, необходимо и достаточно, чтобы кольцо Λ удовлетворяло условию минимальности для главных правых идеалов (см. [21], стр. 81). Модуль, имеющий проективное покрытие, называется совершенным. Шукла [218] доказал, что совершенными являются все модули категории $\mathfrak{C}$, обладающие следующими свойствами: 1) Если A, $B \in \mathfrak{C}$ и $f: A \to B$, то $f \in \mathfrak{C}$; 2) Если $B \in \mathfrak{C}$ и $A \subseteq B$, то $A \in \mathfrak{C}$; 3) Если $A \in \mathfrak{C}$, то существуют проективный модуль $P \in \mathfrak{C}$ и эпиморфизм $h: P \to A$ (ввиду 1), $h \in \mathfrak{C}$; 4) Если g—эндоморфизм модуля B, не являющийся автоморфизмом, $\mathrm{Im}\, g = B$ и $g \in \mathfrak{C}$, то существует собственный подмодуль A модуля B такой, что $A + g^{-1}(A) = B$; 5) Если $f: A \to B$ — эпиморфизм из $\mathfrak{C}$, то A обладает подмодулем S, минимальным относительно свойства $f(S)=B$. Для конечно-порожденного модуля A над нётеровым слева кольцом свойство 5) равносильно совершенности. И. И. Сахаев [17] показал, что плоский совершенный модуль проективен. Проективный модуль называется полусовершенным, если все его фактормодули совершенны. Ряд результатов о полусовершенных модулях получила Марес [163]. В частности, она доказала, что каждый проективный модуль над кольцом с условием минимальности полусовершенен. Модуль A полусовершенен тогда и только тогда, когда пересечение $J(A)$ всех максимальных подмодулей модуля A тонко в A, $J(A/J(A))=0$ и всякая ортогональная система идемпотентов кольца $\mathrm{Hom}_\Lambda(A/J(A), A/J(A))$ индуцируется ортогональной системой идемпотентов кольца $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, A)$. Енохс [86], рассматривавший модули над коммутативной областью целостности Λ, назвал свободным от кручения покрытием Λ-модуля A такую пару (T, χ), где T—Λ-модуль без кручения, а χ—гомоморфизм T в A, что $\ker\chi$ не содержит нетривиальных чистых подмодулей модуля T и $\varphi=\psi\chi$ для всякого $\varphi: U\to A$, где U—Λ-модуль без кручения. Доказана единственность свободного от кручения покрытия. Свободным от кручения покрытием циклической группы порядка p оказывается группа целых p-адических чисел.

Уже в обзоре [21] упоминалось понятие квазиинъективности. Довольно специальный класс квазиинъективных модулей исследовал Уонг [234]. Фейт и Уцуми [89, 90] установили, что любой подмодуль квазиинъективного модуля обладает в нем максимальным квазиинъективным расширением, а подмодуль квазиинъективного модуля, не допускающий квазиинъективных расширений, квазиинъективен и выделяется прямым слагаемым. Прямая сумма квазиинъективных модулей не всегда квазиинъективна. Однако квазиинъективность прямой суммы влечет квазиинъективность слагаемых. Конечно-мерный ([21], стр. 86) квазиинъективный модуль разлагается в прямую сумму конечного числа квазиинъективных модулей, в которых плотен каждый ненулевой подмодуль [170]. То же самое справедливо для всякого квазиинъективного модуля над нётеровым слева кольцом. Всякий мономорфизм конечномерного подмодуля квазиинъективного модуля A в A может быть продолжен до автоморфизма модуля A [170]. Дополнительный подмодуль (см. п. 6) квазиинъективного модуля всегда выделяется прямым слагаемым [170]. Мияшита [170] и Феллер [91] получили ряд результатов о кольце эндоморфизмов квазиинъективного модуля (см. п. 5).

Естественное обобщение квазиинъективности предложил В. Е. Говоров [5]: модуль A называется малоинъективным, если произвольный эндоморфизм любого его подмодуля индуцируется эндоморфизмом модуля A. Малопроективность модуля определяется двойственным образом. Заметим, что еще раньше А. П. Мишина [13] доказала, чтовб елева группа малоинъективна тогда и только тогда, когда она или полна, или является периодической группой, каждая неполная примарная компонента которой есть прямая сумма циклических групп одного и того же порядка, или разлагается в прямую сумму полной периодической группы (возможно, нулевой) и группы без кручения ранга 1. В. Е. Говоров установил, в частности, что все подмодули малоинъективного малопроективного модуля малопроективны тогда и только тогда, когда все его фактормодули малоинъективны. Из других его результатов отметим: 1) Кольцо Λ без делителей нуля малоинъективно как Λ-модуль в том и только в том случае, когда оно обладает кольцом двусторонних частных Q и целозамкнуто в Q слева (т. е. если $u \in Q$, $0 \neq \neq \lambda \in \Lambda$ и $\lambda u^n \in \Lambda$ для $n=1, 2, \ldots,$ то $u \in \Lambda$); 2) Полная прямая сумма $\Lambda = \Sigma^* \Lambda_\alpha$ колец Λ_α является малоинъективным Λ-модулем тогда и только тогда, когда все Λ_α—малоинъективные Λ_α-модули. Упомянем, наконец, серию работ [134, 183, 190], относящихся к гомологической алгебре, в которых важную роль играют понятия слабой инъективности и слабой проективности.

Наряду с инъективностью естественно рассматривать делимость (как известно, в случае абелевых групп эти понятия совпадают). В обзоре [21] по этому поводу уже упоминалась работа Хаттори [114]. Позже Леви [157] предложил назвать Λ-модуль A делимым, если $\lambda A = A$ для всякого λ из Λ, не являющегося ни правым, ни левым делителем нуля. Инъективный модуль всегда делим. Ответ на вопрос об обратном соотношении Леви дал для случая, когда кольцо Λ обладает левым кольцом частных Q. Он показал, что для инъективности каждого делимого Λ-модуля необходимы и достаточны классическая полупростота кольца Q и левая наследственность кольца Λ. Кольцо Λ при этих условиях оказывается нётеровым слева. Классическая полупростота Q равносильна инъективности всякого делимого Λ-модуля, не содержащего ненулевых элементов, периодических в смысле Леви (см. п. 1) В. А. Андрунакиевич и Ю. М. Рябухин [1] назвали Λ-модуль A делимым, если $\lambda A = A$ для всякого λ из Λ, для которого $\lambda A \neq 0$. Заметим, что они не предполагали, что рассматриваемое кольцо имеет единицу. Пусть Λ—такое кольцо без делителей нуля, p—его характеристика, C_p—поле частных кольца вычетов по модулю p (p или 0, или простое число), A—Λ-модуль без делителей нуля (т. е. $\lambda a = 0$ и $a \neq 0$ влечет $\lambda A = 0$) и $\Lambda A \neq 0$. В. А. Андрунакиевич и Ю. М. Рябухин доказали, что такой модуль A можно вложить в некоторый первичный ([20], стр. 69) делимый точный Λ-модуль, являющийся, кроме того, делимым точным C_p-модулем. Разумеется, всякий инъективный модуль делим в смысле В. А. Андрунакиевича и Ю. М. Рябухина. Еще одно определение делимости принадлежит Банашевскому [39]. Он рассматривал модули над коммутативным кольцом. Если A— такой Λ-модуль, то положим $S(A)=\{\alpha|\alpha\in\Lambda, (\alpha a=0 \& a\in A)\Rightarrow \Rightarrow a=0)\}$. Модуль A называется относительно делимым, если $\lambda A=A$ для всякого λ из $S(A)$. Используя это определение, Банашевский доказывает, что для всякого Λ-модуля A существует такое минимальное относительно делимое расширение B, что $S(A)=S(B)$. Это расширение определяется однозначно с точностью до изоморфизма и называется дробно-полным расширением модуля A.

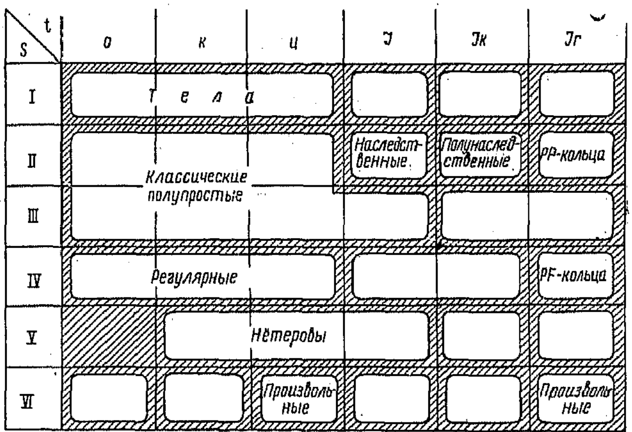
Коснемся теперь работ, посвященных плоским модулям. Лазар [147] доказал, что для того, чтобы модуль A был плоским, необходимо и достаточно, чтобы для всякого конечно-порожденного модуля B и гомоморфизма $\varphi: B\to A$ существовали конечно-порожденный свободный модуль F и гомоморфизмы $\psi: B\to F$ и $\chi: F\to A$ такие, что $\varphi=\psi\chi$. Для того чтобы модуль был плоским, необходимо и достаточно также, чтобы он являлся индуктивным пределом фильтрованного множества некоторой индуктивной системы конечно-порожденных свободных модулей (ср. [4, 6, 17]). Заметим, что В. Е. Говоров [6] дал пример, показывающий, что модуль, имеющий слабую гомологическую размерность $k>0$, не обязан быть пределом модулей проективной размерности k. Из приведенных Лазаром следствий отметим следующие: 1) Конечно-порожденный плоский модуль проективен (ср. [61, 84]); 2) Всякий функтор категории модулей в себя, переводящий конечно-порожденные свободные модули в плоские и перестановочный с индуктивным пределом, переводит плоские модули в плоские.

Обобщение проективности и инъективности в категориях, полезное и для модулей, предложили Батлер и Хоррокс [58]. Они рассмотрели функтор θ от двух переменных, значениями которого являются подгруппы групп расширений. Модуль A называется θ-инъективным [θ-проективным], если $\theta(X, A)=0$ ($\theta(A, X)=0$) для всякого модуля X. Эти рассмотрения обобщают, в частности, относительную гомологическую алгебру Хохшилда [121]. Несколько иное направление обобщения проективности и инъективности имеется в работах Маранды [162] (см. п. 1) и Эйленберга [83]. Здесь же уместно упомянуть заметку Сато [216].

Переходя к рассмотрению результатов, касающихся нормологической размерности, укажем на работы Дика [76] и И. И. Сахаева [16], предложивших новые доказательства некоторых известных результатов о резольвентах. Серию колец четной проективной размерности построил Райнхарт [208]. Мохицуки [171, 172] указал несколько условий, обеспечивающих конечность некоторых гомологических размерностей полупримарного кольца. Капланский [132] предложил способ определения проективной размерности некоторых циклических модулей над коммутативным кольцом. Макрай [160] доказал, что проективная размерность идеала коммутативной области целостности, порожденного двумя элементами, или бесконечна, или $\leqslant 1$. Многочисленные соотношения между размерностями модулей установлены в работах Накаямы и Цудзуку [186, 187], посвященных фробениусовым расширениям. Пусть, далее, Λ—групповое кольцо абелевой группы $\mathfrak{G}$ над кольцом K. Дуглас [78] установил, что $\mathrm{w.\,gl.\,dim}\,\Lambda < \infty$ в том и только в том случае, когда выполняются следующие три условия: а) если в $\mathfrak{G}$ имеется элемент порядка n, то $nK=K$; б) $\mathrm{w.\,gl.\,dim.}\,K<\infty$; в) ранг $\mathfrak{G}<\infty$. Более того, при выполнении этих условий $\mathrm{w.\,gl.\,dim.}\,\Lambda = \mathrm{w.\,gl.\,dim}\,K+$ (ранг $\mathfrak{G}$). Бальцежик [37] доказал: 1) Если K—кольцо целых чисел, а $\mathfrak{G}$ не порождается конечным подмножеством, то $\mathrm{gl.\,dim}\,K = \dim_\Lambda \mathfrak{G}=$(ранг $\mathfrak{G}$)$+2$, где C—произвольная нетривиальная конечная циклическая группа, на которой $\mathfrak{G}$ действует тривиально. 2) Если $\mathfrak{G}$—конечно-порожденная и не имеет кручения, $\mathrm{l.\,dim}_K A = \mathrm{l.\,gl.\,dim}\,K$ и $\mathfrak{G}$ действует на A тривиально,то $\mathrm{l.\,gl.\,dim.}\,\Lambda = \mathrm{l.\,dim}_\Lambda A=$ ранг $\mathfrak{G}$ $+\mathrm{l.\,gl.\,dim.}\,K$. Ряд результатов об абелевых группах, рассматриваемых как модуль над своим кольцом эндоморфизмов, получили Ричман и Уокер [205] и Дуглас и Фарат [79].

3. Гомологическая классификация колец. Как и в предыдущем обзоре [21] (стр. 80—81), начнем этот пункт с рассмотрения вопроса о свободе проективных модулей. Басс [43, 44], Басс и Шамуэль [45], В. Е. Говоров [5], Хинохара [117, 119], Хоррокс [122] и Эндо [85] указали новые классы колец, над которыми те или иные проективные модули свободны. Сюда же примыкает результат Муртхи [180], показавшего, что при некоторых условиях конечно-порожденный проективный Λ-модуль разлагается в прямую сумму свободного модуля и идеала кольца Λ. Самюэль [217] установил некоторую связь между свободой конечно-порожденных проективных модулей над коммутативным нетеровым кольцом с однозначным разложением на множители и сохранением последнего свойства для кольца многочленов над Λ

Остановимся теперь на классификации колец, предложенной Л. А. Скорняковым [22]. В этой классификации используются следующие классы модулей: I. Свободные. II. Проективные. III. Инъективные. IV. Плоские. V. Конечносвязные [21] (стр. 81). VI. Полусвободные, т. е. разлагающиеся в прямую сумму циклических. При этом рассматриваются такие семейства модулей над данным кольцом Λ: о—все Λ-модули; к—Λ-модули конечного происхождения; ц—циклические Λ-модули; I—левые идеалы кольца Λ; $I_к$—левые идеалы кольца Λ, имеющие конечное происхождение: $I_г$—главные идеалы кольца Λ. Будем говорить, что кольцо Λ относится к классу St (S=I, II, III, IV, V, VI; t=с, к, ц, I, $I_к$, $I_г$), если все Λ-модули семейства t принадлежат классу S. Так возникают 36 логически мыслимых классов колец. Заметим, однако, что класс Vс пуст, а классы IVц и VIг содержат все кольца. Некоторые из полученных классов совпадают между собой, некоторые—с уже рассматривающимися классами колец. Учитывая и более поздние работы [19, 192], эти связи можно выразить следующей таблицей:



Отрицание некоторых связей между классами установил В. И. Геминтерн [2]. Он же и показал, что класс VI$I_к$ замкнут относительно перехода к кольцам матриц, а классы VIг, IIIг и IVIг этими свойствами не обладают. Далее оказалось, что полупростыми в классическом смысле являются даже кольца, над которыми все модули конечного происхождения малоинъективны (малопроективны) [5]. Л. А. Скорняков [23] построил пример кольца с делителями нуля, принадлежащего классу II. Более того, в построенном кольце всякий левый идеал конечного происхождения изоморфен самому кольцу как левый модуль. В той же работе установлена эквивалентность следующих свойств кольца Λ, принадлежащего классу $I\Gamma$: 1) Λ не содержит делителей нуля; 2) Всякий правый (левый) делитель нуля в кольце Λ является левым (правым) делителем нуля; 3) Если λ, $\mu \in \Lambda$ и $\lambda\mu=1$, то $\mu\lambda=1$; 4) Λ не содержит идемпотентов, отличных от 0 и 1. Отсюда вытекает, что кольцо из класса $I\Gamma$, над которым все конечно порожденные свободные модули измеримы [21] (стр. 82), не имеет делителей нуля. К этому следствию тесно примыкает работа Гуаццоне [105], установившего эквивалентность следующих свойств кольца Λ: 1) Λ—кольцо главных левых идеалов без делителей нуля; 2) Все левые идеалы кольца Λ главные и свободны как Λ-модули; 3) Существует такой свободный Λ-модуль конечного ранга n, что все его подмодули свободны и имеют ранг $\leqslant n$; 4) Каковы бы ни были свободный левый Λ-модуль F и его подмодуль A, модуль A свободен и его ранг не превосходит ранга модуля F. Кольца из классов I и Iк, над которым измеримы все конечно-порожденные свободные модули, исследовал Кон [68] (см. также [23]).

В исследовании наследственных колец основное внимание было сосредоточено на исследовании наследственных порядков [55—57, 108—112, 178, 229, 230]. Кроме того, Норткотт [189] доказал, что центр наследственного слева локального кольца является либо полем, либо одномерным регулярным локальным кольцом. Басс [44] доказал, что проективный правый модуль над полунаследственным слева кольцом является прямой суммой конечно-порожденных модулей, каждый из которых изоморфен модулю, двойственному конечно-порожденному идеалу кольца.

Вопрос об описании колец класса VIo был поставлен Кёте еще в 1935 г. В 1951 г. Коэн и Капланский [67] установили, что в классе коммутативных колец такие кольца совпадают с классом артиновых колец главных идеалов. А. И. Узков [26] показал, что коммутативные нётеровы кольца из класса VIк являются кольцами главных идеалов. Попутно он установил, что коммутативная область целостности, все собственные факторкольца которой являются кольцами главных идеалов,— дедекиндова. Результат Коэна и Капланского не может быть распространен на некоммутативные кольца [182]. Тем не менее, Чейс [61] доказал, что если каждый Λ-модуль разлагается в прямую сумму конечно-порожденных модулей, то Λ — артиново слева, а каждый неразложимый инъективный Λ-модуль имеет конечный композиционный ряд. Таким образом, решение проблемы Кёте следует искать в классе артиновых колец. С другой стороны, ясно, что каждый неразложимый модуль над кольцом из класса VIo цикличен. Именно такие артиновы кольца исследовал Кавада [135—139]. Некоторые результаты, связанные с проблемой Кёте, содержит серия работ Марасэ [175—177]. Капланский [131] доказал, что любой модуль без кручения ранга 2 над коммутативной нётеровой областью целостности Λ разложим в прямую сумму модулей ранга 1 тогда и только тогда, когда Λ локальна, полна и ее размерность в смысле Круля $\leqslant 1$.

К кольцам, входящим в рассматриваемую классификацию, тесно примыкают и самоинъективные слева кольца. Феллер [91] доказал, что нётерово слева и самоинъективное слева кольцо Λ разлагается в прямую сумму $\Lambda = I_1 \dotplus \ldots \dotplus I_n$ своих однородных левых идеалов (т. е., если $0 \neq I \subseteq I_l$, где I — левый идеал, то I плотен в I_l). Разумеется, $I_l = \Lambda\varepsilon_l$, где $\varepsilon_l^2 = \varepsilon_l$. Оказалось, что $\varepsilon_l \Lambda \varepsilon_l$ — локальное кольцо, максимальный идеал которого является нильидеалом, а нильпотентные элементы кольца I_l образуют идеал, факторкольцо кольца I_l по которому — тело. Ко [143] показал, что самоинъективное слева первичное кольцо, удовлетворяющее условию максимальности, для аннуляторных левых идеалов, является простым артиновым кольцом. Чейс и Фейт [66] доказали, что кольцо Λ изоморфно полной прямой сумме полных колец линейных преобразований правых векторных пространств над телами тогда и только тогда, когда оно самоинъективно слева, не содержит нильпотентных идеалов и каждый его ненулевой левый идеал содержит минимальный левый идеал. Т. С. Тольская [25] установила, что кольцами, над которыми всякий инъективный модуль свободен, являются локальные квазифробениусовы кольца и только они. В этой же работе охарактеризованы кольца, над которыми всякий свободный модуль инъективен. Однако вопрос о существовании в последнем классе не квазифробениусовых колец остается открытым. Конечномерные алгебры, над которыми классы конечно-порожденных проективных и инъективных модулей совпадают, рассматривались Хеллером [116]. Коннелл [69] доказал, что самоинъективность группового кольца группы $\mathfrak{G}$ над кольцом Λ влечет периодичность группы $\mathfrak{G}$ и самоинъективность кольца Λ. Если же кольцо Λ — самоинъективно, а группа $\mathfrak{G}$ — конечна, то соответственно групповое кольцо — самоинъективно. Один из способов построения самоинъективных алгебр можно извлечь из результатов Гаррисона [113]. Фейт и Уцуми [90] рассматривали кольца, не обязательно обладающие единицей. Оказалось, что в этом случае квазиинъективное слева кольцо с правой единицей не обязано быть самоинъективным слева. Однако для алгебр с правой единицей над полем характеристики 0 эти понятия совпадают. Установлено, что кольцо с правой единицей ε самоинъективно слева тогда и только тогда, когда оно квазиинъективно слева и ε является двусторонней единицей. Построен пример самоинъективного слева кольца, содержащего правую, но не двустороннюю единицу. В ряде работ исследовалась инъективная оболочка $\hat{\Lambda}$ кольца Λ. Озофская [191] построила пример такого кольца Λ, что инъективная оболочка $\hat{\Lambda}$ не может быть превращена в кольцо так, что $\lambda \cdot x = \lambda x$, где $\lambda \in \Lambda$, $x \in \hat{\Lambda}$ и $\cdot$ — умножение в кольце $\hat{\Lambda}$. Если же такое превращение возможно, то кольцо $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(\hat{\Lambda}, \hat{\Lambda})$ оказывается инъективным Λ-модулем. Последний результат имеется и в работе Ламбека [144]. Для того чтобы указанное превращение модуля $\hat{\Lambda}$ в кольцо было возможно, достаточно обращения в нуль сингулярного идеала $Z(\Lambda) = \{\lambda / \lambda \in \Lambda,\ l(\lambda)$ плотен в $\Lambda\}$ [100] (ср. п. 1). Возникающее при этом кольцо оказывается регулярным (см. также [20], стр. 66). Если Λ — нётерово слева, то $\hat{\Lambda}$ — полупросто в классическом смысле (см. также [71]). Если Λ — без делителей нуля, то $\hat{\Lambda}$ является телом тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ann}_{\Lambda} x = 0$ для всех $x \in \hat{\Lambda}$. Для того чтобы левое тело частных кольца Λ совпадало с $\hat{\Lambda}$, необходимо и достаточно, чтобы Λ-модуль $\hat{\Lambda}$ был плоским. Если Λ — полунаследственное слева кольцо без делителей нуля, то $\hat{\Lambda}$ — плоский правый Λ-модуль. Если кольцо Λ полунаследственно слева, то $A \otimes \hat{\Lambda}$ оказывается инъективной оболочкой правого Λ-модуля A. Некоторые теоремы о разложении модуля $\hat{\Lambda}$ в прямые и подпрямые суммы имеются в работе Леви [156].

Несколько работ примыкают к начатым Бассом [21] (стр. 81) исследованиям совершенных слева колец (т. е. колец, над которыми всякий левый плоский молудль проективен). Во-первых, назовем две работы Васкоса [226, 227]. Он говорит, что правый Λ-модуль A является пределом правого спектра (определение правого спектра дословно повторяет определение обратного спектра с той лишь разницей, что множество индексов не предполагается направленным), если существует такой набор гомоморфизмов $p_i: A \to A_i$, что $\pi_{ij} p_i = p_j$ при $i \leqslant j$ и для всякого правого Λ-модуля B и любого набора гомоморфизмов $q_i: B \to A_i$, удовлетворяющих условиям $\pi_{ij} q_i = q_j$, существует единственный гомоморфизм $g: B \to A$, для которого имеет место $p_i g = q_i$ для всех i. Установлена эквивалентность следующих свойств кольца Λ:

1) Λ связано слева (т. е. принадлежит классу VIк) и правая w. gl. $\dim \lambda \leqslant 2$; 2) Предел правого предела плоских правых Λ-модулей — плоский правый Λ-модуль; 3) Λ связано слева и пересечение двух (любого семейства) плоских подмодулей плоского правого Λ-модуля является плоским модулем. Оказываются эквивалентными и следующие свойства кольца Λ: 1) Λ — совершенно, связано слева и правая w. gl. $\dim \Lambda \leqslant 2$; 2) Предел правого спектра проективных правых Λ-модулей — проективен; 3) Предел правого спектра любого множества экземпляров кольца Λ является проективным правым Λ-модулем; 4) Λ — совершенно и пересечение любого множества проективных подмодулей проективного правого Λ-модуля проективно; 5) Λ — совершенно, связано слева и пересечение двух проективных подмодулей проективного правого Λ-модуля проективно. Если в перечисленных свойствах слова «Λ — совершенно» и «проективный» заменить на «всякий правый плоский Λ-модуль свободен» и «свободный» соответственно, то полученные свойства также эквивалентны между собой. Далее остановимся на результатах И. И. Сахаева [16]. Он назвал кольцо Λ левополусовершенным, если всякая возрастающая цепочка $\Lambda\lambda_1 \subseteq \Lambda\lambda_2 \subseteq \ldots$ главных левых идеалов, где $\lambda_i = \lambda_i \lambda_{i+1}$ обрывается. Оказалось, что левополусовершенные кольца характеризуются тем, что всякий циклический плоский модуль над ними проективен. Для проективности всякого конечно-порожденного плоского модуля необходимо и достаточно, чтобы левополусовершенными были все матричные кольца над Λ. Аналогичную задачу для модулей над коммутативным кольцом решает Эндо [84]. Он установил, что всякий конечно-порожденный плоский модуль над таким кольцом проективен, если кольцо частных Λ_S кольца Λ, по некоторой мультипликативно замкнутой системе, не содержащей делителей нуля, полулокально. Упомянем, наконец, работу Марес [163], рассмотренную в п. 2.

Серия работ Дютхейла [80—82] посвящена ∇-кольцам, т. е. коммутативным кольцам, в которых каждый проективный идеал выделяется прямым слагаемым. Каждое коммутативное артиново кольцо — ∇-кольцо. Коммутативное нётерово кольцо является ∇-кольцом тогда и только тогда, когда в нем обратимы все неделители нуля. Изучение ∇-колец позволяет установить эквивалентность следующих утверждений о коммутативном нётеровом кольце Λ: 1) каждый идеал из Λ имеет проективную размерность 0 или ∞; 2) каждый Λ-модуль имеет проективную размерность 0 или ∞; 3) Λ-модуль проективен тогда и только тогда, когда проективен двойственный ему модуль. Кертис и Джонс [73] доказали, что если алгебра Λ над алгебраически замкнутым полем такова, что цоколь каждого неразложимого Λ-модуля есть прямая сумма попарно неизоморфных простых подмодулей, то существует лишь конечное число неизоморфных неразложимых Λ-модулей.

Накаяма [184] предложил классифицировать конечномерные алгебры Λ с единицей по длине точной последовательности — Λ — Λ — гомоморфизмов $0 \to A \to P_1 \to P_2 \to \ldots \to P_n$, где P_i — Λ — Λ-проективные модули. Татикава [223] доказал, что наличие такой последовательности с $n = 1$ равносильно тому, что Λ является QF — 3 алгеброй, т. е. алгеброй с единственным минимальным точным представлением.

4. Двойственность. Пусть A — Λ-модуль. Полагаем $A^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \Lambda)$, рассматривая эту группу как правый модуль. Естественным назовем такой гомоморфизм $i_A: A \to A^{**}$, что $(xi_A)\varphi = x\varphi$, где $x \in A$, $\varphi \in A^*$. Если i_A —изоморфизм (мономорфизм), то модуль A назовем рефлексивным (модулем без кручения). Модулем без кручения оказывается всякий модуль, локально свободный в смысле Чейса [62] (см. п. 2). Обратное неверно. Для того чтобы модуль A над коммутативной областью главных идеалов был локально свободным, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{Im}\, i_A$ являлся чистым подмодулем в A^{**}. Для каждого Λ-модуля A строится локально свободный Λ-модуль $A^{\#}$ и гомоморфизм $j_A \cdot A \to A^{\#}$, причем модуль A локально свободен тогда и только тогда, когда j_A — изоморфизм. Всякий локально свободный модуль инъективен относительно j_A. Енохс [87] показал, что все свободные Λ-модули счетного происхождения рефлексивны, если Λ — коммутативная область целостности с простым идеалом Π и кольцо дискретного нормирования Λ_Π не полно. Если Λ—нетерово наследственное кольцо, то рефлексивность Λ-модуля равносильна его полноте в топологии, фундаментальная система окрестностей нуля которой состоит из конечных пересечений ядер линейных форм. Если эти линейные формы выбираются из некоторого фиксированного подмодуля B модуля A^*, то возникающая топология называется B-топологией. Свойства этой топологии для случая модулей над кольцом главных идеалов исследовал Чейс [65]. Он показал, в частности, что каждый подмодуль модуля A^*, замкнутый в $i_A(A)$-топологии, изоморфен модулю C^* для некоторого C. Сравнительно легко устанавливается [146], что модуль A является плоским тогда и только тогда, когда правый модуль A^*-инъективен.

Пусть теперь Λ нётерово слева и справа кольцо и рассматриваются только конечно-порожденные модули. Джанс

[125, 127] доказал, что для всякого Λ-модуля A без кручения найдется такой правый Λ-модуль B, что последовательности

$$0 \to A \to A^{**} \to \operatorname{Ext}^1_\Lambda (B, \Lambda) \to 0$$

и

$$0 \to B \to B^{**} \to \operatorname{Ext}^1_\Lambda (A, \Lambda) \to 0$$

точны. В качестве B можно взять, например, модуль F^*/A^*, где F — свободный модуль, допускающий эпиморфизм на A. Отсюда вытекает, что всякий Λ-модуль A без кручения является рефлексивным тогда и только тогда, когда правая инъективная размерность кольца Λ не превосходит 1. Кроме того, если A — Λ-модуль без кручения, то $A^{***} \cong A^* \dotplus [\operatorname{Ext}^1_\Lambda (B, \Lambda)]^*$. Отсюда выводится, что A^* рефлексивен для всякого Λ-модуля A тогда и только тогда, когда $[\operatorname{Ext}^2_\Lambda (C, \Lambda)]^* = 0$ для всякого правого Λ-модуля C. Если $A^* = 0$, то $A \cong \operatorname{Ext}^1_\Lambda (D, \Lambda)$ для некоторого Λ-модуля D. Мономорфизм Λ-модуля X называется двойным дуальным вложением (д. д. в.), если он дуален эпиморфизму $P \to X^*$, где P—правый проективный Λ-модуль. Пусть $\mathfrak{A} = \{A \mid \operatorname{Ext}^1_\Lambda(A, \Lambda) = 0\}$. Оказывается, что фактормодули без кручения из $\mathfrak{A}$ и только они являются коядрами д. д. в. Далее обозначается через $\mathfrak{A}_n$ класс модулей T_n, для которых существует комплекс

$$0 = P_0 \to P_1 \to P_2 \to \ldots \to P_{n-1} \to T_n \to 0,$$

где все P_i—проективные модули, а отображения $P_i \to P_{i+1}$ являются композициями $P_i \to T_{i+1} \to T^{**}_{i+1} \to P_{i+1}$ (здесь среднее отображение—естественное вложение, последнее—д. д. в., а последовательность $0 \to T^{**}_i \to P_i \to T_{i+1}$ точная). Охарактеризованы также модули, дуальные к модулям из класса $\mathfrak{A}_n$. Даны достаточные условия на кольцо Λ, при которых $\operatorname{Ext}^1_\Lambda (T, \Lambda) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, для любого левого модуля $T \in \mathfrak{A}_n$. Изучаются зависимости между различными размерностями кольца Λ и свойствами классов $\mathfrak{A}_n$ его модулей. Например, показано: 1) $\operatorname{gl.dim} \Lambda \leqslant n+1$ тогда и только тогда, когда модули, дуальные модулям из $\mathfrak{A}_n$, являются проективными; 2) Верхняя грань проективных размерностей конечно-порожденных Λ-модулей конечной проективной размерности не превосходит n тогда и только тогда, когда все модули T_n из $\mathfrak{A}_n$, для которых правый Λ-модуль T^*_n проективен, сами являются проективными; 3) Правая инъективная размерность кольца Λ не превосходит n тогда и только тогда, когда каждый левый модуль из $\mathfrak{A}_n$—рефлексивный. М. Аусландер [33] доказал, что рефлексивный модуль A над регулярным локальным кольцом является свободным, если $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(A, A)$ не разлагается в прямую сумму модулей, изоморфных A. Рефлексивные модули для случая, когда Λ—целозамкнутая нётерова область, исследовала Б. Р. Л. Ауслендер [32]. Одно достаточное условие рефлексивности модуля над регулярной областью получается из результатов Муртхи [179]. Ферранд [93] изучал такие модули A, что модуль A^* рефлексивен. А. В. Ройтер [14] рассматривал двойственность, являющуюся, по-видимому, частным случаем двойственности Мориты [173, 21, стр. 84], и использовал ее для представления колец.

5. Кольцо эндоморфизмов. Кольцо эндоморфизмов Λ-модуля A будем обозначать через $\mathfrak{E}_{\Lambda}(A)$. Пусть A_1 и A_2— два модуля над кольцами Λ_1 и Λ_2, соответственно. Естественно спросить, всегда ли изоморфизм колец $\mathfrak{E}_{\Lambda_1}(A_1)$ и $\mathfrak{E}_{\Lambda_2}(A_2)$ индуцируется некоторым полулинейным отображением модуля A_1 на модуль A_2, т. е. $\alpha(\sigma)=\tau^{-1}\sigma\tau$, где α—изоморфизм $\mathfrak{E}_{\Lambda_1}(A_1)$ на $\mathfrak{E}_{\Lambda_2}(A_2)$, $\sigma \in \mathfrak{E}_{\Lambda_1}(A_1)$ и τ—полулинейное отображение A_1 на A_2. Положительный ответ для линейных пространств дается в известной книге Бэра*). Однако для всякого кардинального числа $\mathfrak{c}$ существуют неизоморфные вполне разложимые абелевы группы ранга $\mathfrak{c}$, обладающие изоморфными кольцами эндоморфизмов. Такими будут, например, свободная группа ранга $\mathfrak{c}$ и прямое произведение $\mathfrak{c}$ экземпляров аддитивной группы рациональных чисел со свободными от квадратов знаменателями [233]. Серия работ Вулфсона [231 — 233] посвященна исследованию этого вопроса. Он дает положительный ответ для следующих случаев: 1) Λ_i — полные кольца дискретных нормирований, A_i — модули без кручения; 2) Λ_i — области главных левых идеалов, A_i — локально свободны, т. е. всякое конечное подмножество из A_i содержится в свободном прямом слагаемом. Попутно установлено, что для свободного модуля A над областью главных левых идеалов всякий автоморфизм кольца $\mathfrak{E}(A)$, тождественный на подкольце всех эндоморфизмов конечного ранга, является тождественным, а также, что полулинейные отображения σ и τ модуля A_1 на A_2, где A_i — модули без кручения над областью главных левых идеалов, обладающие циклическими прямыми слагаемыми, и ранг $A_i \geqslant 2$, индуцируют один и тот же изоморфизм кольца $\mathfrak{E}(A_1)$ на $\mathfrak{E}(A_2)$ тогда и только тогда, когда их образы отличаются постоянным обратимым множителем (т. е. $\sigma(x) = \lambda\tau(x)$ для всех $x \in A_1$, где λ — обратимый элемент из λ_2). Если в условиях случая

* Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия. М., ИЛ, 1955.

1) хотя бы один из модулей делим, то таков же и другой, оба они являются линейными пространствами над полем частных колец Λ_i и вышеуказанное полулинейное отображение является полулинейным отображением этих пространств. Эти исследования были продолжены Гевиртцманом [102, 103]. Предполагая, что Λ_i — области главных левых идеалов, а A_i — свободны и A_1 имеет конечный ранг, он показал, что всякое антиполулинейное отображение правого Λ_1-модуля $A_1^* = \mathrm{Hom}_{\Lambda_1}(A_1 \Lambda_1)$ на A_2 индуцирует однозначно определенный антиизоморфизм кольца $\mathfrak{E}_{\Lambda_1}(A_1)$ на $\mathfrak{E}_{\Lambda_2}(A_2)$. Наоборот, из существования такого антиизоморфизма α выводится конечность ранга модулей A_1 и A_2, а также существование антиполулинейного отображения, индуцирующего α. Эти результаты сохраняют свою силу и в случае, когда один из модулей свободен, а другой — локально свободен. Конечно, последний модуль автоматически оказывается свободным. Результаты, сходные с перечисленными, получают и в случае, когда A_i — модули без кручения над полными кольцами дискретных нормирований.

Ряд работ посвящен исследованию свойств кольца $\mathfrak{E}(A)$. Так, Фейт и Уцуми [89] показали, что радикал Джекобсона кольца $\mathfrak{E}(A)$, где A — квазиинъективный модуль, совпадает с множеством эндоморфизмов, ядро которых плотно в A. При этом факторкольцо $\mathfrak{E}(A)/J$ оказывается регулярным в смысле Неймана. Если $J = 0$, то $\mathfrak{E}(A)$ — самоинъективно слева. Если каждое прямое слагаемое инъективного Λ-модуля Q содержит неразложимое прямое слагаемое, и кольцо $(\mathfrak{E}_\Lambda)\,Q$ — регулярно, то $\mathfrak{E}_\Lambda(Q) \cong \Sigma^* \mathfrak{E} K_\alpha(L_\alpha)$, где L_α — правое векторное пространство над телом K_α, а Σ^* — символ полной прямой суммы колец. Если $\mathfrak{E}_\Lambda(A) \cong \Sigma^* \mathfrak{E} K_\alpha(L_\alpha)$, то каждое прямое слагаемое Λ-модуля A содержит неразложимое прямое слагаемое. Последние два результата принадлежат Чейсу и Фейту [66]. Они же показали, что кольцо $\mathfrak{E}_\Lambda(\hat{A})$, где $\hat{A}$ — инъективная оболочка Λ-модуля A, регулярно, если $Z(A) = 0$ (см. п. 1). Феллер [91] доказал, что квазиинъективность модуля A равносильна изоморфизму $\mathfrak{E}_\Lambda(A) \cong \mathfrak{E}_\Lambda(\hat{A})/H$, где $H = \{\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{E}_\Lambda(\hat{A}), \sigma(A) = 0\}$, а однородность модуля A (т. е. плотность в нем всех ненулевых подмодулей) — локальности кольца $\mathfrak{E}_\Lambda(\hat{A})$. Мияшита [170] рассматривал квазиинъективный модуль A, в котором для каждого подмодуля B дополнение дополнения модуля B (см. п. 6), содержащее B, определяется однозначно. Оказалось, что в этом случае кольцо $\mathfrak{E}(A)$ разлагается в прямую сумму $\mathfrak{E}(A) = K_1 + K_2 + K_3$, где K_1 — прямая сумма полных колец линейных преобразований линейных пространств над телами, K_2 — прямая сумма первичных колец без однородных левых идеалов, K_3 не содержит ни левых, ни двусторонних однородных идеалов. Ламбек [144] рассматривал рационально полный Λ-модуль A (модуль A называется рационально полным, если он не допускает такого истинного расширения C, что всякий гомоморфизм A в C может быть продолжен до частичного гомоморфизма C в C, не допускающего расширения своей области определения), структура $\mathfrak{L}$ подмодулей которого обладает дополнениями. Оказалось, что в этом случае кольцо $\mathfrak{E}_\Lambda(A)$ — регулярно в смысле Неймана и самоинъективно слева, а структура $\mathfrak{L}$ изоморфна структуре главных левых идеалов кольца $\mathfrak{E}_\Lambda(A)$. Фейт [88] установил, что простое кольцо с единицей изоморфно кольцу $\mathfrak{E}(A)$, если оно нётерово справа или содержит минимальный однородный правый идеал (см. п. 2). В обоих случаях A — модуль без кручения над коммутативной областью целостности, но в первом случае — конечно-порожденный. Феллер и Своковский [92], допустив, что A — конечно-порожденный модуль без кручения над областью целостности Λ, являющейся как правым, так и левым кольцом Оре, доказали, что $\mathfrak{E}_Q(Q \otimes A)$, где Q — кольцо частных кольца Λ, является кольцом частных кольца $\mathfrak{E}_\Lambda(A)$. При этом кольцо $\mathfrak{E}_\Lambda(A)$ оказывается простым кольцом с условием максимальности для правых и левых аннуляторов и для прямых сумм. Отметим еще работы Коуртера [70], изучавшего максимальные коммутативные подалгебры алгебры линейных преобразований, и Маурера [167], занимавшегося топологизацией кольца $\mathfrak{E}(A)$, где A — абелева группа. Йозефиак [129] дал обобщение теоремы о когомологической размерности алгебры матриц над коммутативным кольцом Λ на алгебру эндоморфизмов конечно-порожденного проективного Λ-модуля. Герстен [101] рассматривал свободный Λ-модуль F ранга n, где Λ — свободная ассоциативная алгебра над коммутативной областью главных идеалов Φ. Он доказал, что для всякой нильпотентной подалгебры N Φ-алгебры $\mathfrak{E}_\Lambda(F)$ можно так выбрать базу в F, что каждому элементу из N будет соответствовать верхняя треугольная матрица. Г. М. Цукерман [27] обобщила «треугольную теорию Галуа для линейных пространств над телами (см. книгу Бэра*) на случай свободного модуля над произвольным кольцом. Некоторые результаты о свойствах отдельных эндоморфизмов из $\mathfrak{E}(A)$ получили Гальперин [107] и Рибенбойм [204]. Упомянем, наконец, работы Клингенберга

* Примечание на стр. 200.

[142] и Рима [206], посвященные симплектическим линейным группам свободных модулей над локальными кольцами. Линейную группу свободного модуля над коммутативным кольцом рассматривали Басс и Шануель [45], а также Герстен [101].

6. Другие вопросы. Во-первых, отметим работы Фукса [98] и Кертеса [141], исследовавших модули ранга 1 в смысле, аналогичном соответствующему понятию теории абелевых групп. Примыкающие сюда результаты имеются и в статье Голди [104]. С весьма широких позиций понятие зависимости в модулях рассмотрел Длаб [77]. К понятию ранга модуля тесно примыкает также понятие ширины, рассмотренное Брамре [54]. Хед [115], рассматривавший модули над кольцом дискретных нормирований, назвал подмодуль B модуля A плотным, если фактор-модуль A/B делим. Он указал условия, при которых всякий плотный подмодуль данного модуля содержит его базисный подмодуль. Бессерре [47] показала, что для идеала I коммутативного кольца Λ, Λ-модуля B и его подмодуля A соотношение $IB\cap A=IA$ вытекает из справедливости соотношения $I_mB_m\cap A_m=I_mA_m$ для всех максимальных идеалов m кольца Λ. Если Λ-модули A и B проективны, то отсюда выводится, что множество простых идеалов $\mathfrak{p}$ кольца Λ, удовлетворяющих условию $\mathfrak{p}B\cap A=\mathfrak{p}A$, открыто в топологии Зарисского. В работе Бессерре и Микали [48] показано, что функторы, сопоставляющие каждому Λ-модулю тензорную, симметрическую или внешнюю алгебру, сохраняют соотношение $IB\cap A=IA$, если A и B—конечно-порожденные проективные Λ-модули. Пусть, далее, имеется точная последовательность $0\to K\to F\to A\to 0$, где F—конечно-порожденный свободный модуль с базой $c_1, \ldots, c_n$ над коммутативным кольцом Λ. Если $\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_{ik}e_k,\ i\in I\right\}$ — система образующих подмодуля K, то обозначим через $F(A)$ идеал кольца Λ, порожденный минорами порядка n бесконечно-строчной матрицы (λ_{ik}). Этот идеал не зависит от выбора модуля F и системы образующих в соответствующем ядре K. Он исследуется Моуитом [174] и Макраем [161]. Среди полученных результатов отметим теорему: модули A и $F(A)$ являются плоскими (проективными) одновременно. Идеал $F(A)$ использует также Бергер [46], исследовавший модули дифференциалов одномерных локальных колец. Джунс [126], рассматривавший модули над кольцами, артиновыми справа и слева, назвал класс модулей классом конечного типа, если для всякого натурального n в этом классе существует лишь конечное число модулей с композиционным рядом длины n или меньше. Он показал, что некоторые, вообще говоря, различные классы модулей оказываются классами конечного типа для одних и тех же колец.

Пусть теперь $\mathfrak{L}(A)$ означает структуру подмодулей модуля A. Подмодуль B модуля A назовем дополнительным к подмодулю C, если $B \cap C = 0$ и B является максимальным среди подмодулей с таким свойством. Ренольт [201] установил эквивалентность следующих свойств Λ-модуля A: а) Пересечение любых двух дополнительных подмодулей из $\mathfrak{L}(A)$ является дополнительным подмодулем; б) Подмодуль X из $\mathfrak{L}(A)$ является дополнительным тогда и только тогда, когда для всякого $y \notin X$ найдется такой элемент $\lambda \in \Lambda$, что $\lambda y \neq 0$ и $\Lambda \lambda y \cap X = 0$; в) Пересечение любого множества дополнительных подмодулей из $\mathfrak{L}(A)$ является дополнительным подмодулем; г) Для всякого подмодуля X из $\mathfrak{L}(A)$ существует наименьший дополнительный подмодуль $\overline{X}$, содержащий X, причем операция $X \to \overline{X}$ является операцией замыкания; д) В модуле A невозможно найти такую пару ненулевых элементов x и y, что $\Lambda x \cap \Lambda y = 0$ и $\Lambda / \mathrm{Ann}_\Lambda (x+y)$ являются существенным расширением модуля $\mathrm{Ann}_\Lambda x / \mathrm{Ann}_\Lambda (x+y)$. В той же работе дано условие, эквивалентное тому, что пересечение двух инъективных подмодулей инъективного модуля инъективно. Для того чтобы подмодуль X из $\mathfrak{L}(A)$ был минимальным среди дополнительных, необходимо и достаточно, чтобы 0 был $\cap$-неприводим в X. Последний результат, а также и некоторые другие имеются и в работе Круазо [71]. Мияшита [170] установил, что условия минимальности и максимальности для дополнительных подмодулей модуля A равносильны. Более того, каждое из них эквивалентно конечномерности модуля A [21] (стр. 86). Там же показано, что для кольца Λ с относительно атомной структурой левых идеалов подмодуль A Λ-модуля B является дополнительным тогда и только тогда, когда $mB \cap A = mA$ для всякого максимального левого идеала m кольца Λ. Ламбек [144] указал условия, необходимые и достаточные для того, чтобы структура $\mathfrak{L}(A)$ являлась структурой с дополнениями. Ренольт [202] изучал модули, в которых пересечение любых двух дополнительных подмодулей является дополнительным подмодулем. Чейс и Фейт [66] исследовали частично упорядоченное множество $\mathfrak{B}(A)$, состоящее из таких подмодулей X модуля A, что, если $\lambda a \in X$ возможно лишь при $\lambda = 0$, то $a \in X$. Структуру подмодулей бимодуля строк над простым кольцом рассматривала З. С. Липкина [11] (см. также [24]).

Пусть, далее, $\mathfrak{Q}=\{\Lambda_i\}$ — семейство колец. Кертес [140] назвал абелеву группу A правым $\mathfrak{Q}$-мультимодулем, если A является правым Λ_i-модулем для каждого i и $(a\alpha)\beta = (a\beta)\alpha$ для любых $a \in A$, $\alpha \in \Lambda_i$, $\beta \in \Lambda_j$ при $i \neq j$. Кольцо K назовем расширением семейства $\mathfrak{Q}$, если K содержит подкольца, изоморфные каждому из колец Λ_i. Скажем, что расширение K обладает свойством Ф, если: а) K содержит единицу; б) всякий правый $\mathfrak{Q}$-мультимодуль можно рассматривать как унитарный правый K-модуль; в) всякий унитарный правый K-модуль можно рассматривать как правый $\mathfrak{Q}$-мультимодуль, г) как в б), так и в в) элементы каждого из колец Λ_i действуют в обоих случаях одинаково. Доказывается, что для любого семейства колец существует единственное (с точностью до изоморфизма над Λ_i) максимальное расширение, обладающее свойством Ф. Описывается построение этого максимального расширения. Родеха [212] доказал, что образ бииинейного отображения пары модулей над коммутативным кольцом является идеалом. Полулинейные формы изучал Бкуш [49, 50]. Некоторое обобщение тензорного произведения модулей рассматривал Бандлер [40]. Обзорные статьи, посвященные тензорному произведению модулей, принадлежат Байену [35] и Бремеру [53]. Роби [209—211] применил к исследованию модулей над коммутативным кольцом так называемые формальные и полиномиальные законы. В работах Баника и Попеску [41], Попеску [95, 196], Удреску [225], Раду и Стэнэшила [197] изучаются последовательные обобщения понятия дифференциала в модуле. Нёбелинг [188] рассматривал прямые и обратные пределы спектра модулей, а также производные функторы от этих пределов.

Остановимся теперь на работах, посвященных топологическим и упорядоченным модулям. Маскар [164—166] перенес некоторые понятия теории топологических векторных пространств на топологические модули. Кроме того, он описал один из способов топологизации множества непрерывных линейных отображений одного топологического модуля в другой и указал условия, при которых такое отображение оказывается открытым. Аналогичная конструкция для случая топологических линейных пространств над телом имеется и в работе А. В. Михалева [12]. Танака [224] доказал, что редуцированный модуль без кручения над кольцом целых p-адических чисел полон в p-адической топологии тогда и только тогда, когда он изоморфен p-адическому пополнению любого из своих базисных подмодулей. Бейкер [36] получила некоторые результаты о системах линейных уравнений над топологическими модулями. У [235] использовал топологические модули для получения топологического обобщения квазифробениусовых колец. Топологические методы для изучения дискретных модулей использовали Чейс [63, 65] и Судзуки [219]. Герендон [106] изучал топологию, базой окрестностей нуля которой служат все такие подмодули, что фактор модули по ним артиновы. Упорядоченным модулям посвящена работа Блейхера и Шнейдера [51].

Из теоретико-категорных работ назовем большую статью Габриэля [99], содержащую целую главу, посвященную приложению полученных результатов к теории модулей. Далее отметим работу Ру [215], показавшего, что абелева категория с точными пределами и образующим U изоморфна некоторой полной подкатегории всех Hom (U,U)-модулей. Тот же результат получил Митчелл [169], предполагая, что категория имеет проективный образующий U. Отсюда выведена эквивалентность категорий Λ- и Λ_n-модулей. Отмечено, что соответствующий функтор не обязан сохранять свободу модулей. В заключение упомянем работы Б. Чакäня [28—30] и Ф. Гечега [3], в которых описываются универсальные алгебры, в некотором смысле совпадающие с алгеброй модулей над теми или иными кольцами.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Андрунакиевич В. А.**, Рябухин Ю. М., О вложении модулей. Докл. АН СССР, 1963, 153, № 3, 507—509 (РЖМат, 1964, 4А246)
2. **Геминтерн В. И.**, О некоторых типах матричных колец. Сибирск. матем. ж., 1964, 5, № 2, 310—318 (РЖМат, 1964, 9А233)
3. **Гечег Ф.**, О некоторых классах полумодулей и модулей. Acta scient. math., 1963, 24, № 1—2, 165—172 (РЖМат, 1964, 7А308)
4. **Говоров В. Е.**, Кольца, над которыми плоские модули являются свободными. Докл. АН СССР, 1962, 144, № 5, 265—267 (РЖМат, 1962, 11А212)
5. —, Малоинъективные модули. Алгебра и логика. Семинар, 1963, 2, № 6, 21—50 (РЖМат, 1965, 4А227)
6. —, О плоских модулях. Сибирск. матем. ж., 1965, 6, № 2, 300—304 (РЖМат, 1965, 8А238)
7. **Иоффе Л. Ш.**, Радикал модуля. Сибирск. матем. ж., 1964, 5, № 4, 820—826 (РЖМат, 1965, 5А226)
8. **Курош А. Г.**, Радикалы колец и алгебр. Матем. сб. 1953, 33 (75), № 1, 13—26 (РЖМат, 1955, 1680)
9. —, Радикалы в теории групп. Докл. АН СССР, 1961, 141, № 4, 789—791 (РЖМат, 1962, 7А164)
10. —, Радикалы в теории групп. Сибирск. матем. ж., 1962, 3, № 6, 912—931. Поправка: Сибирск. матем. ж., 1965, 6, № 3, 715 (РЖМат, 1964, 6А173; 1965, 11А194)
11. **Липкина З. С.**, О свободных бимодулях над бирегулярным кольцом. Успехи матем. наук, 1963, 18, № 4, 155—159 (РЖМат, 1964, 2А354)
12. **Михалев А. В.** Об изоморфизме колец непрерывных эндоморфизмов. Сибирск. матем. ж., 1963, 4, № 1, 177—186 (РЖМат, 1965, 3А154)
13. **Мишина А. П.** Об автоморфизмах и эндоморфизмах абелевых групп. Вестн. Моск. унта. Матем., механ., 1962, № 4, 39—43 (РЖМат, 1963, 2А183)

14. **Ройтер А. В.**, О категории представлений. Укр. матем. ж., 1963, 15, № 4, 448—452 (РЖМат, 1964, 10А216)
15. **Рябухин Ю. М.**, Радикалы в категориях. Бул. Акад. Штиинце РССМолд., Изв. АН Молд. ССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, 1964, № 6, 58—74 (РЖМат, 1965, 10А285)
16. **Сахаев И. И.**, О слабой размерности модулей, колец и алгебр. Плоские резольвенты и их приложения. Сб. аспирантск. работ. Казанск. ун-т. Матем., механ., физ. Казань, 1964, 70—76 (РЖМат, 1964, 11А221)
17. —, О слабой размерности модулей колец, алгебр. Проективность плоских модулей. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1965, № 2, 152—157 (РЖМат, 1965, 9А276)
18. —, О проективности конечно-порожденных плоских модулей. Сибирск. матем. ж., 1965, 6, № 3, 564—573 (РЖМат, 1965, 11А269)
19. **Скорняков Л. А.**, О кольцах с инъективными циклическими модулями. Докл. АН СССР, 1963, **148**, № 1, 40—43 (РЖМат, 1963, 9А218)
20. —, Кольца. В сб. Алгебра. Топология. 1962. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР). М., 1963, 59—79 (РЖМат, 1964, 11А217)
21. —, Модули. В сб. Алгебра. Топология. 1962. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР). М., 1963, 80—89 (РЖМат, 1964, 11А220)
22. —, Гомологическая классификация колец. Тр. 4-го Всес. матем. съезда, 1961, т. 2, Л., «Наука», 1964, 22—32 (РЖМат, 1964, 9А232)
23. —, О коновских кольцах. Алгебра и логика. Семинар, 1965, 4, № 3, 5—30 (РЖМат, 1966, 10А221)
24. —, Структуры. В сб. Алгебра. 1964 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР). М., 1966, 237—274
25. **Тольская Т. С.**, Инъективность и свобода. Сибирск. матем. ж., 1965, **6**, № 5, 1202—1207 (РЖМат, 1966, 3А240)
26. **Узков А. И.**, О разложимости модулей над коммутативным кольцом в прямые суммы циклических подмодулей. Матем. сб., 1963, **62**, № 4, 469—475 (РЖМат, 1964, 4А244)
27. **Цукерман Г. М.**, О треугольной теории Галуа. Сибирск. матем. ж., 1963, 4, № 5, 1194—1197 (РЖМат, 1965, 3А322)
28. **Чакань Б.**, Об эквивалентности некоторых классов алгебраических систем. Acta scient. math., 1962, **23**, № 1—2, 46—57 (РЖМат, 1963, 4А225)
29. —, Примитивные классы алгебр, эквивалентные классам полумодулей и модулей. Acta scient. math., 1963, **24**, № 1—2, 157—164 (РЖМат, 1964, 7А307)
30. —, Об абелевых свойствах примитивных классов универсальных алгебр. Acta scient. math., 1964, **25**, № 3—4, 202—208 (РЖМат, 1966, 3А264)
31. **Abrahamson B.**, The invariant factor algorithm. Amer. Math. Monthly, 1961, 68, № 7, 616—626 (РЖМат, 1963, 6А242)
32. **Auslander B. R. L.**, Finitely generated reflexive modules over integrally closed Noetherian domains. Doct. diss. Univ. Michigan, 1963, 106 pp. Dissert. Abstrs., 1964, **24**, № 12, Part 1, 5424 (РЖМат, 1965, 8А233D)
33. **Auslander M.**, On the purity of the branch locus. Amer. J. Math., 1962, **84**, № 1, 116—125 (РЖМат, 1963, 2А235)
34. —, Buchsbaum D. A., Invariant factors and two criteria for projectivity of modules. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, **104**, № 3, 516—522 (РЖМат, 1963, 4А193)
35. **Baayen P. C.**, Het tensorprodukt. Euclides (Nederl.), 1962, 38, № 1, 9—19 (РЖМат, 1963, 5А301)
36. **Baker A. C.**, Systems of linear equations over a topological module. Quart. J. Math., 1964, **15**, № 60, 327—336
37. **Balcerzik S.**, The global dimension of the group rings of abelian groups. Fundam Math., 1964, **55**, № 3, 293—301 (РЖМат, 1966, 11А215)

38. **Banaschewski B.**, On projective and injective modules. Arch. math., 1964, **15**, № 4-5, 271—275 (РЖМат, 1965, 3A319)
39. —, Quotient extensions of modules. Math. Nachr., 1965, **28**, № 3—4, 245—255 (РЖМат, 1965, 9A277)
40. **Bandler W.**, Bilinearity and multilinearity over arbitrary rings with units. Math. Ann., 1963, **150**, № 2, 188—202 (РЖМат, 1964, 2A336)
41. **Bănică C.**, Popescu N., Diferenţiale generalizate. Comun. Acad. RPR, 1963, **13**, № 6, 523—528 (РЖМат, 1964, 4A247)
42. **Bass H.**, Finitistic dimension and a homological generalization of semi — primary rings. Trans. Amer., Math. Soc., 1960, **95**, № 3, 466—488 (РЖМат, 1962, 1A273)
43. —, Big projective modules are free. Illinois J. Math., 1963, **7**, № 1, 24—31 (РЖМат, 1963, 10A227)
44. —, Projective modules over free groups are free. J. Algebra, 1964, **1**, № 4, 367—373 (РЖМат, 1965, 8A232)
45. —, Schanuel S., The homotopy theory of projective modules. Bull. Amer. Math. Soc., 1962, **68**, № 4, 425—428 (РЖМат, 1964, 10A223)
46. **Berger R.**, Differentialmoduln eindimensionaler localer Rings. Math. Z., 1963, **81**, № 4, 326—354 (РЖМат, 1965, 11A250)
47. **Besserre A.**, Quelques propriétés d'un couple de modules. C. r. Acad. sci., 1964, **259**, № 1, 22—23 (РЖМат, 1965, 12A316)
48. —, Micali A., Quelques résultats sur les algèbres universelles. C. r. Acad. sci., 1965, **260**, № 10, 2658—2659 (РЖМат, 1965, 12A317)
49. **Bkouche R.**, Sur les formes sesquilinéaires, C. r. Acad. sci., 1963, **257**, № 1, 27—30 (РЖМат, 1965, 3A323)
50 —, Décomposition des formes sesquilinéaires. C. r. Acad. sci, 1963, **257**, № 2, 342—344 (РЖМат, 1965, 3A324)
51. **Bleicher M. N.**, Schneider H., The decomposition of cones in modules over ordered rings. J. Algebra, 1964, **1**, № 3, 233—258 (РЖМат, 1965, 10A262)
52. **Bostock F. A.**, Patterson E. M., A generalisation of Divinsky's radical. Proc. Glasgow Math. Assoc., 1963, **6**, № 2, 75—87 (РЖМат, 1965, 4A223)
53. **Braemer J. M.**, Produits tensoriels de modules Cahiers rhodaniens 1962, № 11, 5/1—5/8 (РЖМат, 1964, 2A340)
54. **Brameret M.—P.**, Anneeaux et modules de largeur finie. C. r. Acad. sci., 1964, **258**, № 14, 3605—3608 (РЖМат, 1965, 2A360)
55. **Brumer A.**, Structure of hereditary orders. Bull. Amer. Math. Soc., 1963, **69**, № 5, 721—724 (РЖМат, 1965, 1A267)
56. —, The structure of hereditary orders. Doct. diss. Princeton Univ., 1963, 72 pp. Dissert. Abstrs., 1964, **25**, № 1, 491 (РЖМат, 1965, 7A233D)
57. —, Addendum to «Structure of hereditary orders». Bull. Amer. Math. Soc., 1964, **70**, № 1, 185 (РЖМат, 1965, 7A231)
58. **Butler M. C. R.**, Horrocks G., Classes of extensions and resolutions. Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1961, **A254**, № 1039, 155—222 (РЖМат, 1963, 12A277)
59. **Cardenas H.**, Vazquez R., Modulos proyectivos de tipo finito sobre anillos commutativos. An. Inst. mat. Univ. nac. autónoma México, 1962, **2**, 65—82 (РЖМат, 1964, 8A253)
60. **Castillon J.-B.**, Remarque sur des théorèmes de changement d'anneaux. C. r. Acad. sci., 1965, **260**, № 15, 4131—4133 (РЖМат, 1965, 11A259)
61. **Chase S. U.**, Direct products of modules. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, **97**, № 3, 457—473 (РЖМат, 1961, 9A303)
62. —, Locally free modules and a problem of Whitehead. Illinois J. Math., 1962, **6**, № 4, 682—699 (РЖМат, 1963, 12A275)
63. —, On direct sums and products of modules. Pacif. J. Math., 1962, **12**, № 3, 847—854 (РЖМат, 1964, 1A298)

64. —, Torsion-free modules over $K[x, y]$. Pacif. J. Math., 1962, **12**, № 2, 437—447 (РЖМат, 1965, 7А241)
65. —, Function topologies on abelian groups. Illinois J. Math., 1963, **7**, № 4, 593—608 (РЖМат, 1965, 6А155)
66. —, F a i t h C., Quotient rings and direct products of full linear rings. Math. Z., 1965, **88**, № 3, 250—264 (РЖМат, 1966, 1А364)
67. **Cohen I.**, K a p l a n s k y I., Rings for which every module is direct sum of cyclic modules. Math. Z., 1951, № 2, 97—101
68. **Cohn P. M.**, Free ideal rings. J. Algebra, 1964, **1**, № 1, 47—69 (РЖМат, 1965, 4А226)
69. **Connell I. G.**, On the group ring. Canad. J. Math., 1963, **15**, № 4, 650—685 (РЖМат, 1964,7А278)
70. **Courter R. C.**, Maximal commutative algebras of linear transformation. Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **101**, № 2, 177—199 (РЖМат, 1963, 1А263)
71. **Croisot R.**, Coeur d'un module, II. Sémin. P. Dubreil, M.—L. Dubreil — Jacotin et C. Pisot; Fac. Sci. Paris, 1960—1961, 14 année, fasc. 2. Paris, 1963, 17/01—17/13 (РЖМат, 1964, 7А282)
72. —, Contribution a l'étude des modules sur un anneau non commutatif. Atti 2 Riunione «Groupem. math. express. latine». Firenze—Bologna, 1961. Roma, 1963, 59—63 (РЖМат, 1966, 2А318)
73. **Curtis C. W.**, J a n s J. P., On algebras with a finite number of indecomposable modules. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **114**, № 1, 122—132 (РЖМат, 1965, 10А259)
74. **Dickson S. E.**, On torsion classes of Abelian groups. J. math. Soc. Japan, 1965, **17**, № 1, 30—35 (РЖМат, 1966, 1А209)
75. —, Decomposition of modules. I. Classical rings. Math. Z., 1965, **90**, № 1, 9—13 (РЖМат, 1966, 1А373)
76. **Dieck T.**, Ein Beweis für die Äquivalenz zweier Definitionen der Extensionprodukte. Arch. Math., 1963, **14**, № 1, 11—12 (РЖМат, 1963, 9А221)
77. **Dlab V.**, On the dependence relation over modules (Prelim. commun.). Comment. math. Univ. Carolinae, 1965, **6**, № 1, 115—117 (РЖМат, 1966, 1А406)
78. **Douglas A. J.**, The weak global dimension of the group—rings of Abelian groups. J. London Math. Soc., 1961, **36**, № 3, 371—381 (РЖМат, 1962, 2А283)
79. —, F a r a h a t H., The homological dimension of an Abelian group as a module over its ring of endomorphisms. Monatsh. Math., 1965, **69**, № 4, 294—305 (РЖМат, 1966, 8А282)
80. **Dutheil L.**, Sur une classe d'anneaux commutatifs. C. r. Acad. sci., 1962, **255**, № 23, 3098—3100 (РЖМат, 1963, 8А204)
81. —, Sur une classe d'anneaux commutatifs. C. r. Acad. sci., 1963, **256**, № 22, 4570—4573 (РЖМат, 1965, 7А219)
82. —, Propriétés homologiques de certains anneaux et modules. C. r. Acad. sci., 1963, **257**, № 15, 2056 (РЖМат, 1965, 9А259)
83. **Eilonberg S.**, Algebra homológica. Ann. Inst. mat. Univ. nac. autónoma México, 1961, **1**, 117—145 (РЖМат, 1964, 10А224)
84. **Endo Sh.**, On flat modules over commutative rings. J. Math. Soc. Japan, 1962, **14**, № 3, 284—291 (РЖМат, 1964, 2А334)
85. —, Projective modules over polynomial rings. J. Math. Soc. Japan, 1963, **15**, № 3, 339—352 (РЖМат, 1966, 3А219)
86. **Enochs E. E.**, Torsion free covering modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, **14**, № 6, 884—889 (РЖМат, 1965, 12А319)
87. —, A note on reflexive modules. Pacif. J. Math., 1964, **14**, № 3, 879—881 (РЖМат, 1965, 10А260)

88. **Faith C.**, Noetherian simple rings. Bull. Amer. Math. Soc., 1964, **70**, № 5, 730—731 (РЖМат, 1965, 6А223)
89. —, Utumi Y., Quasi-injective modules and their endomorphism rings. Arch. Math., 1964, **15**, № 3, 166—174 (РЖМат, 1965, 4А228)
90 —, —, Baer modules. Arch. Math., 1964, **15**, № 4-5, 266—270 (РЖМат, 1965, 5А227)
91. **Feller E. H.**, Noetherian modules and Noetherian injective rings. Tohoku Math. J., 1965, **17**, № 2, 130—138 (РЖМат, 1966, 3А239)
92. —, Swokowski E. W., The ring of endomorphisms of a torsionfree module. J. London Math., Soc., 1964, **39**, № 1, 41—42 (РЖМат, 1965, 3А325)
93. **Ferrand D.**, Annulateur et dual d'un module sur un anneau non intègre. C. r. Acad. sci., 1965, **260**, № 16, 4295—4298 (РЖМат, 1965, 11А272)
94. **Flanders H.**, Sattelites of half exact functors, a correction. Proc. Amer. Math. Soc., 1964, **15**, № 5, 834—837 (РЖМат, 1965, 5А230)
95. **Fort J.**, Quelques propriétés des sous-modules tertiaires d'un module sur un anneau non nécessairement commutatif. C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 12, 1748—1750 (РЖМат, 1961, 2А145)
96. —, Radical tertiaire d'un sous-module et sous-modules tertiaires, dans un module sur un anneau non nécessairement commutatif. C. r. Acad. sci., 1962, **254**, № 11, 1900—1902 (РЖМат, 1964, 2А337)
97. —, Radical tertiaire d'un sous-module et sous-modules tertiaires, dans un module sur un anneau non nécessairement commutatif. Sémin. P. Dubreil, M.—L. Dubreil — Jacotin et C. Pisot; Fac. sci. Paris, 1961—1962. 15 année, fasc. I. Paris, 1963, 4/01—4/16 (РЖМат, 1965, 3А320)
98. **Fuchs L.**, Ranks of modules. Ann. Univ. scient. budapest. Sec. math., 1963, **6**, 71—78 (РЖМат, 1964, 11А222)
99. **Gabriel P.**, Des catégories abéliennes. Bull. Soc. math. France, 1962, **90**, № 3, 323—448 (РЖМат, 1964, 7А294)
100. **Gentile E. R.**, Singular submodule and injective hull. Proc. Koninkl. Nederl. Acad. wet., 1962, **A65**, № 4, 426—433. Indagationes math., 1962, **24**, № 4, 426—433 (РЖМат, 1963, 6А244)
101. **Gersten S.**, Whitehead groups of free associative algebras. Bull. Amer. Math. Soc., 1965, **71**, № 1, 157—159 (РЖМат, 1965, 9А266)
102. **Gewirtzman L.**, Anti-isomorphisms of the endomorphism rings of classes of torsion-free modules. Doct. diss. Rutgers State Univ., 1962, 54 pp. Dissert. Abstrs, 1963, **29**, № 11, 4369—4370 (РЖМат, 1966, 1А379Д)
103. —, Anti-isomorphisms of the endomorphism rings of a class of torsion-free modules. Math. Ann., 1965, **159**, № 4, 278—284
104. **Goldie A. W.**, Torsion-free modules and rings. J. Algebra, 1964, **1**, № 3, 268—287 (РЖМат, 1965, 5А216)
105. **Guazzone S.**, Sui Λ-moduli liberi e elcuni teoremi di J. C. Everett. Rent. Seminar mat. Univ. Padova, 1962, **32**, 304—312 (РЖМат, 1963, 6А243)
106. **Guérindon J.**, Une classe d'homomorphismes naturels. C. r. Acad. sci., 1965, **260**, № 2, 383—386 (РЖМат, 1965, 12А283)
107. **Halperin I.**, The structure of a linear transformation. Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1962, **A65**, № 5, 499—507. Indagationes math., 1962, **24**, № 5, 499—507 (РЖМат, 1963, 10А142)
108. **Harada M.**, Structure of hereditary orders over local rings. J. Math. Osaka City Univ., 1963, **14**, № 1, 1—22 (РЖМат, 1965, 12А292)
109. —, Hereditary orders in generalized quaternions D_τ. J. Math. Osaka City Univ., 1963, 14, № 2, 71—81 (РЖМат, 1965, 12А294)
110. —, Hereditary orders. Trans. Amer. Math. Soc., 1963, **107**, № 2, 273—290 (РЖМат, 1965, 8А215)

111. —, On generalization of Asano's maximal orders in a ring. Osaka J. Math., 1964, **1**, № 1, 61—68 (РЖМат, 1965, 12А290)
112. —, Some criteria for hereditary of crossed products. Osaka J. Math., 1964, **1**, № 1, 69—80 (РЖМат, 1965, 12А295)
113. **Harrison D. K.**, Commutative algebras and cohomology. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, **104**, № 2, 191—204 (РЖМат, 1964, 12А241)
114. **Hattori A.**, A foundation of torsion theory for modules over general rings. Nagoya Math. J., 1960, **17**, Aug., 147—158 (РЖМат, 1961, 6А297)
115. **Head T. J.**, Dense submodules. Proc. Amer. Math. Soc., 1962, **13**, № 2, 197—199 (РЖМат, 1963, 7А150)
116. **Heller A.**, Homotopy invariants of chain complexes. Illinois J. Math., 1961, **5**, № 3, 420—424 (РЖМат, 1963, 9А220)
117. **Hinohara Y.**, Projective modules over semilocal rings. Tohoku Math. J., 1962, **14**, № 2, 205—211 (РЖМат, 1965, 12А318)
118. —, Projective modules over weakly noetherian rings. J. Math. Soc. Japan, 1963, **15**, № 1, 75—88 (РЖМат, 1965, 7А237)
119. —, Supplement to «Projective modules over weakly noetherian rings». J. Math. Soc. Japan, 1963, **15**, № 4, 474—475 (РЖМат, 1965, 7А238)
120. —, Projective modules over weakly noetherian rings. Канто гакуин дайгаку когакубу кэнкю хококу, J. Technol. Res., 1963, **7**, № 2, 61—76 (РЖМат, 1965, 7А239)
121. **Hochschild G.**, Relative homological algebra. Trans. Amer. Math. Soc., 1956, **82**, № 1, 246—269 (РЖМат, 1959, 6731)
122. **Horrocks G.**, Projective modules over an extension of a local ring. Proc. London Math. Soc., 1964, **14**, № 56, 714—718 (РЖМат, 1966, 4А182)
123. **Hsü Chin — Scui**, Theorems on direct sums of modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1962, **13**, № 4, 540—542 (РЖМат, 1963, 2А243)
124. **Ishikawa T.** Faithfully exact functors and their applications to projective modules and injective modules. Nagoya Math. J., 1964, **24**, 29—42 (РЖМат, 1965, 8А234)
125. **Jans J. P.**, Duality in Noetherian rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1961, **12**, № 5, 829—835 (РЖМат, 1963, 10А226)
126. —, Module classes of finite type. Pacif. J. Math., 1963, **13**, № 2, 603—609 (РЖМат, 1964, 4А245)
127. —, On finitely generated modules over Noetherian rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1963, **106**, № 2, 330—340 (РЖМат, 1964, 9А231)
128. —, Rings and homology. Holf, Rinehart and Winston, NY, 1964 (РЖМат, 1966, 8А283К)
129. **Józefiak T.**, On the dimension of the algebra of endomorphisms of a projective module. Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1964, **12**, № 9, 523—526 (РЖМат, 1965, 8А231)
130. **Kandall G. A.**, The rank of an R-module. Amer. Math. Monthly, 1963, **70**, № 6, 653—655 (РЖМат, 1964, 2А333)
131. **Kaplansky I.**, Decomposibility of modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1962, **13**, № 6, 532—535 (РЖМат, 1963, 7А201)
132. —, R-sequences and homological dimension. Nagoya Math. J., 1962, **20**, 195—199 (РЖМат, 1964, 6А226)
133. —, The splitting of modules over integral domains. Arch. Math., 1962, **13**, № 5, 341—343 (РЖМат, 1964, 6А244)
134. **Kasch F.**, Dualitätseigenschaften von Frobenius — Erweiterung. Math. Z., 1961, **77**, № 3, 219—227 (РЖМат, 1963, 3А243)
135. **Kawada Y.**, On Köthe's problem concerning algebras for which every indecomposable module is cyclic. I. Proc. Japan Acad., 1961, **37**, № 6, 282—287 (РЖМат, 1963, 1А248)
136. —, On Köthe's problem concerning algebras for which every indecomposable module is cyclic. II. Proc. Japan Acad., 1961, **37**, № 6, 288—293 (РЖМат, 1963, 1А249)

137. —, On Köthe's problem concerning algebras for which every indecomposable module is cyclic. I. Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1962, A7, 26 March, 154—230 (РЖМат, 1964, 3A224)
138. —, On Köthe's problem concerning algebras for which every indecomposable module is cyclic. II. Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1963, A8, 5 March, 1—62 (РЖМат, 1964, 9A222)
139. —, On Köthe's problem concerning algebras for which every indecomposable module is cyclic. III. Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1965, A, 8, № 196—201, 1—250 (РЖМат, 1966, 3A225)
140. **Kertész A.**, On multimodules. Arch. Math., 1962, **13**, № 4, 267—274 (РЖМат, 1963, 3A242)
141. —, On ranks of modules. A remark to the preceding paper of L. Fuchs. Ann. Univ. scient. budapest. Sec. math., 1963, **6**, 79—82 (РЖМат, 1964, 11A223)
142. **Klingenberg W.**, Symplectic groups over local rings. Amer. J. Math. 1963, **85**, № 2, 232—240 (РЖМат, 1964, 9A167)
143. **Koh K.**, A note on a self injective ring. Canad. Math. Bull., 1965, **8**, № 1, 29—32 (РЖМат, 1965, 11A252)
144. **Lambek J.**, On the structure of semi-prime rings and their rings of quotients. Canad. J. Math., 1961, **13**, № 3, 392—417 (РЖМат, 1963, 2A242)
145. —, On Utumi's ring of quotients. Canad. J. Math., 1963, **15**, № 2, 363—370 (РЖМат, 1964, 6A237)
146. —, A module is flat if and only if its character module is injective. Canad. Math. Bull., 1964, **7**, № 2, 237—243 (РЖМат, 1964, 12A240)
147. **Lazard D.**, Sur les modules plats. C. r. Acad. sci., 1964, **258**, № 26, 6313—6316 (РЖМат, 1965, 3A326)
148. **Leavitt W. G.**, The module type of a rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, **103**, № 1, 113—130 (РЖМат, 1962, 11A197)
149. —, Modules over commutative rings. Amer. Math. Monthly, 1964, **71**, № 10, 1112—1113 (РЖМат, 1965, 7A220)
150. —, The module type of homomorphic images. Duke Math. J., 1965, **32**, № 2, 305—311 (РЖМат, 1966, 1A380)
151. **Lesieur L.**, Coeur d'un module. I. Sémin. P. Dubreil, M.—L. Dubreil — Jacotin et C. Pisot; Fac. sci. Paris, 1960—1961, 14 année, fasc. 1. Paris, 1963, 1/01—1/11 (РЖМат, 1964, 7A281)
152. —, C r o i s o t R., Sur la dualité dans les (f)-algèbres. Application aux anneaux, aux modules, aux demi-groupes. Ann. scient. Ecole norm. supér., 1960, **77**, № 2, 175—194 (РЖМат, 1962, 1A261)
153. —, —, Extension au cas non commutatif d'un théoréme de Krullet d'un lemme d'Artin-Rees. J. reine und angew. Math., 1960, **204**, № 1—4, 216—220 (РЖМат, 1962, 1A262)
154. —, —, La notion de coeur dans un module. C. r. Acad. sci., 1961, **252**, № 1, 52—54 (РЖМат, 1961, 10A259)
155. —, —, Coeur d'un module. J. math. pures et appl., 1963, **42**, № 4, 367—407 (РЖМат, 1964, 9A230)
155. **Levy L.**, Unique subdirect sums of prime rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1963, **106**, № 1, 64—76 (РЖМат, 1963, 10A214)
157. —, Torsion-free and divisible modules over non-integral-domains. Canad. J. Math., 1963, **15**, № 1, 132—151 (РЖМат, 1963, 10A225)
158. **MacLane S.**, An algebra of additive relations. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1961, 47, № 7, 1043—1051 (РЖМат, 1963, 12A278). Русский перевод: Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1963, 7, № 6, 3—12
159. —, Homology. Berlin, Springer. Verl., 1963, X, 422 S. (РЖМат, 1964, 8A256K; 1965, 5A233K)
160. **MacRae R. E.**, On the homological dimension of certain ideals. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, **14**, № 5, 746—750 (РЖМат, 1966, 4A180)

161. —, On an application of the fitting invariants. J. Algebra, 1965, **2**, № 2, 153—169 (РЖМат, 1966, 1А375)
162. **Maranda J.-M.**, Injective structures. Trans. Amer. Math. Soc., 1964, **110**, № 1, 98—135 (РЖМат, 1965, 3А321)
163. **Mares E. A.**, Semi-perfect modules. Math. Z., 1963, **82**, № 4, 347—360 (РЖМат, 1964, 7А283)
164. **Mascart H.**, Sur quelques propriétés élémentaires des modules topologiques. C. r. Acad. sci., 1964, **258**, № 6, 1683—1685 (РЖМат, 1965, 8А239)
165. —, Sur la notion de partie équilibrée d'un module topologique. Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., 1964, **50**, № 10, 1143—1150 (РЖЖат, 1966, 2А314)
166. —, Sur l'invariance par homothétie du filtre des voisinages de l'origine dans un module topologique. C. r. Acad. sci., 1964, **258**, № 12, 3148—3150 (РЖМат, 1965, 8А240)
167. **Maurer I. G.**, Über im Endomorphismenringe einer abelschen Gruppe definierte unendliche Reihen und Produkte. Acta scient. math., 1962, **23**, № 1—2, 171—175 (РЖМат, 1963, 2А244)
168. **Micali A.**, Sur les algébres symétrique et extérieure d'un module projectif. C. r. Acad. sci., 1962, **255**, № 22, 2871—2873 (РЖМат, 1965, 7А240)
169. **Mitchell B.**, The full imbedding theorem. Amer. J. Math., 1964, **86**, № 3, 619—637 (РЖМат, 1965, 10А280)
170. **Miyashita Y.**, On quasi-injective modules. A generalization of the theory of completely reducible modules. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 1965, Ser. 1, **18**, № 3—4, 158—187 (РЖМат, 1966, 3А238)
171. **Mochizuki H.**, Finitistic homological dimensions and duality theory for rings. Doct. diss. Univ. Washington, 1963. 84 pp. Dissert. Abstrs, 1964, **24**, № 7, 2926 (РЖМат, 1965, 2А362D)
172. —, Finistic global dimension for rings. Pacif. J. Math., 1965, **15**, № 1, 249—258 (РЖМат, 1966, 2А315)
173. **Morita K.**, Duality for modules and its applications to the theorie of rings with minimum condition. Sci. Repts. Tokio Kyoiku Daigaku, 1958, **A6**, 15 May, 83—142 (РЖМат, 1961, 8А266)
174. **Mount K. R.**, Some remarks on Fitting's invariants. Pacif. J. Math., 1963, **13**, № 4, 1353—1357 (РЖМат, 1965, 10А256)
175. **Murase I.**, On the structure of generalized uniserial rings. I. Scient. Parers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 1963, **13**, № 1, 1—22 (РЖМат, 1965, 3А298)
176. —, On the structure of generalized uniserial rings. II. Scient. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 1963, **13**, № 2, 131—158 (РЖМат, 1965, 3А299)
177. —, On the structure of generalized uniserial rings. III. Scient. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 1964, **14**, № 1, 11—95 (РЖМат, 1966, 3А227)
178. **Murtha J. A.**, Hereditary orders over principal ideal domains. Doct. diss. Univ. Wisconsin, 1964, 48 pp. Dissert. Abstrs, 1964, **25**, № 4, 2539, (РЖМат, 1965, 12А297D)
179. **Murthy M. P.**, Modules over regular local rings. Illinois J. Math., 1963, **7**, № 4, 558—565 (РЖМат, 1965, 11А271)
180. —, Projective modules over a class of polynomial rings. Math. Z., 1965, **88**, № 2, 184—189 (РЖМат, 1966, 5А220)
181. **Nagao H., Nakayama T.**, On the structure of (M_0)- and (M_u)-modules. Math. Z., 1953, **59**, № 2, 164—170 (РЖМат, 1954, 5460)
182. **Nakayma T.**, Note on uni-serial and generalized uni-serial rings. Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1940, **16**, № 7, 285—289
183. —, On the complete homology theory of Frobenius algebras. Osaka Math. J., 1957, **9**, № 2, 165—187 (РЖМат, 1961, 2А152)

184. —, On algebras with complete homology. Aghandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1958, **22**, № 3—4, 300—307 (РЖМат, 1960, 13635)
185. —, Class group of cohomologically trivial modules and cyclotomic ideals. Acta arith., 1964, **9**, № 3, 245—256 (РЖМат, 1965, 3A318)
186. —, Tsuzuku T., On Frobenius extensions. I. Nagoya Math. J., 1960, **17**, Aug., 89—110 (РЖМат, 1962, 12A175)
187. —, —, On Frobenius extensions. II. Nagoya Math. J., 1961, **19**, Oct, 127—148 (РЖМат, 1963, 1A252)
188. **Nöbeling G.**, Über die Derivierten des inversen und des direkten Limes einer Modulfamilie. Topology, 1962, **1**, Jan.—March, 47—61 (РЖМат, 1964, 12A245)
189. **Northcott D. G.**, The centre of a hereditary local ring. Proc. Glasgow Math. Assoc., 1962, **5**, № 3, 101—102 (РЖМат, 1963, 1A244)
190. **Ogawa H.**, On a duality of cohomology groups of Frobenius algebras. Tohoku Math. J., 1961, **13**, № 1, 46—65 (РЖМат, 1963, 3A244)
191. **Osofsky B. L.**, On ring properties of injective hulls. Canad. Math. Bull., 1964, **7**, № 3, 405—413 (РЖМат, 1965, 6A228)
192. —, Rings all of whose finitely generated modules are injective. Pacif. J. Math., 1964, **14**, № 2, 645—650 (РЖМат, 1965, 6A230)
193. **Peinado R. E.**, The generalized module type of a ring. Doct. diss. Univ. Nebraska, 1963, 51 pp. Dissert. Abstrs, 1964, **25**, № 1, 504 (РЖМат, 1965, 8A237D)
194. —, Note on modules. Math. Mag., 1964, **37**, № 4, 266—267 (РЖМат, 1965, 6A227)
195. **Popescu N.**, Modules à differentielle généralisée. Rev. roumaine math. pures et appl. 1964, **9**, № 6, 549—559 (РЖМат, 1965, 4A229)
196. —, Module cu diferenţială generalizată. Studii si cercetări mat. Acad. RPR, 1964, **16**, № 6, 791—800 (РЖМат, 1965, 5A228)
197. **Radu A.**, Stănăşilă O., The α morphism for the modules with generalized differentation. Rev. roumaine math. pures et appl., 1965, **10**, № 1, 69—79 (РЖМат, 1966, 2A323)
198. **Raynaud M.**, Solution d'un probleme universal relatif aux modules projectifs de classe zéro. C. r. Acad. sci., 1964, **258**, № 9, 2457—2460 (РЖМат, 1965, 11A270)
199. **Renault G.**, Sur les anneaux non commutatifs. III. Enveloppe injective d'un module. Semin. P. Dubreil, M.—L. Dubreil—Jacotin et C. Pisot; Fac. sci. Paris, 1961—1962, 15 année, fasc. 2, Paris, 1963, 15/01—15/06 (РЖМат, 1964, 9A235)
200. —, Sur les anneaux non commutatifs. IV. Modules isotypiques. Semin. P. Dubreil, M.—L. Dubreil—Jacotin et C. Pisot; Fac. sci. Paris, 1961—1962, 15 année, fasc. 2, Paris, 1963, 16/01—16/07 (РЖМат, 1964, 9A236)
201. —, Sous-modules complements dans un A-module M. C. r. Acad. sci., 1963, **256**, № 15, 3222—3225 (РЖМат, 1964, 10A217)
202. —, Étude de certains anneaux liés aux sous-modules compléments d'un A-module. C. r. Acad. sci., 1964, **258**, № 20, 4888—4890 (РЖМат, 1965, 2A361)
203. —, Étude de certains anneaux A liés aux sous-modules compléments d'un A-module. C. r. Acad. sci., 1964, **259**, № 23, 4203—4205 (РЖМат, 1965, 8A236)
204. **Ribenboim P.**; A theorem on linear transformations of torsion-free modules of infinite rank. Acta math. Acad. scient. hung., 1963, **14**, № 3—4, 353—358 (РЖМат, 1965, 10A258)
205. **Richman C. F.**, Walker E. A., Primary abelian groups as modules over their endomorphism rings. Math. Z., 1965, **89**, № 1, 77—81 (РЖМат, 1966, 12A174)
206. **Riehm C. R.**, Symplectic groups over discrete valuation rings. Bull., Amer. Math. Soc., 1965, **71**, № 2, 388—392 (РЖМат, 1965, 11A200)

207. **Riley J. A.**, Axiomatic primary and tertiary decomposition theory Trans. Amer. Math. Soc., 1962, **105**, № 2, 177—201 (РЖМат, 1965, 8A235)
208. **Rinehart G. S.**, Note on the global dimension of a certain ring. Proc. Amer. Mach. Soc., 1962, **13**, № 3, 341—346 (РЖМат, 1964, 9A237)
209. **Roby N.**, Sur les lois polynomes. C. r. Acad. sci., 1962, **255**, № 22, 2876—2877 (РЖМат, 1965, 7A235)
210. —, Sur les lois formelles. C. r. Acad. sci., 1962, **255**, № 25, 3343—3345 (РЖМат, 1965, 7A236)
211. —, Lois polynomes et lois formelles en théorie des modules. Ann. scient. Ecole norm. supér., 1963, 80, № 3, 213—348 (РЖМат, 1965, 7A234)
212. **Rodeja F. E. G.**, Nota sobre módulos. Rev. mat. hisp.-amer., 1962, **22**, № 4, 178—179 (РЖМат, 1963, 10A229)
213. **Rosen M. I.**, Representations of twisted group rings. Doct. diss. Princenton Univ., 1963, 46 pp. Dissert. Abstrs, 1964, **24**, № 11, 4716 (РЖМат, 1965, 12A314D)
214. **Rotman J.**, A characterization of fields among integral domains. Anais Acad. brasil. cienc., 1960, **32**, № 2, 193—194 (РЖМат, 1961, 7A275).
215. **Roux A.**, Sur une équivalence de catégories abéliennes. C. r. Acad. sci., 1964, **258**, № 23, 5566—5568 (РЖМат, 1965, 3A350)
216. **Saito Sh.**, Note on φ-notions. J. Fac. Liber. Arts and Sci. Shinshu Univ., 1962, Part 2, № 12, 14—19 (РЖМат, 1965, 2A366)
217. **Samuel P.**, Un exemple d'anneau factoriel. Bol. Soc. mat. Saõ Paulo, 1960 (1964), **15**, № 1—2, 1—4 (РЖМат, 1965, 6A217)
218. **Shukla U.**, On the projective cover of a module and related results Pacif J. Math., 1962, **12**, № 2, 709—717 (РЖМат, 1963, 12A276)
219. **Suzuki S.**, Some results on Hausdorff m-adic modules and m-adic differentials. J. Math. Kyoto Univ., 1963, **2**, № 2, 157—182 (РЖМат, 1965, 11A248)
220. **Swan R. G.**, Projective modules over group rings and maximal orders. Ann. Math., 1962, **76**, № 1, 55—61 (РЖМат, 1964, 2A338)
221. —, Vector bundles and projective modules. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, **105**, № 2, 264—277 (РЖМат, 1964, 12A292) Русский перевод: Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1964, 8, № 1, 29—43
222. —, The Grothendieck ring of a finite group. Topology, 1963, **2**, № 2, 85—110 (РЖМат, 1965, 12A320)
223. **Tachikama H.**, A characterization of QF-3 algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1962, **13**, № 5, 701—703 (РЖМат, 1964, 6A235) Поправка: Proc. Amer. Math. Soc., 1963, **14**, № 6, 995 (РЖМат, 1964, 6A235, 6A236)
224. **Танака Сусуму**, Абелевы группы без кручения над кольцом целых p-адических чисел (японск.). Сугаку, 1962, **14**, № 1, 33—35 (РЖМат, 1964, 1A297)
225. **Udrescu V. S.**, L'homologie des Λ-(Φ, Ψ)-modules. Rev. roumaine math. pures et appl., 1950, **10**, № 4, 471—480 (РЖМат, 1966, 2A317)
226. **Vázquez R.**, Limites izquierdos de módulos planos. An. Inst. mat. Univ. nac. autónoma México, 1962, **2**, 57—63 (РЖМат, 1964, 9A234)
227. —, Limites izquierdos de modulos proyectivos. An. Inst. mat. Univ. nac. autónoma México, 1963, **3**, 7—19 (РЖМат, 1965, 10A261)
228. **Viljoen G.**, A contribution to the extensions of abelian groups. Ann. Univ. scient. budapest. Sec. math., 1963, **6**, 125—132 (РЖМат, 1964, 11A175)
229. **Williamson S.**, Crossed products and hereditary orders. Nagoya Math. J., 1963, **23**, 103—120 (РЖМат, 1965, 12A293)
230. —, Crossed products and hereditary orders. Doct. diss. Brandeis Univ. 1963, 40 pp. Dissert. Abstrs, 1964, **24**, № 12, Part 1, 5447—5448 (РЖМат, 1965, 12A296D)
231. **Wolfson K. G.**, Isomorphisms of the endomorphism ring of a free module over a principal left ideal domain. Michigan Math. J., 1962, **9**, № 1, 69—75 (РЖМат, 1964, 8A251)

232. —, Isomorphisms of the endomorphism rings of torsion-free modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1962, 13, № 5, 712—714 (РЖМат, 1964, 6A245)
233. —, Isomorphisms of the endomorphism rings of a class of torsion-free modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, 14, № 4, 589—594 (РЖМат, 1966, 1A377)
234. **Wong E. T.**, Atomic quasi-injective modules. J. Math. Kyoto Univ., 1964, 3, № 3, 295—303 (РЖМат, 1965, 6A229)
235. **Wu Ling-Erl Eileen Ting**, A topological generalization of quasi-Frobenius rings. Doct. diss. Univ. Washington, 1964, 55 pp. Dissert. Abstrs., 1964, 25, № 5, 3010—3011 (РЖМат, 1965, 10A265D)