А. А. Виноградов, Упорядоченные алгебраические системы, *Итоги науки. Сер. Мат. Алгебра. Топол. Геом. 1965*, 1967, 83–131

УПОРЯДОЧЕННЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

А. А. Виноградов

Первые фундаментальные исследования по упорядоченным алгебраическим системам появились в начале текущего столетия. С историей развития теории таких систем можно познакомиться по книгам Г. Биркгофа [1] и Л. Фукса [60]. В обзорах Л. А. Скорнякова [54] и Л. М. Глускина [12] отражены новые результаты по упорядоченным кольцам и полугруппам, полученные в течение 1960—62 гг. В серии «Итоги науки» еще не было статей, посвященных упорядоченным группам. Мы приведем краткий обзор тех работ по упорядоченным группам, кольцам и полугруппам, которые прореферированы в Реферативном журнале «Математика» с 1963 по 1965 г., а также более ранних результатов по теории упорядоченных групп, которые совсем не отражены в книге Л. Фукса [60].

§ 1. Линейно упорядоченные группы

1. **Архимедовы группы.** Каждая архимедова группа удовлетворяет следующей записанной в терминах математической логики аксиоме (А):

$$\exists x H(x) \wedge \exists x \sim H(x) \wedge \forall x,\ y (H(x) \wedge y < x) \to H(y) \to$$
$$\to \forall c\, [c > 0 \to \exists d\, (H(d) \wedge \sim H(d + c))].$$

Содержательный смысл символа $H(x)$ таков: «Элемент x принадлежит подмножеству H». Раутенберг [209] отметил, что существуют неархимедовы группы, для которых выполняется аксиома (А), и линейно упорядоченные группы, удовлетворяющие аксиоме (А), являются коммутативными.

Понятие линейно упорядоченной абелевой группы может быть формализовано в узком исчислении предикатов посредством трех предикатов и основанной на них системе аксиом. Обозначим через $E(x, y)$ двухместный предикат: «Элемент x эквивалентен элементу y», через $Q(x, y)$ — предикат: «элемент x меньше, чем элемент y или эквивалентен ему» и через $S(x, y, z)$ трехместный предикат: «z есть сумма элементов x и y». Правильно образованная формула узкого исчисления предикатов называется элементарной формулой теории групп, если она не содержит других предикатов, отличных от предикатов E, Q и S. Две линейно упорядоченные группы называются элементарно эквивалентными, если элементарные свойства одной являются элементарными свойствами другой и наоборот.

Будем говорить,что два элемента x, y абелевой группы G являются конгруэнтными по модулю целого положительного числа n, если существует элемент $z \in G$ такой, что $x = y + nz$. Обозначим через $[n]G$ число, равное максимальному числу попарно конгруэнтных по модулю n элементов из G. Линейно упорядоченная группа G называется регулярно дискретной, если она дискретная и такая, что $[p]G = p$ для каждого простого числа p; G — регулярно плотна, если для всякого положительного целого числа n и любых элементов $a, b \in G$ $(a < b)$ существует элемент $x \in G$ $(a < x < b)$ такой, что $x = nz$ для некоторого $z \in G$; группа G — регулярна, если она регулярно дискретна или регулярно плотна. Это определение регулярной группы, введенное Робинсоном и Закон [216], оказалось эквивалентным следующему определению (Закон [262]): *Линейно упорядоченная группа G тогда и только тогда регулярна, если для каждого выпуклого подмножества $S \subset G$ и каждого положительного целого числа n существует элемент $g \in G$ такой, что $ng \in S$.* Каждая полная линейно упорядоченная абелева группа является регулярной.

Конрад [114] ввел понятие I-регулярной группы, как такой линейно упорядоченной группы G, что для каждого бесконечного интервала (a, b) в G и каждого положительного целого числа n существует элемент $g \in G$ такой, что $ng \in (a, b)$. Если группа G является регулярной, то она I-регулярна. Существуют такие линейно упорядоченные абелевы группы, которые являются I-регулярными, но не регулярными. Изучались регулярные и I-регулярные группы без условия коммутативности. Каждая линейно упорядоченная абелева регулярная группа элементарно эквивалентна некоторой архимедовой группе (Робинсон и Закон [215]), а все архимедовы группы являются регулярными (Закон [262]), и следовательно, I-регулярными. Таким образом, абелевы регулярные и I-регулярные группы можно считать обобщенно архимедовыми группами.

Предположим, что $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — возрастающая последовательность всех простых чисел и $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — произвольная последовательность, где каждое m_n есть или неотрицательное целое число или ∞. Всегда существует такая плотная архимедова группа G, что $[p_n]G = p_n^{m_n}$ (Закон [262]). Все абелевы регулярные дискретные группы являются элементарно эквивалентными. Две абелевы регулярные плотные группы G_1 и G_2 являются элементарно эквивалентными тогда и только тогда, когда $[p]G_1 = [p]G_2$ для каждого простого числа p.

М. И. Зайцева [16] и Тревизан [245] нашли независимо друг от друга все способы линейного упорядочения свободной абелевой группы с конечным числом образующих. При этом М. И. Зайцевой указаны все способы архимедовой упорядоченности такой группы. Оказалось, что мощность множества всех архимедовых упорядочений (при $n \geqslant 2$) равна мощности континуума. Мощность множества всех упорядочений свободной абелевой группы с конечным числом ($n \geqslant 2$) образующих также равна мощности континуума. К тому же выводу о мощностях пришел Мацусита [196]. Я. В. Хион [63] описал все способы архимедовского упорядочения архимедовски упорядочиваемой группы и тем обобщил результат М. И. Зайцевой и Тревизана об архимедовой упорядочиваемости группы с конечным числом образующих. Он же показал, в каком случае двум изоморфизмам архимедовой группы G с подгруппой аддитивной группы R действительных чисел соответствует одна и та же упорядоченность группы G.

Абелевы группы без кручения ранга 1, и только они, допускают архимедову линейную упорядоченность, но не допускают никакой неархимедовой линейной упорядоченности (В. Д. Поддерюгин [52]).

Крулль [181] изучал сохраняющие или обращающие порядок эндоморфизмы архимедовой группы. Все они вместе образуют коммутативную полугруппу.

2. η_α-группы. Пусть T — линейно упорядоченное множество и H, K — его подмножества. Будем писать $H < K$, если $h < k$ для любых $h \in H$ и $k \in K$. Предположим, что α — порядковое число. Множество T называется η_α-множеством, если для любых подмножеств H, $K \subset T$ таких, что $|H| + |K| < \aleph_\alpha$ и $H < K$, существует такой элемент $t < T$, что $H < \{t\} < K$ ($|H|$ означает мощность множества H). Линейно упорядоченная группа G называется η_α-группой, если она как линейно упорядоченное множество является η_α-множеством. Абелевы η_α-группы изучали Аллинг [74—76] и

Флейшер [129]. Ими дана характеристика абелевых η_α-групп. Аллингом, в частности, показано, что при $\alpha > 0$ любые две полные абелевы η_α-группы мощности $\aleph_\alpha$ изоморфны, но существуют неизоморфные коммутативные η_α-группы мощности $\aleph_\alpha$.

3. Симметрически линейно упорядоченные группы. Линейно упорядоченная аддитивная группа целых чисел обладает двумя характеристическими свойствами: 1) как упорядоченное множество она является симметричной в том смысле, что каждый начальный интервал ее антиизоморфен дополнительному конечному интервалу, и 2) она наследственно дискретна, то есть каждая подгруппа ее также дискретна. Санкаран и Венкатараман [218] произвели обобщение упорядоченной аддитивной группы целых чисел в двух направлениях, а именно стали рассматривать симметрические абелевы группы и линейно упорядоченные абелевы группы, которые являются наследственно дискретными. В результате их исследований оказалось, что эти классы совпадают.

4. Разрешимые линейно упорядоченные группы. Отметим сначала три теоремы, сформулированные Ри [210, 211]: 1) Линейно упорядоченная разрешимая группа с конечным числом образующих тогда и только тогда является нильпотентной, когда она удовлетворяет условию максимальности для подгрупп: 2) Если линейно упорядоченная группа удовлетворяет условию максимальности для подгрупп, то она нильпотентна в обобщенном смысле, т. е. является ZD-группой; 3) Если G — линейно упорядоченная нильпотентная группа без кручения с конечным числом образующих и A — группа монотонных автоморфизмов группы G, то A — нильпотентная группа без кручения с конечным числом образующих.

А. А. Виноградов [7] привел пример линейно упорядоченной разрешимой группы с тремя образующими и с условием максимальности для подгрупп, не являющейся нильпотентной. Тем самым показано, что теорема 1) Ри, цитированная выше, не является верной. Отмечено также, что доказательство теоремы 2) неубедительно. Желательно выяснить, верна или нет теорема 2). Требует проверки и теорема 3), так как она доказана на основе теорем 1) и 2).

А. И. Кокорин [23] нашел ряд необходимых условий для того, чтобы группа была линейно упорядочиваемой единственным способом, причем эти условия являются достаточными в классе нильпотентных групп; им же приведен пример такой некоммутативной группы, которая может быть линейно упорядочена единственным способом.

Назовем подгруппу H группы G строго изолированной если из $xg_1^{-1}xg_1 \ldots g_n^{-1}xg_n \in H$ следует $x, g_1^{-1}xg, \ldots$ $\ldots, g_n^{-1}xg_n \in H$. Двуступенно разрешимая группа тогда и только тогда является линейно упорядочиваемой группой, когда ее единица строго изолирована (А. И. Кокорин [26]).

Д. М. Смирнов [55] доказал, что в локально нильпотентной упорядоченной группе всякая выпуклая подгруппа инвариантна, а Б. И. Плоткин [50] обратил внимание на линейно упорядоченные группы, все выпуклые подгруппы которых инвариантны. Он установил, что изолятор коммутанта такой группы содержит центральную систему и эта группа является расширением группы с центральной системой при помощи абелевой группы без кручения.

Изоморфизм φ, отображающий структуру $S(G)$ полугрупп группы G на структуру $S(G^*)$ полугрупп группы G^*, называется полугрупповым структурным изоморфизмом (ПС-изоморфизмом). К. М. Кутыев [37] установил, что если G^*-образ линейно упорядоченной локально нильпотентной группы G с полугруппой положительных элементов P при ПС-изоморфизме φ, то группа G^* локально нильпотентна и ее можно так линейно упорядочить, что $\varphi(P)$ будет полугруппой положительных элементов группы G^*.

5. Представления (вложения) линейно упорядоченных групп. Предположим, что мы имеем вполне упорядоченную последовательность линейно упорядоченных множеств $M_0, M_1, \ldots, M_\alpha, \ldots$ с порядковыми типами $\xi_0, \xi_1, \ldots$ $\ldots, \xi_\alpha, \ldots$ Произведением $\xi_0\xi_1 \ldots \xi_\alpha \ldots$ этих типов или их ω-произведением называют порядковый тип множества конечных систем $(m_{\alpha_1}, \ldots, m_{\alpha_k})$, $m_i \in M_i$, сравниваемых лексикографически по последним различным элементам. В том случае, когда $\xi_0 = \xi_1 = \ldots = \xi$, полагают $\xi_0\xi_1 \ldots \xi_\alpha \ldots = \xi^\beta$, где β — порядковый тип последовательности. Обозначим через ζ порядковый тип множества всех целых чисел, через η — порядковый тип множества рациональных чисел, а через ξ — порядковый тип множества вещественных чисел. А. И. Мальцев [44] доказал, что для того чтобы линейно упорядоченная абелева группа G была ω-прямой суммой λ циклических групп (λ — порядковое число), необходимо и достаточно, чтобы порядковый тип G имел вид ζ^λ. Аналогично, линейно упорядоченная абелева группа G тогда и только тогда является ω-прямой суммой λ аддитивных групп вещественных чисел, когда она имеет порядковый тип ξ^λ. Порядковый тип любой счетной линейно упорядоченной группы имеет вид $\zeta^\lambda\eta^\varepsilon$, где λ — порядковое число, $\varepsilon = 0,1$. Для каждой счетной линейно упорядоченной группы G существует абелева группа, имеющая тот же порядковый тип, что и G. Неизвестно, верно ли это для несчетных групп.

Отметим, что теорема Митиуры [199] о представлении линейно упорядоченной группы в виде лексикографической суммы копий аддитивной группы вещественных чисел оказалась ошибочной (Флейшер [127]).

В. М. Копытов [34] показал, что для любой линейно упорядоченной группы G с полугруппой положительных элементов P существует такая линейно упорядоченная группа G^*, что: 1) $G \subseteq G^*$; 2) центр группы G^* полный; 3) $P \subseteq P^*$ и др.

Обозначим через Γ множество всех пар таких выпуклых подгрупп G_γ, G^γ линейно упорядоченной группы G, что $G_\gamma \subset G^\gamma$ и между ними нельзя вставить выпуклой подгруппы группы G. Множество Γ линейно упорядочивается по отношению включения подгрупп. Если Γ — вполне упорядочиваемо, то назовем G группой с вполне упорядоченным рангом. Конрад [107, 109] доказал, что если для группы G с вполне упорядоченным рангом каждая факторгруппа G^γ/G_γ монотонно изоморфна подгруппе D_γ аддитивной группы R действительных чисел, причем o-автоморфизмами группы D_γ являются только умножения на некоторые положительные рациональные числа, то группа o-автоморфизмов группы G может быть линейно упорядочена. В последующей работе [110] Конрад показал, что для каждой группы Q o-автоморфизмов линейно упорядоченной группы G, являющейся упорядочиваемой, может быть построена новая линейно упорядоченная группа H, содержащая группы Q и G.

Попутно отметим, что o-автоморфизмы линейно упорядоченных групп изучал Харви [142].

Пусть для линейно упорядоченных G и H имеем $G \subseteq H$. Группу H назовем: a-расширением группы G, если для каждого $e < h \in H$ существует $g \in G$ и положительное целое число n такое, что $h \leqslant g \leqslant h^n$; b-расширением группы G, если для каждого $e < h \in H$ существует $g \in G$ и положительное целое число n такое, что $g \leqslant h \leqslant g^n$; c-расширением группы G, если для каждого $e < h \in H$ существует $g \in G$ такой, что $(hg^{-1})^n < h$ для всякого целого числа n; t-расширением группы G, если для каждых h, h', $h'' \in H$, $h < h' < h''$ существует $g \in G$ такой, что $h < g < h''$. Если $x \in \{a, b, c, t\}$, то группа G называется x-замкнутой, если G не имеет собственного x-расширения. Холланд [148] показал, что t-расширение является b-расширением, каждое c-расширение — b-расширением и каждое b-расширение — a-расширением. Он выяснил также другие свойства $\varkappa$-расширений, среди которых — условия $\varkappa$-замкнутости.

Назовем ПС-изоморфизмом изоморфизм структур подполугрупп двух групп. К. М. Кутыев [38 — 40] показал, что ПС-изоморфизм является следствием изоморфизма или антиизоморфизма групп, когда одна из них упорядочиваема.

Мы не будем касаться теоремы Хана [141] о вложении абелевых групп. Подробное изложение можно найти в книге Л. Фукса [60]. Отметим лишь один примыкающий к этой теореме результат Ван-Ши-цзяна [4]: Если линейно упорядоченное множество архимедовски эквивалентных классов упорядоченной абелевой группы состоит из конечного числа $(n+1)$ элементов: $0 \ll \varkappa_1 \ll \varkappa_2 \ll \ldots \ll \varkappa_n$, то такая группа изоморфна подгруппе упорядоченной аддитивной группы векторов n-мерного действительного пространства.

6. Условия упорядочиваемости группы (o-группы). В книге Л. Фукса [60] подробно рассмотрены результаты, полученные многими авторами относительно условий, при наличии которых группа может быть линейно упорядочиваемой (сокращенно: o-группой). Там, в частности, отмечены фундаментальные теоремы А. И. Мальцева [44, 45] о линейно упорядоченных группах. Мы ограничимся лишь дополнительными указаниями.

Л. Н. Шеврин [68] дал характеристику o-группы с помощью структуры всех полугрупп этой группы. Тем самым решен вопрос Б. И. Плоткина [51] о существовании структурно подполугрупповой характеристики упорядочиваемых групп.

А. И. Кокорин [26] показал, что факторгруппа G/Z_1 o-группы G по полной подгруппе Z_1 центра Z является упорядочиваемой, а В. М. Копытов [34] заметил, что факторгруппа o-группы по ее центру также является o-группой.

Тулли [246] доказал, что для группы G эквивалентны следующие условия: 1) G является o-группой; 2) для всякого $g \in G$, $g \neq e$ существует подмножество $S \subseteq G$ такое, что $g \in S$, $e \notin S$, и для каждых g', $h' \in G$ или $g'Sh' \subseteq S$ или $S \subseteq g'Sh'$; 3) существует совокупность Σ подмножеств множества G такая, что $e = \cap S$ и для любых g, $h \in G$ и $S \in \Sigma$ или $gSh \subseteq S$ или $S \subseteq gSh$.

Шепперд [220] нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы группа без кручения, содержащая нормальный делитель индекса 2, могла быть o-группой.

Положим $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ и $[x, y, z] = [[x, y], z]$ для элементов группы. Несколько отношений для элементов o-группы установил Нейман [204]; так, например, им показано, что если a, b — элементы o-группы и $[a^m, b] = e$ для каждого целого числа $m \neq 0$, то $[a, b] = e$; или если $[a^m, b, a] = e$ для каждого целого числа $m \neq 0$, то $[a, b, a] = e$. Чехата [98] построил пример o-группы, в которой выполняются следующие соотношения: $[a, b^m, a, a] = e$, $m > 1$, $[a, b, a, a] \neq e$.

Для произвольной группы G положим $G_1 = G$, $G_{l+1} = [G_l, G]$. Для любой последовательности натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_l, n_{l+1}, \ldots, (n_l > 1)$ введем цепочку нормальных делителей

$$G \supseteq G_{n_1} \supseteq G_{n_1, n_2} \supseteq \ldots \supseteq G_{n_1, n_2, \ldots, n_l} \supseteq G_{n_1, n_2, \ldots, n_l, n_{l+1}} \supseteq \ldots,$$

где $G_{n_1, \ldots n_l, n_{l+1}} = (G_{n_1, n_2, \ldots, ln_l})_{n_{l+1}}$. Группа G называется полинильпотентной, если $G_{n_1, \ldots, n_s} = E$. Все нильпотентные и разрешимые группы являются полинильпотентными. Если F — свободная группа, то факторгруппа $F/F_{n_1, \ldots, n_k}$ называется свободной полинильпотентной группой. А. Л. Шмелькин [70, 71] доказал, что всякая свободная полинильпотентная группа является o-группой.

7. Элементарная теория линейно упорядоченных абелевых групп. Формула узкого исчисления предикатов, не содержащая других нелогических символов, кроме $=$, $+$, $<$, называется $\forall$-формулой, если она в пренексной нормальной форме не содержит квантора существования. Две линейно упорядоченные абелевы группы G_1 и G_2 называются $\forall$-эквивалентными, если всякая $\forall$-формула, истинная в G_1, истинна в G_2 и обратно. Ю. Ш. Гуревич и А. И. Кокорин [15] доказали, что линейно упорядоченные абелевы группы $\forall$-эквивалентны. Ю. Ш. Гуревич [13, 14] установил разрешимость элементарной теории линейно упорядоченных абелевых групп. Элементарными свойствами линейно упорядоченных групп называются такие свойства, которые можно выразить на языке узкого исчисления предикатов, принимая в качестве исходных основные операции и отношения этих групп. Классификации линейно упорядоченных абелевых групп по элементарным свойствам посвящена работа М. И. Каргаполова [21].

8. Другие вопросы теории линейно упорядоченных групп. Крантц [179] рассматривал различные свойства линейно упорядоченных групп, элементами которых являются классы эквивалентности $(\overline{A, P})$, определенные на прямом произведении $A \times P$ множеств A и P.

§ 2. Структурно упорядоченные группы

1. Определение l-группы. Изучение l-групп началось после появления работы Л. В. Канторовича [18] о полуупорядоченных пространствах. Систематическое изучение некоммутативных l-групп впервые произведено Биркгофом [85]. Он указал, что l-группа может быть определена как группа с унарной операцией $a \to a^*$, которая удовлетворяет следующим условиям: 1) $0^* = 0$; 2) $c = c^* \cdot ((c^{-1})^*)^{-1}$; 3) операция $(ab^{-1})^* \cdot b$ ассоциативна, т. е. $\{[(ab^{-1})^* \cdot b] \cdot c^{-1}\}^* \cdot c = \{a \cdot [(bc^{-1})^* \cdot \cdot c]^{-1}\}^* \cdot [(bc^{-1})^* \cdot c]$. Митиура [197] заметил, что это определение не является полным: к аксиомам 1) — 3) надо добавить еще аксиому 4): $ax^*a^{-1} = (axa^{-1})^*$. Кроме системы постулатов 1) — 4) Митиура [199] указал на четыре системы, каждая из которых эквивалентна системе 1) — 4). Затем Эскардо и Бальманья [123] нашли новые пять систем постулатов, эквивалентных системе 1) — 4). В статье [80] Бальманья привел еще одно множество постулатов. Систему постулатов, определяющих l-группу, указал также Вайда [249].

Назовем элемент x l-группы G острием элемента $a > e$, если x — минимальный элемент в G со свойством $a \geqslant x \geqslant e$, $ax^{-1} \wedge x = e$. Элемент $x \in G$ называется острием в группе G, если он является острием какого-либо элемента этой группы. Шик [223] показал, что l-группа является линейно упорядоченной в том и только в том случае, если каждый ее элемент, больший нуля, есть острие.

Те [241] доказал, что l-группа является линейно упорядоченной, если выполняется хотя бы одно из следующих условий: 1) каждая пара $a, b > e$ имеет нижнюю грань $c > e$; 2) из $a, b > e$ следует $a \wedge b \neq e$; 3) из $a \wedge b = e$ вытекает $a = e$ или $b = e$; 4) $a, b > e$ влечет $ab > a \vee b$; 5) существует такой элемент $b > e$, что для каждого $a > e$ найдется такое целое число n, что $a^n \geqslant b$; 6) для каждых двух элементов $a, b > e$ существует такое целое число n, что $a^n \geqslant b$.

Вайда [248] показал, что для линейной упорядоченности l-группы G необходимо и достаточно, чтобы структура ее l-идеалов являлась линейно упорядоченным множеством и для любых элементов $x, t \in G$ выполнялось условие: $x \vee (tx^{-1}t^{-1}) \geqslant e$.

2. Архимедовы l-группы. Известно несколько доказательств теоремы о коммутативности архимедовой l-группы. Еще одно доказательство этой теоремы приведено Гофманом [139].

Якубик [72] показал, что для каждой данной архимедовой l-группы G существует l-группа действительных функций, изоморфная l-группе G.

Будем говорить, что l-группа G обладает свойством (f), если из того, что $\{x_i\} \in G^+$ и два любых различных элемента этого множества взаимно дизъюнктны, то в G существует элемент $\bigvee x_i$. А. Г. Пинскер [48] доказал, что каждую архимедову l-группу можно включить в полную l-группу G', обладающую свойством (f). Якубик [72] передоказал этот результат другим методом.

В рефератах на статьи Чо [99, 100] Конрад отметил ошибочность многих теорем, указанных в этих работах. Верной является следующая теорема Чо с поправкой Конрада: Если G — архимедова l-группа, в которой существуют различные элемёнты $x_1, \ldots, x_n$ такие, что каждый x_i следует за нулем и из $y > 0$ следует $y \geqslant x_i$ для некоторого i, то G есть кардинальное произведение n бесконечных циклических групп.

3. Некоторые другие классы l-групп. Элементы $a_1, \ldots, a_n$ l-группы G-называются дизъюнктными, если они строго положительны и $a_i \wedge a_j = 0$ для всех $i \neq j$. Конрад и Клиффорд [117] выяснили строение l-группы, имеющей ровно два дизъюнктных элемента. Такую l-группу можно получить следующим образом: берутся две линейно упорядоченные группы A и B, образуется их кардинальная сумма $A+B$, затем l-группа получается как такая, в которой $A+B$ является l-идеалом, а каждый положительный элемент, не содержащийся в $A+B$, превосходит $A+B$. Конрад [112] выяснил строение l-групп с конечным числом дизъюнктных элементов. Эти группы получаются с помощью конструкции, аналогичной для групп с двумя дизъюнктными элементами. Он выяснил также строение такой l-группы, в которой каждый элемент $a > 0$ превосходит самое большее конечное число дизъюнктных элементов.

Для каждого $g \neq 0$ из l-группы G обозначим через R_g подгруппу группы G, порожденную множеством всех l-идеалов из G, не содержащих элемента g. Подгруппа R_g является l-идеалом в G. Радикал $R(G)$ l-группы G определяется равенством: $R(G) = \cap R_g\ (e \neq g \in G)$. Конрад [115] изучал l-группы, радикал которых равен 0.

l-группу с двумя образующими рассматривал Якубик [173]. Пусть x есть элемент l-группы G. Если $0 < x$ и нет такого элемента z, что $0 < z < x$, то пишем $0 \prec x$; если $nx < y$ для каждого целого числа, то $x \ll y$. Через $A \dotplus B$ обозначим прямую сумму l-групп A и B. Пусть C — аддитивная группа всех целых чисел (при естественном порядке). В работе [173] Якубиком были построены примеры l-групп с двумя образующими, которые обозначены $G_m\ (m = 0, 1, 2, \ldots)$. Показано, что если G — l-группа с двумя образующими x, y, причем $0 \prec x \ll y$, то G монотонно изоморфна одной из групп G_m. Если же $0 \prec x$, то G монотонно изоморфна одной из следующих l-групп: C, $C+C$, $C+C+C$, G_m, G_m+C $(m=0, 1, 2, \ldots)$. Якубик исследовал также l-группы с множеством образующих $B=\{y\}\cup A$, причём для каждого $a \in A$ имеем $0 \prec a \ll y$.

Для произвольного множества $A \subset G^+$ l-группы G определим множество $K'(A)$ всех элементов $y \in G^+$, для которых $x \in A \Rightarrow x \wedge y = 0$. Положим $K'(K'(A)) = K(A)$. Будем считать, что l-группа G удовлетворяет условию (P), если при $A \subset G^+$ к любому $x \in G^+$ найдутся элементы $y \in K(A)$, $z \in K'(A)$ такие, что $x \leqslant y \vee z$, l-группы, обладающие свойством (P) изучал Якубик [164]. Шик [224] показал, что группа с условием (P) является подпрямой суммой линейно упорядоченных групп. Будем говорить, что l-группа G удовлетворяет условию (Q), если из того, что $A \subset G^+$, $A \neq \{0\}$ следует, что множество $K(A)$ не ограничено сверху. Якубик [167] изучал группы с условием Q. Каждая l-группа, удовлетворяющая условию (P), удовлетворяет также условию (Q), но обратное не верно. Если l-группа G с условием (Q) удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей в структуре $[G]$ всех ее l-идеалов, то она может быть представлена в виде прямой кардинальной суммы конечного числа линейно упорядоченных групп. Если l-группа G с условием (Q) удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей в структуре $[G]$, то она или разложима в прямую сумму или имеет максимальный l-идеал.

l-группа G называется компактно-порожденной, если у каждого множества $A \subseteq G$, для которого существует $\vee A$ в G, имеется конечное подмножество $B \subseteq A$ такое, что $\vee B = \vee A$. Шик [230] доказал, что компактно-порожденная полная l-группа, отличная от нулевой, изоморфна прямой сумме копий линейно упорядоченной группы целых чисел и, обратно, прямая сумма копий линейно упорядоченной аддитивной группы целых чисел есть компактно-порожденная l-группа.

Пусть X обозначает коммутативную l-группу со структурными операциями $\cap$ и $\cup$. Предположим, что X_0 есть подгруппа группы X, которая является l-группой относительно порядка в X со структурными операциями, обозначаемыми $\wedge$ и $\vee$. Для $x \in X_0$ полагаем

$$|x|_X = (x \cup 0) + ((-x) \cup 0), \quad |x|_{X_0} = (x \vee 0) + ((-x) \vee 0).$$

В работе Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера [19] поставлена проблема: найти такие полные l-группы X и X_0, что для некоторого элемента $x \in X_0$ имеет место неравенство $|x|_{X_0} > |x|_X$. Якубик [169] решил эту проблему положительно.

Пусть $\mathfrak{a}$ — бесконечное кардинальное число, S — структура и $A \subset S$. Дополнительно предположим, что множество A является структурой относительно порядка в S. Назовем множество A $\mathfrak{a}$ — подструктурой структуры S, если выполняется следующее условие: если $B \subset A$, $|B| \leqslant \mathfrak{a}$ и существует $s = \sup_S B$, то одновременно $s = \sup_A B$. Якубик [169] доказал, что если $\mathfrak{a}$ — регулярное кардинальное число, то существует полная l-группа X и подмножество $X_0 \subset X$, являющееся l-группой, такие, что X_0 для каждого кардинального числа $\mathfrak{t} < \mathfrak{a}$ является $\mathfrak{t}$-подструктурой, но не $\mathfrak{a}$-подструктурой в X.

l-группа G называется автометризуемой, или l-пространством, если она обладает таким отображением $d: G \times G \to G$, что $d(a, b) \geqslant 0$ (причем равенство имеет место лишь в случае, когда $a = b$), $d(a, b) = d(b, a)$ и $d(a, c) \leqslant d(a, b) + d(b, c)$. Свами [238] показал, что коммутативная l-группа G является автометризуемой относительно расстояния $d(a, b) = |a - b|$. Не всякая некоммутативная l-группа автометризуема. Установлены другие свойства l-пространств.

Каждая l-группа является дистрибутивной структурой, но есть l-группы, которые удовлетворяют более сильному условию дистрибутивности. l-группу называют вполне дистрибутивной, если для всех $g_{ij} \in G$ $(i \in I,\ j \in J)$ справедливо равенство

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} g_{ij} = \bigvee_{\rho} \bigwedge_{i} g_{i\rho(i)},$$

где $\rho \in J^I$ и предполагается, что все указанные верхние и нижние грани существуют. Вполне дистрибутивные l-группы изучали Вейнберг [254, 255] и Конрад [115].

4. Выпуклые подгруппы l-группы. Интерес к выпуклым подгруппам обусловлен тем, что l-группы могут обладать тем или иным свойством в зависимости от наличия в них индивидуальных выпуклых подгрупп или от характера некоторого множества их. Например, будет ли l-группа G полной дистрибутивной структурой, зависит от структуры L всех l-идеалов группы G. При доказательстве многих теорем об l-группах используются выпуклые подгруппы. Так Холланд [149], показывая, что l-группа может быть представлена группой сохраняющих упорядочение автоморфизмов линейно упорядоченного множества, построил это множество из смежных классов выпуклых l-подгрупп группы G.

Еще Биркгоф [85] отметил, что L является полной дистрибутивной структурой. Якубикова [73] и Лоренц [189] показали, что множество Г всех выпуклых l-подгрупп также является дистрибутивной структурой. Изучению структуры всех выпуклых l-подгрупп l-группы посвящены работы Конрада [116] и Шика [235]. Ими, в частности, установлено, что структура Г является полной. Структуру K всех выпуклых подгрупп l-группы изучала Якубикова [73]. Ею показано, что если l-группа не является линейно упорядоченной, то K не дедекиндова структура и не удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей. Вайда [248] доказал, что если структура L удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей, то представление группы G в виде прямого произведения неразложимых множителей является единственным. Если структура L l-группы G удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей и в G из $a \wedge x^{-1}ax = e$ следует $a = e$, то либо G есть прямая кардинальная сумма своих двух l-идеалов, либо G содержит максимальный l-идеал, включающий в себя все остальные собственные l-идеалы (Лоренц [189]). Этим обобщен результат Биркгофа [1] об абелевых группах.

Известно, что абелева l-группа имеет два собственных l-идеала, если она не линейно упорядоченная. Якубик [167] показал, что собственный l-идеал имеет l-группа, которая не является линейно упорядоченной и удовлетворяет условию (Q) (см. № 3). Холланд [151] установил, в каком случае l-группа G является простой l-группой, т. е. l-группой, не имеющей собственных l-идеалов. Биркгоф [85] показал, что если каждая цепь, составленная из элементов абелевой l-группы, имеет длину не более фиксированного числа r, то каждый ее l-идеал является главным. Этот результат обобщен Якубиком [165] для некоммутативных l-групп. Им же отрицательно решена 99-я проблема Биркгофа [1]. Теорему об l-идеалах l-группы, полезную в теории нормирования, доказал Накано [203].

Шик ввел оказавшееся очень полезным понятие компоненты l-группы G как множества $A' = \{x \in G : |x| \wedge |a| = 0,\ a \in A\}$, где $\varnothing \neq A \subset G$. Им же [222] показано, что компоненты l-группы образуют относительно теоретико-множественного включения полную булеву алгебру Γ_0; компоненты, являющиеся l-идеалами, образуют полную подалгебру Γ_1 этой алгебры, а те l-идеалы, которые являются прямыми факторами группы G, образуют (не обязательно полную) подалгебру Γ_2 алгебры Γ_1. Проблеме изучения структуры компонент l-группы посвящена также работа Шика [234].

Среди всех l-идеалов выделяются такие l-идеалы I l-группы G, для которых естественно упорядоченная факторгруппа

G/I является линейно упорядоченной и для $a \in G/I$ имеем $b > a$ для всякого $b \in I$ или $a > b$ для всякого $b \in I$. Такие l-идеалы называются сильными. Шик [224] показал, что l-идеал l-группы является сильным тогда и только тогда, когда он содержит все собственные компоненты.

5. Структура нитей l-группы. Жаффар [159] нашел необходимые и достаточные условия, при которых l-группа имеет конечное число нитей. Он же [155] поставил вопрос, будет ли структура нитей Y абелевой l-группы структурой с относительными дополнениями, если она удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей? Якубик [170] дал утвердительный ответ для архимедовых l-групп и привел пример, подтверждающий, что ответ для общих абелевых l-групп является отрицательным.

6. Свободные l-группы. Свободную l-группу с одним образующим рассматривал Биркгоф [85]. Он показал, что такая группа l-изоморфна кардинальной сумме двух копий аддитивной группы целых чисел. Все способы структурного упорядочения свободной абелевой группы с конечным числом образующих нашел А. И. Кокорин [25] и тем самым завершил решение 102-й проблемы Биркгофа [1].

Пусть $[G, P]$ обозначает частично упорядоченную группу G с множеством положительных элементов P. Абелева l-группа $[G(P), G(P)^+]$ называется свободной l-группой над $[G, P]$, если выполняются следующие условия: 1) существует изоморфизм ψ частично упорядоченной группы $[G, P]$ в $[G(P), G(P)^+]$; 2) $\psi([G, P])$ порождает $[G(P), G(P)^*]$; 3) если $\varphi: [G, P] \to [L, L^+]$ есть изоморфизм частично упорядоченной группы в l-группу, то существует l-гомоморфизм $\varphi': [G(P), G(P)^+] \to [L, L^+]$ такой, что $\varphi = \varphi'\psi$. Вейнберг [256] показал, что тогда и только тогда существует свободная l-группа над частично упорядоченной группой $[G, P]$, когда последняя является полузамкнутой (из $np \in P$ следует $p \in P$). Если G — частично упорядоченная полузамкнутая архимедова абелева группа конечного ранга, то свободная l-группа над $[G, P]$ является архимедовой. Рассмотрена структура нитей свободной l-группы над $[G, \{0\}]$, где G — абелева группа ранга, большего единицы. Пусть I^α обозначает свободную группу с множеством свободных образующих мощности α. Тогда $A_\alpha = [I^\alpha(\{0\}), I^\alpha(\{0\})^+]$ есть свободная l-группа с множеством свободных образующих мощности α. Установлено, что каждая свободная l-группа A_α является архимедовой. В статье [255] показано, что при $\alpha > 1$ A_α не имеет нетривиального прямого слагаемого, A_α является подпрямой суммой семейства копий линейно упорядоченных целых чисел. Особым образом определена свободная абелева l-группа над дистрибутивной структурой.

7. Вложение l-групп. Вайда [248] показал, что l-группа G тогда и только тогда реализуется в виде подпрямого произведения линейно упорядоченных групп, когда для любых ее элементов x, t выполняется условие: $x \vee (tx^{-1}t^{-1}) \geqslant \geqslant e$. Условия вложимости l-группы в прямое произведение линейно упорядоченных групп исследовал Банашевский [82]. Жаффар [155] установил необходимые и достаточные условия такого вложения, выраженные в терминах нитей. Лоренцен [190] установил, что всякая абелева l-группа l-изоморфна собственной подгруппе полного прямого произведения линейно упорядоченных групп. Жаффар [155] уточнил эту теорему, установив, что абелева l-группа допускает несократимую реализацию тогда и только тогда, если группа удовлетворяет следующему условию: множество минимальных нитей $\leqslant \bar{x}$ не пусто для всякой нити $\bar{x} \neq \bar{0}$. Теорема о единственности несократимой реализации абелевой l-группы доказана топологическим методом (Жаффар [162]). В статье [158] рассматриваются l-реализации полных l-групп.

Назовем реализацию l-группы G полной, если $G \supset \overline{G}_\nu$ для всех ν, где $\overline{G}_\nu$ есть множество всех тех элементов $x(\ ) \in \tilde{\prod} G_\nu$ (принадлежит полному кардинальному произведению линейно упорядоченных групп G_ν), для которых $x(\mu) = = 0$ при $\mu \neq \nu$. Реализация называется α- и β-реализацией, если $G \cap \overline{G}_\nu \neq e$) или $G \cap \overline{G}_\nu = e$ соответственно. Реализация $G_\nu | x \in I$) l-группы G называется приведенной, если для любых β, $\gamma \in I$, $\beta \neq \gamma$ существует такой элемент $x(\ ) \in \tilde{\prod\limits_{\nu \in I}} G_\nu$, что $x(\beta) > e$, $x(\gamma) < e$. Шик [223, 224] нашел условия, эквивалентные существованию у l-группы какой-либо реализации, полной реализации, α-реализации, β-реализации, приведенной реализации, приведенной β-реализации. При характеристике различных типов реализаций используются система компонент l-группы и системы l-идеалов с дополнительными свойствами. Проблеме реализации посвящены также работы [227, 228, 235 и 82].

Рибенбойм [212] доказал, что вязкая абелева l-группа обладает такой реализацией, которая является хаусдорфовой, собственной и вполне регулярной. Свои исследования Рибенбойм изложил в систематическом виде в книге [213].

Холланд [149] посвятил свою работу проблеме вложения l-группы в l-группу автоморфизмов линейно упорядоченного множества. Рассмотрим группу $A(S)$ всех монотонных автоморфизмов линейно упорядоченного множества S и частично упорядочим ее, полагая $f \leqslant g$, если для всех $x \in S$ имеем $xf \leqslant xg$. При этом упорядочении $A(S)$ будет l-группой. Каждая l-группа l-изоморфна l-подгрупппе l-группы $A(S)$ для некоторого линейно упорядоченного множества S. Предположим, что S и T — линейно упорядоченные множества и что данная l-группа G l-изоморфна транзитивной l-подгруппе l-группы $A(S)$ и также транзитивной l-подгруппе l-группы $A(T)$; в работе [150] выяснено, каким образом при этом должны быть связаны между собой множества S и T.

Холланд [149] доказал, что всякая l-группа вложима в l-группу с делением (т. е. в такую, в которой уравнение $nx=g$ разрешимо). Якубик [72] и Вейнберг [256] установили возможность такого вложения архимедовой l-группы в архимедову же l-группу.

Биркгоф [85] поставил проблему расширения одной l-группы G_1 по другой l-группе G_2 в следующем виде: перечислить все l-группы G, содержащие G_1 в качестве l-идеала таким образом, чтобы факторгруппа G/G_1 была l-изоморфна l-группе G_2. Он же указал, что эта проблема имеет по крайней мере одно решение: достаточно образовать кардинальное произведение l-групп G_1 и G_2, а если группа G_1 — линейно упорядоченная, то возможно еще одно решение: лексикографическое произведение групп G_1 и G_2. В работе [160] Жаффаром решалась проблема расширения l-групп в указанной постановке.

Папангелоу [206] ввел различные определения порядковой сходимости направленной сети абелевой l-группы, т. е. семейства $(x_i)_{i \in I}$ элементов из данной l-группы, область I индексов которой является направленным частично упорядоченным множеством. Введено понятие фундаментальной последовательности, с помощью которого построена l-группа, содержащая в себе данную абелеву l-группу в качестве l-подгруппы.

Пусть Γ—частично упорядоченное множество и H_γ—частично упорядоченная группа для каждого $\gamma \in \Gamma$. Обозначим $V=V(\Gamma, H_\gamma)$ следующее подмножество полной прямой суммы групп H_γ: элемент $v=(\ldots, v_\gamma, \ldots)$ принадлежит к V тогда и только тогда, когда $S_v=\{\gamma \in \Gamma \mid v_\gamma \neq 0\}$ не содержит бесконечной возрастающей последовательности. Подмножество V образует подгруппу. Определим $\Gamma^v=\{\gamma \in \Gamma \mid v_\gamma \neq 0$ и $v_\gamma=0$ для всех $\alpha>\gamma\}$. Компоненты v_γ, $\gamma \in \Gamma^v$ называются максимальными компонентами элемента v. Ненулевой элемент $v \in V$ является, по определению, положительным, если каждая максимальная компонента v_γ элемента v положительна относительно частичного упорядочения на группе H_γ. Группа V будет при этом частично упорядоченной. Если Γ—линейно упорядоченное множество и, для каждого $\gamma \in \Gamma$, $0 \neq H_\gamma$—подгруппа аддитивной группы действительных чисел, упорядоченная естественным способом, то группа V будет линейно упорядоченной. Хан [141] показал, что всякая абелева линейно упорядоченная группа может быть вложена в такую группу V. Конрад, Харви и Холланд [118] обобщили теорему Хана для абелевых структурно упорядоченных групп.

8. Топология в l-группе. Если G—l-группа, то интервальной топологией группы G называют топологию, получаемую тогда, когда в качестве базы замкнутых множеств берут множества вида $\{f \in G/f \geqslant f_0\}$, $\{g \in G/g \leqslant g_0\}$ и множество G. Линейно упорядоченная группа является топологической группой и топологической структурой в своей интервальной топологии. Биркгоф [1] поставил вопрос (проблема 104), всякая ли l-группа является топологической группой и топологической структурой в своей интервальной топологии. Нортхем [205] показал, что существует l-группа, которая не является хаусдорфовым пространством в своей интервальной топологии, а потому не является топологической группой. Якубик [168] доказал, что если в l-группе G существуют архимедовы элементы a, c, $a \wedge c = 0$, то G не является топологической l-группой в своей интервальной топологии. Причем элемент $a > 0$ l-группы G называется архимедовым, если для каждого $b \in G$ существует такое натуральное число n, что $a^n \leqslant b$. Широкие классы l-групп, не являющиеся топологическими в своих интервальных топологиях, нашел Волк [260]. Указаны также такие классы l-групп, что если l-группа этих классов является хаусдорфовым пространством в своей интервальной топологии, то она является линейно упорядоченной (см. Чо [100], Волк [260], Конрад [113] и Якубик [171]). Холланд [152] привел пример такой l-группы, которая не является линейно упорядоченной, но является топологической группой и топологической структурой в своей интервальной топологии. Топологию в l-группах изучали также Шик [222, 235] и Заманский [263].

§ 3. Частично упорядоченные группы

1. Направленные группы. Якубик [166] показал, что если C—максимальная и выпуклая цепь в направленной группе G, содержащая e, то для того чтобы C была прямым множителем группы G, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие (f): если $r \in C^+$ и $z \in G^+$, то в G существует элемент $r \wedge z$. Известен пример, который показывает, что условию (f) удовлетворяют не все направленные группы. Указанная теорема является обобщением другой теоремы Якубика, приведенной на стр. 120 книги Фукса [60].

Предположим, что G—направленная абелева группа с полугруппой положительных элементов G^+, удовлетворяющей следующим условиям: 1) каждое непустое направленное снизу подмножество из G^+ имеет в G^+ нижнюю грань; 2) (свойство разложимости) из $x \leqslant a+b$, где $x, a, b \in G^+$ следует существование элементов $a', b' \in G^+$ таких, что $x = a'+b'$, $a' \leqslant a$, $b' \leqslant b$. Бауэр [83] показал, что такая группа будет полной l-группой.

Некоммутативные направленные группы со свойством разложимости изучались Кристеску. При этом важным является понятие компоненты. Пусть G—направленная группа и Q—ее подгруппа. Множество Q называется компонентой в G, если для любого $x \in G^+$ существуют такие $x' \in G^+$ и $x'' \in (Q^+)^*$, для которых $x = x' \cdot x''$ (через $(G^+)^*$ обозначается множество всех $y \in G^+$, для которых $\inf(x, y) = e$ при любом $x \in Q^+$). В работе [119] Кристеску изучал компоненты направленной группы, а в работе [120]—компоненты линейно упорядоченной группы.

Шик [222] указал необходимые и достаточные условия, при которых направленная (более общее: частично упорядоченная) группа была l-группой.

Частично упорядоченная группа G называется γ-простой, если в G не существует отличных от единицы элементов x, y таких, что $x \wedge y = e$. Шик [232] нашел необходимые и достаточные условия, при которых направленная группа изоморфна прямому произведению γ-простых частично упорядоченных групп.

Оберт [79] доказал, что направленная абелева группа изоморфна подгруппе аддитивной группы действительных чисел тогда и только тогда, когда ее S_v-идеалы (по Лоренцену) образуют группу относительно S_v-умножения: $A_v O_v B_v = (AB)_v$ (O_v—операция умножения).

2. o^*-группы. Так называются частично упорядоченные группы, каждый частичный порядок которых может быть расширен до линейного. Подробно результаты по теории o^*-групп изложены в книге Фукса [60]. Приведем лишь некоторые дополнения.

Свободная n-ступенно разрешимая группа с k образующими при $n \geqslant 3$, $k \geqslant 2$ не является o^*-группой (М. И. Каргаполов [22]).

Будем называть подгруппу H группы G строго изолированной, если из $xg_1^{-1}xg_1 \ldots g_n^{-1}xg_n \in H$ следует, что $x, g_1^{-1}xg_1, \ldots$ $\ldots, g_n^{-1}xg_n \in H$. А. И. Кокорин [26] доказал, что факторгруппа G/H o^*-группы G тогда и только тогда является o^*-группой, когда H—инвариантная строго изолированная подгруппа.

Назовем подгруппу H группы G относительно выпуклой, если существует линейный порядок в G, при котором H—выпуклая подгруппа. Подгруппа H—инфраинвариантна, если $\forall g \in G\,[(g^{-1}Hg \subseteq H) \vee (g^{-1}Hg \supseteq H)]$. Инфраинвариантная строго изолированная подгруппа o^*-группы является относительно выпуклой (А. И. Кокорин [27]).

Двухступенно разрешимая o-группа является o^*-группой (А. И. Кокорин [27]). Однако, как указано выше, уже трехступенно разрешимая o-группа не всегда является o^*-группой (М. И. Каргаполов [22]). Двухступенно разрешимая группа со строго изолированной единицей является o^*-группой.

Пример o^*-группы, не являющейся локально нильпотентной, привел Я. Б. Ливчак [41]. А. И. Мальцев [45] доказал, что всякая локально нильпотентная группа, не содержащая элементов конечного порядка, является o^*-группой. Он же показал, что если всякая подгруппа с конечным числом образующих частично упорядоченной группы является o^*-группой, то o^*-группой будет и сама группа. В работе [47] А. И. Мальцевым показано, что для того, чтобы в o^*-группе частичный порядок с полугруппой P положительных элементов был пересечением линейных порядков, необходимо и достаточно, чтобы имело место следующее условие: $P' \cap S(x) \neq \neq \varnothing \Rightarrow x \in P'$ для любого $x \in G$, где $S(x)$—минимальная инвариантная полугруппа, содержащая x и $P' = P \cup \{1\}$.

3. V-группы. Группа называется V-группой (соответственно V^*-группой), если каждый линейный (соответственно частичный) порядок любой ее подгруппы можно продолжить до линейного порядка всей группы. Группа называется VN-группой (соответственно VA-группой), если каждый линейный порядок любой (соответственно любой абелевой) ее инвариантной подгруппы можно продолжить до линейного порядка всей группы.

А. А. Терехов [58] доказал, что нильпотентная V-группа обязательно абелева, а локально разрешимая—разрешимая длины 2. Им же [59] найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы локально разрешимая группа была V-группой. Затем этот результат был обобщен М. И. Каргаполовым [20], показавшим, что произвольная группа G без кручения тогда и только тогда является V-группой, когда в G существует такой абелев нормальный делитель A, что факторгруппа G/A—абелева и для $a \in A$, $b \in G \setminus A$ элемент $b^{-1}ab$ равен a^{α} при некотором положительном рациональном числе $\alpha \neq 1$. Таким образом оказалось, что всякая V-группа является двухступенно разрешимой. Как следствие основной теоремы о строении V-группы получается, что если V-группа обладает центральной системой с факторами без кручения, то она абелева.

А. И. Кокорин [28] показал, что разрешимая VN-группа является V^*-группой. Если класс V-групп, VN-групп и VAN-групп обозначить соответственно (V), (VN) и (VA), то справедливы следующие включения: $(V) \subset (VN) \subset (VA)$. Прямое произведение V-групп является o^*-группой. Если всякая подгруппа с конечным числом образующих группы G является VN-группой, то группа G является VN-группой. Нильпотентная VA-группа является абелевой. Нильпотентный нормальный делитель VN-группы абелев.

А. И. Кокорин и В. М. Копытов [30] доказали, что классы разрешимых V^*-групп, V-групп и VA-групп совпадают и группы такого класса являются o^*-группами. Группа G тогда и только тогда принадлежит этим совпадающим классам, когда она удовлетворяет следующим условиям: 1) G содержит абелев нормальный делитель A без кручения; 2) для любого элемента $g \neq A$ существуют такие различные целые числа m, n одного знака, что соотношение $g^{-1}a^{m}g = a^{n}$ выполняется для всех $a \in A$. Свободная группа является VA-группой, но не V-группой. Приведен пример двухступенно разрешимой ненильпотентной V-группы, не являющейся VA-группой.

Всякую V-группу можно вложить в полную V-группу (В. М. Копытов [35]).

4. Разрешимые и нильпотентные группы. А. И. Мальцев [46] доказал следующие локальные теоремы: Если всякая подгруппа H с конечным числом образующих частично упорядоченной группы G обладает центральной (разрешимой) системой выпуклых подгрупп (нормальных делителей) в H, то центральной (разрешимой) системой, состоящей из выпуклых подгрупп (нормальных делителей), обладает и группа G. Установлена также справедливость аналогичных локальных теорем для существования центральных (соответственно разрешимых) систем, все факторы которых не имеют кручения. Им же [47] показано, что утверждение А. А. Виноградова [6] об условиях вложимости частично упорядоченной нильпотентной группы в кардинальное произведение линейно упорядоченных групп, вообще говоря, не является верным, а остается верным для метабелевых групп.

А. А. Виноградов [8] обобщил результаты Шика [225] для абелевых частично упорядоченных групп на метабелевы частично упорядоченные группы.

Полугрупу σ группы G назовем изолированной, если для любого элемента $g \in G$ и любого натурального числа n из того, что $g^n \in \sigma$, следует $g \in \sigma$. К. М. Кутыев [37] установил, что если локально нильпотентная частично упорядоченная группа G с изолированной полугруппой положительных элементов ПС-изоморфна группе G^*, то группа G^* локально нильпотентна и может быть частично упорядочена с помощью изолированной полугруппы положительных элементов.

5. Некоторые другие классы частично упорядоченных групп. Назовем ω-рядом частично упорядоченной группы G такую счетную последовательность элементов $g_1 < g_2 < \ldots$, что для любого элемента $g \in G$ найдется такое натуральное число n, что $g < g_n$. Частично упорядоченная группа G называется ω-частично упорядоченной, если она имеет ω-ряд. ω-частично упорядоченные группы исследовались К. С. Сибирским и А. М. Стахи [53]. ω-частично упорядоченная группа является направленной.

Частично упорядоченные группы без собственных выпуклых подгрупп исследовали Митиура [201], Е. Габович [9], А. А. Виноградов [5], К. С. Сибирский и А. М. Стахи [53] и др. Нетривиально частично упорядоченная группа без собственных выпуклых подгрупп, удовлетворяющая условию полузамкнутости (из $x^n \geqslant e$ следует $x \geqslant e$), изоморфна подгруппе аддитивной группы действительных чисел [201]. Позднее выяснено [9], что последнее заключение имеет место для коммутативных частично упорядоченных групп без условия полузамкнутости. Установлено также [53], что частично упорядоченная группа без нетривиальных выпуклых подгрупп является ω-частично упорядоченной, а следовательно, направленной.

Пусть G — частично упорядоченная группа. $M(x, y) = \{z \mid z \in G,\ z \geqslant x,\ z \geqslant y\}$ и $N(x, y)$ — множество всех минимальных элементов частично упорядоченного множества $M(x, y)$. Группа G называется J-группой, если $N(x, y) \neq \varnothing$ для каждых двух элементов $x, y \in G$. J-группы изучал Вайда [250]. Если для каждой пары элементов $x, y \in G$ имеем $M(x, y) \neq \varnothing$ и для каждого $z \in M(x, y)$ существует элемент $z_1 \in N(x, y)$ такой, что $z_1 \leqslant z$, то группа G называется мультиструктурно упорядоченной. Вайда поставил вопрос: существуют ли J-группы, которые не являются мультиструктурно упорядоченными? Якубик [172] дал положительный ответ на этот вопрос, показав, что каждая l-группа может быть включена в частично упорядоченную J-группу, не являющуюся мультиструктурной.

Частично упорядоченную группу действительных функций, определенных на произвольном множестве, изучали Крулль [180] и Жаффар [163].

Митиура [200] рассматривал сильно архимедову группу. Так называется частично упорядоченная группа G, если для каждого $a \neq 0$ в G и каждого $x \in G$ имеем $na > x$ для некоторого целого числа n.

Пусть G — частично упорядоченная группа. Если $a, b \in G$ имеют верхнюю и нижнюю грани, то обозначим $a \sim b$. Пусть $a \sim b$. Пересечение всех интервалов, содержащих a и b, назовем D-интервалом и обозначим его $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$. Группа G называется D-дистрибутивной, если из того, что $x \sim a$, $y \sim a$ и $\langle x, a \rangle = \langle y, a \rangle$, следует $x = y$. D-дистрибутивные группы изучал Берджесс [95]. Он показал, в частности, что каждая частично упорядоченная архимедова группа является D-дистрибутивной.

Обозначим $x \| y$, если элементы x, y абелевой частично упорядоченной группы G не являются сравнимыми в заданном порядке. Назовем порядок в G устойчивым, если отношение $\|$ является транзитивным. Определим в группе G, обладающей устойчивым порядком, топологию, полагая, что окрестности нуля состоят из таких $t \in G$, что $-x < t < x$, где $x > 0$. Относительно такой топологии группа G становится топологической группой. Топологические абелевы группы с указанной топологией изучал Лави [185]. Топологические частично упорядоченные абелевы группы изучал также Бауэр [83].

Архимедовские частично упорядоченные Ω-группы рассматривал Е. Габович [10]. Изучению Ω-групп посвящена работа [56] Д. М. Смирнова.

6. Вложение частично упорядоченных групп. Назовем частично упорядоченную группу архимедовой, если для $x > 0$ и каждого y существует такое целое число n, что $nx \geqslant y$; она называется парaархимедовой, если для $x \nleqslant 0$ и y существует n такое, что $nx \nless y$. Жаффар [154], [155] показал, что нетривиально упорядоченная архимедова группа, в которой $n > 0$ и $nx \geqslant 0$ влечет $x \geqslant 0$, представляется как группа вещественных функций тогда и только тогда, когда она парaархимедова. Указаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы частично упорядоченная группа была изоморфна подгруппе аддитивной группы действительных чисел.

Жаффар [156] исследовал вопрос о вложении данной частично упорядоченной абелевой группы в структурно упорядоченную группу. Им показано, что для такого вложения необходимо и достаточно, чтобы в данной группе выполнялось условие полузамкнутости (из $nx \geqslant 0$ следует $x \geqslant 0$).

Частично упорядоченная абелева группа G называется частично упорядоченным расширением частично упорядоченной группы Q по частично упорядоченной группе H, если G является расщирением группы Q по H в смысле общей теории групп, частичное упорядочение в G индуцирует на H заданное в ней частичное упорядочение, причем H является выпуклой подгруппой группы G, и частичное упорядочение, определенное естественным образом на факторгруппе G/H, совпадает с заданным частичным упорядочением на Q. Группу G можно определить как множество $H \times Q$ с групповой операцией $(a, x) + (b, y) = (a + b + f(x, y), x + y)$, где f — некоторое отображение множества $Q \times Q$ в множество H. Частично упорядоченное расширение G называется лексикографическим, если $(a, x) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $x > 0$ или $x = 0$ и $a \geqslant 0$. Проблеме построения частично упорядоченного расширения частично упорядоченной абелевой группы посвящена работа [157] Жаффара. В частности, выяснено, что лексикографическое расширение G частично упорядоченной группы Q по частично упорядоченной группе H тогда и только тогда является l-группой, когда имеет место один из следующих двух случаев: 1) H — l-группа, а Q — линейно упорядоченная группа, 2) $H = \{0\}$, а Q — l-группа. Вопросу о вложении частично упорядоченной группы в l-группу посвящена также работа Жаффара [161]. В статье [160] доказаны следующие теоремы: Пусть G — частично упорядоченное расширение частично упорядоченной группы H с помощью частично упорядоченной группы Q. Чтобы группа G была направленной необходимо и достаточно, чтобы группа Q была направленной. Частично упорядоченное расширение G является линейно упорядоченным в том случае (и только в том), когда оно лексикографическое и группы H и Q линейно упорядочены.

Теллер [242] установил необходимые и достаточные условия, при которых частично упорядоченное расширение G частично упорядоченной абелевой группы Q по частично упорядоченной абелевой группе H является l-расширением, т. е., когда G будет l-группой. Им же исследованы l-расширения абелевой l-группы Q с конечным базисом. Причем элемент g в l-группе Q называется базисным, если $0<y$ и множество $\{x \in Q \mid x<x\leqslant g\}$ является линейно упорядоченным. Подмножество S из Q назовем базисным, если оно является максимальным множеством дизъюнктных элементов и каждый элемент $g \in S$ является базисным. Аналог шрейеровской проблемы расширения для частично упорядоченных групп изучался Фуксом [131]. Построенную им теорию расширений применил Лонстра [188] к случаю, когда расширяемая и расширяющиеся группы изоморфны линейно упорядоченной аддитивной группе целых чисел.

Якубик [72] и Вейнберг [256] указали, каким образом частично упорядоченную абелеву группу без кручения можно вложить в полную (уравнение $nx=a$ разрешимо) частично упорядоченную абелеву группу.

Абелеву частично упорядоченную группу G с полугруппой строго положительных элементов R будем обозначать через (G, R). Частичное упорядочение L (соответственно расширение L частичного упорядочения R) называется квазилинейным, если $L \cup -L \supset G_\infty$, где G_∞ есть множество всех элементов бесконечного порядка группы G. Через $(\widetilde{G, R})$ обозначим множество всех аддитивных и изотонных функционалов, заданных на частично упорядоченной группе (G, R), т. е. множество всех гомоморфных и изотонных отображений частично упорядоченной группы (G, R) в линейно упорядоченную аддитивную группу действительных чисел. Шик [226] указал две конструкции квазилинейных расширений частичного упорядочения R группы G с помощью аддитивных и изотонных функционалов на (G, R). Вопросам, связанным с продолжением функционалов, посвящена статья [233].

Коэн и Гоффман [105] ввели понятие системы окрестностей нуля в недискретной линейно упорядоченной абелевой группе, относительно которой группа становится топологической. Пользуясь определением сходимости счетной последовательности, Эверетт [124[получил расширение абелевой l-группы до такой, в которой каждая фундаментальная последовательность сходится. При этом применен метод, аналогичный канторовскому методу получения действительных чисел, трансфинитные последовательности не использовались. Там же установлено взаимоотношение между канторовским и дедекиндовым расширениями абелевой l-группы. Эверетт и Улам [125] распространили некоторые из результатов Эверетта относительно счетных сходящихся последовательностей на некоммутативные l-группы. Обобщающей явилась статья [81] Банашевского. В ней рассмотрены произвольные частично упорядоченные группы и топологические понятия используются в форме, уместной современному состоянию теоретико-множественной топологии. Подобно тому, как действительные числа могут быть получены из рациональных чисел двумя методами (с помощью сечений Дедекинда и топологического метода Кантора), исследованы соотношения между дедекиндовыми и топологическими пополнениями частично упорядоченных групп.

Фань Цюй [126] характеризовал множество всех непрерывных вещественных функций, определенных на компактном пространстве как частично упорядоченную абелеву группу. Иную характеристику привел Клиффорд [104]. Флейшер [128] решил ту же проблему, но с применением структурных понятий, отчего решение получается короче и проще, вместе с тем достигается некоторое обобщение результатов Фань-Цюя.

7. Некоторые свойства частично упорядоченных групп. Лави [186] выяснил, какой должна быть инвариантная подгруппа H частично упорядоченной группы G, чтобы фактор-группа G/H при естественном отношении порядка была линейно упорядоченной. Для этой цели определяется подгруппа R_0 группы G, порожденная теми элементами $x\in G$, которые не сравнимы с e, и рассматривается наименьшая выпуклая подгруппа K_0, содержащая подгруппу R_0. Свойством, указанным выше для подгруппы H, обладают те и только те подгруппы группы G, которые являются элементами множества инвариантных выпуклых подгрупп группы G, содержащих подгруппу K_0.

Для элементов x, $y\in G^+$ частично упорядоченной группы G полагаем $x\varepsilon y$, если $x\wedge y=e$. Для элементов x, $y\in G$ пусть $x\delta y$ означает, что существуют такие элементы $a, b\in G^+$, для которых $a\geqslant x\geqslant a^{-1}$, $b\geqslant y\geqslant b^{-1}$, $a\wedge b=e$. Бинарные отношения ε, δ называются соответственно ε-дизъюнктностью, δ-дизъюнктностью. Пусть A—непустое подмножество множества G. Через A^ε обозначим совокупность $\{x\in G \mid x\varepsilon A\}$. Аналогично определяется A^δ. Множество A называется ε-компонентой (δ-компонентой), если $A=A^{\varepsilon\varepsilon}$ ($A=A^{\delta\delta}$). Подмножество $\mathfrak{A}$ частично упорядоченной группы G называется γ-подгруппой, если существует такая ε-компонента A в группе G, что $\mathfrak{A}=AA^{-1}$. Шик [231] исследовал γ-подгруппы и ε(δ)-компоненты частично упорядоченной группы. Он, в частности, показал, что множество всех γ-подгрупп частично упорядоченной группы G образует полную булеву структуру (относительно теоретико-множественного включения).

Будем говорить, что частично упорядоченное множество Z есть кардинальное произведение своих подмножеств X и Y, если каждый элемент $z \in Z$ однозначно представим в виде $z = a \vee b$, $a \in X$, $b \in Y$ и для $z_1 = a_1 \vee b_1$, $z_2 = a_2 \vee b_2$, $a_i \in X$, $b_i \in Y$ $(i = 1, 2)$, отношение $z_1 \geqslant z_2$ имеет место тогда и только тогда, когда $a_1 \geqslant a_2$, $b_1 \geqslant b_2$; кроме того, предполагается, что для любой пары элементов a, b, где $a \in X$, $b \in Y$ во множестве Z существует элемент z такой, что $z = a \vee b$. Подмножества X и Y называются кардинальными множителями множества Z. Как и выше, через G^+ обозначим полугруппу положительных элементов частично упорядоченной группы G. Е. П. Шимбирева [69] доказала, что если X — кардинальный множитель в частично упорядоченном множестве G^+, то X является прямым множителем для частично упорядоченной полугруппы G^+. Тем самым обобщен результат Якубика для l-групп. Якубик показал, что всякая максимальная выпуклая цепь, содержащая e, в l-группе является прямым множителем, а Е. П. Шимбирева привела пример, подтверждающий, что это утверждение не является, вообще, верным для направленной группы.

Решением алгоритмических проблем в частично упорядоченных группах занимался В. И. Френкель [61], [62]. Для частично упорядоченных групп, заданных конечным числом образующих и конечным числом определяющих неравенств (определяющих соотношений) решалась проблема тождества слов и проблема сопряженности.

§ 4. Обобщения частично упорядоченных групп

1. Частично упорядоченные с сохранением идеалов группы. Будем рассматривать частично упорядоченное множество P. Для его непустого подмножества F обозначим через F^* (соответственно F_*) множество всех тех $x \in P$, для которых $x \geqslant f$ (соответственно $x \leqslant f$) для всех $f \in F$. Непустое подмножество $I \subset P$ назовем идеалом (соответственно двойственным идеалом), если для каждого конечного непустого подмножества $F \subset I$ подмножество F^* (соответственно F_*) непусто и $(F^*)_* \subset I$ (соответственно $(F_*)^* \subset I$). Группу G назовем частично упорядоченной с сохранением идеалов, если G является частично упорядоченным множеством и множество $x.I.y$ есть идеал или двойственный идеал для любого идеала или двойственного идеала $I \subset G$. Андрус и Батсон [78] показали, что всякая частично упорядоченная с сохранением идеалов группа является расширением частично упорядоченной группы посредством такой частично упорядоченной группы с сохранением идеалов, длина каждой цепи в которой не более двух. Таким образом, класс частично упорядоченных с сохранением идеалов групп содержит в себе класс всех частично упорядоченных групп. Элементы $a, b \in P$ назовем связанными, если существует такая конечная последовательность элементов $a = x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ из P, что для каждой пары этих элементов x_i, x_{i+1} имеем одно из трех соотношений $x_i \lesseqgtr x_{i+1}$. Группа G называется связанной, если каждая пара ее элементов является связанной. В той же статье [78] найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы группу можно было превратить в связанную частично упорядоченную с сохранением идеалов группу.

2. Односторонне частично упорядоченные группы. Если в определении частично упорядоченной группы ослабить закон монотонности и выразить его в виде: «из $a \leqslant b$ следует $ac \leqslant bc$, для каждого элемента c группы», то мы получим определение правой частично упорядоченной группы. Аналогично определяется левая частично упорядоченная группа. Впервые правоупорядоченные группы исследовала М. И. Зайцева [17]. Она установила достаточный критерий правого линейного упорядочения группы. Ею показано, в частности, что всякая группа типа RN с факторами без кручения может быть линейно правоупорядочена; приведен пример разрешимой линейно правоупорядоченной группы, линейно неупорядочиваемой в обычном смысле. С помощью своей теории М. И. Зайцева нашла порядковый тип счетного однородного множества, т. е. линейно упорядоченного множества с транзитивной группой автоморфизмов.

Назовем подмножество R группы G стабильным, если оно замкнуто относительно группового умножения. Через $H^{\#}$ обозначим наименьшее стабильное подмножество из G, содержащее подмножество H. Обозначим $[H]:\{T\cdot:$ существует $K \subseteq H$ такое, что $T = K \cup \overline{H - K}\}$, где $H - K$ означает теоретико-множественную разность, а $\overline{H - K}$ есть множество всех элементов группы G, обратных элементам множества $H - K$. Обозначим $H^* = \{a : a \in T^{\#}$ для каждого $T \in [H]\}$. Подмножество H группы G названо подмножеством конечного порядка, если H^* содержит единицу e группы G. Чиампа [103] установил необходимые и достаточные условия односторонней линейной упорядочиваемости групп, выраженных в терминах стабильности и порядка множеств, а также указал условия, при которых одностороннюю частичную упорядоченность можно продолжить до односторонней линейной упорядоченности.

Односторонние частично упорядоченные группы изучал Конрад [111]. Им установлены необходимые и достаточные условия для одностороннего частичного упорядочения. Указан достаточный признак продолжения односторонней частичной упорядоченности до линейной. Перенесены некоторые теоремы об упорядоченных группах на односторонне упорядоченные группы.

Необходимые и достаточные условия одностороннего линейного упорядочения группы указал Тулли [246].

Д. М. Смирнов исследовал группу автоморфизмов групповых колец правоупорядочиваемых групп.

3. Полуоднородно частично упорядоченные группы. Монотонный закон в определении частично упорядоченной группы может быть ослаблен и в другом отношении. Вместо него будем предполагать, что каждый элемент x группы обладает одним и только одним из свойств: (А) из $a < b$ следует $xa < xb$, $ax < bx$; (Б) из $a < b$ следует $xa > xb$, $ax > bx$. Частично упорядоченные группы с таким ослабленным законом монотонности исследовались П. Г. Конторовичем и А. И. Кокориным [32] и были названы ими полуоднородно частично упорядоченными (соответственно структурно упорядоченными, линейно упорядоченными) группами. Они установили необходимые и достаточные условия для того, чтобы группа G была полуоднородно частично упорядоченной (соответственно полуоднородно структурно упорядоченной, полуоднородно линейно упорядоченной). Выяснено строение полуоднородно структурно упорядоченной группы с одним образующим, а также рассмотрены некоторые свойства таких групп с конечным числом образующих.

4. Почти частично упорядоченные группы. Снова ослабим монотонный закон, теперь в следующем направлении: если $a < b$, то $ga < gb$ для «большинства» элементов g в группе G и $ah < bh$ для «большинства» элементов h в группе. При этом фраза «для «большинства» элементов в группе G» должна пониматься так, что множество S с «большинством» элементов из G удовлетворяет следующим условиям: 1) если S_1 и S_2 содержат «большинство» элементов из G, то $S_1 \cap S_2$ не пусто; 2) если S содержит «большинство» элементов из G, то такими же являются множества gS и Sg для каждого $g \in G$ и 3) если S_1 содержит «большинство» элементов из G и $S_1 \subset S_2$, то S_2 содержит «большинство» элементов из G. Почти частично упорядоченные группы исследовались Бриттоном и Шеппердом [94].

5. Квазичастично упорядоченные группы. К обобщению частично упорядоченных групп мы придем путем исключения закона антисимметричности из списка их определяющих постулатов. Такие обобщенные группы называются квазичастично упорядоченными, их также называют преупорядоченными (см., например, Бурбаки [3]). Их изучал Лоренцен [191], выяснивший условия вложения в l-группы, и Чо [101], перенесший некоторые свойства частично упорядоченных групп на квазичастично упорядоченные группы.

6. Обобщенно частично упорядоченные группы. Пусть G—некоммутативная группа, а G^+—непустая ее полугруппа. Отметим следующие аксиомы: 1) $e \in G^+$; 2) $(x \in G^+) \Rightarrow (x^{-1} \in G^+)$; 3) $(x \neq e) \Rightarrow (x \in G^+$ или $x^{-1} \in G^+)$; 4) $x^{-1}G^+x \subset G^+$ для каждого $x \in G$. Рассмотрим группу $G(1, 2)$, удовлетворяющую аксиомам 1) и 2). В ней введем два частичных порядка: I) $(x^{-1}y \in G^+) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x <_s y)$ и II) $(yx^{-1} \in G^+) \Leftrightarrow (x <_d y)$. Положим $(a <_s b, a <_d b) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (a < b)$. Если для $y > e$ и всякого целого числа n имеем $x^n <_s y$ или $x^n <_d y$, то элемент x назовем актуально бесконечно малым слева (соответственно, справа) относительно y, в обозначениях $x \ll_s y, x \ll_d y$. Аксиома 5): совокупность несравнимых элементов группы G [1, 2] есть собственная инвариантная подгруппа; 6) $(\varepsilon \ll_s a) \Leftrightarrow (\varepsilon \ll_d a)$. Бузулини [97] выяснил простейшие свойства групп $G(1, 2)$, $G(1, 2, 3)$, $G(1, 2, 5)$ и $G(1, 2, 6)$. Отмечено, что в геометрических приложениях встречаются группы $G(1, 2, 5)$.

7. Промежуточные группы. Понятие группы с таким названием ввел Шепперд [220]. Промежуточной группой называется группа, в которой определено тернарное отношение (a, b, c), удовлетворяющее аксиомам: 1) для любых a, b, c либо (a, b, c), либо (b, c, a), либо (c, a, b); 2) (a, b, c) и (a, c, b) выполняются одновременно тогда и только тогда, когда $b = c$; 3) (a, b, c) влечет (c, b, a); 4) (a, b, c) и (a, c, d) влекут (b, c, d); 5) (a, b, c) влечет (gah, gbh, gch) при любых g, h из группы. Согласно этому определению промежуточная группа является обобщением линейно упорядоченной группы: отношение «между» индуцируется линейной упорядоченностью, если положить (a, b, c) тогда и только тогда, если $a \leqslant b \leqslant c$ или $c \leqslant b \leqslant a$. Промежуточные группы могут быть как конечными, так и бесконечными. Первый класс исчерпывается группами четвертого порядка. Найдены условия, при которых бесконечная группа может быть превращена в промежуточную, установлена связь между линейно упорядоченными и промежуточными группами.

Греве [140] изучал частично промежуточные группы. Множество $G = \{a, b, c, \ldots\}$ называется частично промежуточным, если на нем определено тернарное отношение (a, b, c), удовлетворяющее следующим аксиомам: 1) $(a, b, c) \Rightarrow (c, b, a)$; 2) $(a, b, c) \wedge (a, c, b) \Leftrightarrow b = c$; 3) $(a, b, c) \wedge (a, d, b) \Rightarrow (d, b, c)$; 4) $(a, b, c) \wedge (b, c, d) \wedge b \neq c \Rightarrow (a, b, d)$. Символ $\wedge$ обозначает логическую операцию конъюнкции. Частично промежуточной группой G называется частично промежуточное множество G относительно тернарного отношения (a, b, c), являющееся группой относительно сложения и такое, что: α) $(-a, 0, a)$ для всех $a \in G$; β) (a, b, c) влечет $(x + a + y, x + b + y, x + c + y)$ для всех $x, y \in G$; γ) $(-a, x, a)$ влечет $(-a, x, 0)$ или $(0, x, a)$. Отметим, что частично промежуточные векторные пространства изучал Беренд [84]

Близким к понятию промежуточной группы находится понятие циклической группы, введенное Регером [214]. Циклически упорядоченные группы рассматривал Сверчковский [240]. В книге Фукса [60] подробно описаны свойства таких групп.

8. **Разделительные группы.** Понятие разделительной группы ввел также Шепперд [221]. Так называется группа, в которой определено кватернарное отношение (a, b, c, d), удовлетворяющее аксиомам: 1) для любых a, b, c, d либо (a, b, c, d), либо (a, c, b, d), либо (a, b, d, c); 2) (a, b, c, d) и (a, b, d, c) выполняются одновременно тогда и только тогда, когда $a = b$ или $c = d$; 3) (a, b, c, d) влечет (d, c, b, a); 4) (a, b, c, d) влечет (b, c, d, a); 5) (a, b, c, d), (a, e, b, c) и $b \neq c$ влекут (a, e, b, d); 6) (a, b, c, d) влечет (gah, gbh, gch, gdh) для любых g, h из группы. Отношение (a, b, c, d) получается из линейной упорядоченности, если положить (a, b, c, d) тогда и только тогда, когда имеет место одно из отношений или отношений, отличающихся от написанных, циклической перестановкой элементов $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ или $d \leqslant c \leqslant b \leqslant a$. Разделительные группы могут иметь элементы конечного порядка. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых группа может быть превращена в разделительную, установлена связь между линейно упорядоченными и разделительными группами.

9. **Локально частично упорядоченные группы.** Так называются те группы, которые удовлетворяют всем постулатам, определяющим частично упорядоченную группу, кроме постулата транзитивности, который заменен следующим ослабленным постулатом: если $a \leqslant b$, $b \leqslant c$, $c \leqslant d$ и $a \leqslant d$, то $a \leqslant c$. Локально частично упорядоченные группы изучал А. Г. Пинскер [49], он подметил их значение в теории K-пространств.

10. **Абелевы Г-группы.** Пусть Г—некоторое частично упорядоченное множество. Коммутативная операторная R-группа G называется Г-группой, если каждому элементу из $\gamma \in \Gamma$ соответствует пара допустимых подгрупп G_γ, G^γ группы G, удовлетворяющих условиям: 1) $G_\gamma \subseteq G^\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$; 2) из $\alpha < \beta$ следует $G^\alpha \subseteq G_\beta$; 3) для каждого элемента $a \in G$ существует по крайней мере одно γ такое, что $a \in G^\gamma$, $a \notin G_\gamma$; 4) если $a \notin G^\gamma$, то существует $\beta > \gamma$, для которого $a \in G^\beta$ и $a \notin G_\beta$. Всякую абелеву частично упорядоченную группу со свойством: из $na > 0$ следует $a > 0$, можно рассматривать как Г-группу. Теория Г-групп построена Конрадом [106]. В случае, когда Г—линейно упорядоченное множество, исследования Г-групп приведены в его же работе [108].

§ 5. Упорядоченные кольца и алгебры

1. **Частично упорядоченные кольца.** Если для элемента a кольца A существуют элементы $a_1, \ldots, a_n \in A$ такие, что элемент a равен произведению $2n$ элементов $a_1, \ldots, a_n$, $a_1, \ldots, a_n$, взятых в некотором порядке, то будем писать $a = a(a_1, \ldots, a_n)$. Идеал M кольца A назовем F-идеалом, если отношение

$$a(a_1, a_2, \ldots, a_m) + b(b_1, b_2, \ldots, b_n) + \ldots$$
$$\ldots + d(d_1, d_2, \ldots, d_r) \in M$$

влечет

$$a_1 a_2 \ldots a_m \in M, \ b_1 b_2 \ldots b_n \in M, \ \ldots, \ d_1 d_2 \ldots d_r \in M.$$

Если идеал $\{0\}$ является F-идеалом, то кольцо A назовем F-кольцом. Такие кольца изучал Тьеррен [244]; он, в частности, показал, что частично упорядоченное кольцо $A = \{0\}$ тогда и только тогда изоморфно подпрямой сумме линейно упорядоченных колец без делителей нуля, когда A является F-кольцом.

Теории представления частично упорядоченных колец одного класса посвящена работа Хейса [144].

Об алгебраическом замыкании некоторых полей со специфическим определением на них частичного порядка проведено исследование в статье [237] Стродта.

Некоторое отношение к теории упорядоченных тел имеет работа Шерка [219].

Метод, с помощью которого порядок на целых числах распространяется на рациональные числа, использован для расширения порядка кольца на кольцо частных. Пусть S—

кольцо, содержащее кольцо R. Предположим, что для каждого $\alpha \in S \setminus R$ существуют такие элементы $a, b \in R$, что $a (b)$ не является левым (правым) делителем нуля в S и $a\alpha, \alpha b \in R$. Такое кольцо S называется кольцом частных кольца R. Фукс [132] доказал, что всякий линейный порядок ассоциативного кольца R можно единственным образом продолжить до линейного порядка кольца S частных кольца R.

2. Структурно упорядоченные кольца. f-кольца. Структурно упорядоченное кольцо называется f-кольцом, если из $a \wedge b = 0$ и $c \geqslant 0$ следует $ca \wedge b = 0 = ac \wedge b$. Хейс [144] доказал, что частично упорядоченное кольцо R без нильпотентных элементов является f-кольцом тогда и только тогда, когда для каждого $a \in R$ найдутся $b, c \in R$ такие, что $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $a = b - c$ и $bc = cb = 0$.

Джонсон [175] и Кист [177] доказали теорему о вложении архимедовых f-колец без ненулевых нильпотентных элементов в кольца вещественных непрерывных функций, определенных на топологических пространствах.

Брейнерд [93] исследовал проблему о вложении f-кольца R без ненулевых левых и правых аннуляторов в особое f-кольцо, состоящее из эндоморфизмов аддитивной группы кольца R.

Андерсон [77] указал необходимые и достаточные условия, при которых f-кольцо может быть изоморфно подпрямой сумме конечного числа линейно упорядоченных колец.

Назовем f-кольцо унитабельным, если оно включаемо в f-кольцо с мультипликативной единицей. Хенриксен и Исбелл [147] показали, что класс унитабельных f-колец является примитивным классом. Каждое линейно упорядоченное кольцо разложимо в лексикографическую прямую сумму двух слагаемых, из которых одно содержит все идемпотенты кольца, а другое является нулевым кольцом. Они положительно решили проблему 107 Биркгофа [1].

Структурно упорядоченное кольцо называется d-кольцом, если $a(x \vee y) = ax \vee ay$ и $(x \vee y) a = xa \vee ya$ для всякого $a \geqslant 0$ и любых x, y. d-кольца изучал Кудлачек [183]. Он, в частности, показал, что всякое f-кольцо является d-кольцом, но не обратно.

Брейнерд [92] привел характеристику кольца $C(X)$ непрерывных вещественных функций на вполне регулярных пространствах X как архимедовой структурно упорядоченной алгебры над полем действительных чисел.

3. Теория нормирования. Линейно упорядоченные поля в связи с нормированием рассмотрены Джеминьяни [137]. Ион [153] доказал, что всякая линейно упорядоченная коммутативная группа является группой нормирования для некоторого тела. Структурно упорядоченные группы использованы для полунормирования тел.

4. Промежуточные и разделительные кольца. А. И. Черемисин [65], [66] ввел понятия промежуточных и разделительных колец и описал их структуру. Кольцо R названо промежуточным, если его аддитивная группа является промежуточной относительно тернарного отношения (a, b, c) (см. § 4, № 7) и для любых a, b, c, $x \in R$ из (a, b, c) следует (ax, bx, cx) и (xa, xb, xc). Указана полная таблица всех конечных промежуточных колец и показано, что класс всех промежуточных колец в основном исчерпывается такими кольцами, которые являются линейно упорядоченными и в которых отношение (a, b, c) промежуточности определяется через отношение упорядочения.

Кольцо R названо разделительным, если его аддитивная группа является разделительной (см. § 4, № 8) относительно отношения (a, b, c, d) и для любых $a, b, c, d, x \in R$ из (a, b, c, d) следует (ax, bx, cx, dx) и (xa, xb, xc, xd). Указаны случаи, в которых бесконечные кольца могут быть превращены в разделительные, намечена связь между разделительными кольцами и выпуклыми максимальными линейно упорядоченными идеалами этих колец.

5. Упорядоченные полукольца. Назовем линейно упорядоченным полукольцом множество P с двумя алгебраическими операциями (сложение и умножение), относительно каждой из которых оно является полугруппой; эти операции связаны между собой (двусторонним) дистрибутивным законом; кроме того, в множестве P определено отношение порядка, при котором оно является линейно упорядоченным множеством, обладающим свойствами: 1) из $a < b$ следует $a + c < b + c$, $c + a < c + b$ для всех $c \in P$; 2) из $a < b$ следует $ac < bc$, $ca < cb$ для положительных $c \in P$ и $ac > bc$, $ca > cb$ для отрицательных $c \in P$. При этом положительным (отрицательным) называется такой элемент $c \in P$, что $c < c + c$ ($c + c < c$). Луговский [192] изучал линейно упорядоченные полукольца, удовлетворяющие следующей аксиоме: Для $a \in P$ и $b \in P$ с $a < b$ существует $x \in P$ с $a + x = b$. Рассмотрена проблема о пополнении таких полуколец.

Вопросу вложения частично упорядоченных полуколец в частично упорядоченные кольца посвящена работа [87] Блейхера и Бонэ.

Назовем полутелом такое полукольцо, ненулевые элементы которого образуют группу относительно умножения. Вейнерт [257] показал, что если хотя бы один элемент полутела идемпотентен (т. е. $a+a=a$), то это имеет место для всех его элементов; любое полутело без нулевого элемента с коммутативным и идемпотентным сложением может быть рассмотрено как структурно упорядоченная группа и обратно.

Архимедовы полукольца изучал Эндлер [122].

6. Линейно упорядоченные модули над линейно упорядоченными кольцами. Пусть A — линейно упорядоченное кольцо, E — унитарный левый модуль над A. Будем называть модуль E линейно упорядоченным, если E — линейно упорядоченная группа и из того, что $x \geqslant 0$, $x \in E$, $\alpha \geqslant 0$, $\alpha \in A$, следует $\alpha x \geqslant 0$. Подмножество P называется конусом, если: 1) $0 \in P$; 2) $P+P \subseteq P$; 3) $\alpha P \subseteq P$ при всех $\alpha \geqslant 0$. Блейхер и Шнейдер [88] посвятили свою работу проблеме разложения конусов в модуле E.

7. Структурно упорядоченные алгебры. Назовем векторное пространство V с вещественными скалярами частично упорядоченным векторным пространством, если оно является частично упорядоченной группой по сложению и в нем для любого положительного скаляра λ соответствие $x \to \lambda x$ есть автоморфизм. Если частично упорядоченное пространство V есть структура, то оно называется векторной структурой. Если структурно упорядоченное кольцо A является векторной структурой, то оно называется структурно упорядоченной алгеброй. Если f-кольцо B является также векторной структурой, то B называется f-алгеброй. Структурно упорядоченное кольцо A называется архимедовым, если для каждого $a \in A$, отличного от 0, множество $\{na : n = \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ не имеет верхней грани в A. f-алгебра, являющаяся архимедовым кольцом, называется архимедовой f-алгеброй. Φ-алгеброй называется архимедова f-алгебра с единицей 1. Изучению Φ-алгебр посвящены работы Хенриксена и Джонсона [147] и Хенриксена, Исбелла и Джонсона [146].

Линейно упорядоченные нормированные алгебры изучал Урбаник [247].

§ 6. Упорядоченные полугруппы

1. Линейно упорядоченные полугруппы. Если элементы полугруппы S связаны соотношениями $aba=a$, $bab=b$, то они называются регулярно сопряженными. Пусть S — линейно упорядоченная полугруппа. Множество E всех идемпотентов из S, если оно не пусто, является подполугруппой S. Сайто [217] классифицировал подполугруппы полугруппы S, порожденные парами регулярно сопряженных неидемпотентных элементов, а в работе [216] он рассматривал произвольные линейно упорядоченные полугруппы S идемпотентов.

Выяснению закона распределения образующих элементов в линейно упорядоченных полугруппах посвящена работа [2] Б. М. Бредихина.

Донедду [121] указал необходимые и достаточные условия для того, чтобы линейно упорядоченная полугруппа была монотонно изоморфной аддитивной полугруппе положительных действительных чисел.

Монотонные эндоморфизмы линейно упорядоченных полугрупп рассматривал Е. Габович [11]. Им, в частности, найдены все монотонные эндоморфизмы аддитивной полугруппы положительных чисел.

Линейно упорядоченным полугруппам посвящены две статьи Луговского [193, 194]. В них рассматриваются полугруппы S, удовлетворяющие следующей аксиоме: Для $a \in S$, $b \in S$ и $a < b$ существуют $x \in S$, $y \in S$ такие, что $a + x = y + a = b$.

Аналогом кольца частных является понятие полугруппы частных. Пусть S — полугруппа. Элемент $a \in S$ называется сократимым слева (справа), если из $ax = ay$ $(xa = ya)$ следует $x = y$. Предположим, что T — полугруппа, содержащая полугруппу S, такая, что, для каждого $\alpha \in T \setminus S$ существуют в S такие элементы a и b, что $a(b)$ сократим слева (справа) в T и $a\alpha$, $\alpha b \in S$. В этом случае полугруппа T называется полугруппой частных полугруппы S. Фукс [132] показал, что линейный порядок полугруппы S может быть единственным способом продолжен до линейного порядка ее полугруппы частных T.

Коммутативная полугруппа P называется архимедовой, если выполняются следующие условия: 1) из $s + r = t + r$ всегда следует $s = t$ $(r, s, t \in P)$; 2) $r > s$ тогда и только тогда, когда $r = s + t$ для некоторого $t \in P$; 3) для каждой пары $r, s, r \neq s$ следует $r > s$ или $s > r$; 4) для каждой пары r, $s \in P$ существует такое натуральное число n, что $nr > s$. Архимедовы полугруппы изучал Эндлер [122]. Он выяснил условия включения таких полугрупп в полугруппы, названные им эвдоксовыми. Эвдоксова полугруппа в общих чертах может быть охарактеризована так, что в ней для каждой тройки элементов существует «четвертый пропорциональный элемент». В работе [182] Крулль охарактеризовал эвдоксову полугруппу как архимедову полугруппу, для каждой пары элементов a, b которой существует зеркальное отображение P такое, что $Pa = b$. Причем под зеркальным отображением P архимедовой полугруппы понимается такое отображение, которое удовлетворяет следующим условиям: 1) $Pa = n(P(na))$ для каждого натурального числа n; 2) $Pa < Pb$, если $a > b$.

2. Структурно упорядоченные полугруппы. Биркгоф [86] указал на их приложения в алгебраической теории чисел, алгебраической геометрии, теории полупростых алгебр, алгебре бинарных отношений, брауэровской логике и общей топологии.

Обозначим единичный и нулевой элементы l-полугруппы L соответственно e и 0. Элемент $x \in L$ называется целым, если $x \leqslant e$. Множество C всех целых элементов l-полугруппы L образует l-полугруппу. Если все элементы l-полугруппы L целые, то L называется целой l-полугруппой. Пусть $I(a)$ — множество всех элементов $x \in L$, для которых $axa \leqslant a$. Если множество $I(a)$ непусто и в нем имеется наибольший элемент, то этот элемент называется обратимым к элементу a и обозначается a^{-1}. Элемент $a \in L$ называется квазиделителем элемента $b \in L$, если $a^{-1} \leqslant b^{-1}$. Квазиделимость в целых l-полугруппах изучал Козальский [178]. Он указал на применения к теории идеалов, в частности, установлена связь с отношением квазиделимости, введенной Ван-дер-Варденом в теории идеалов. Поставлены некоторые проблемы.

П. Д. Круминг [36] рассматривал структурно упорядоченные полугруппы S, удовлетворяющие условиям: 1) S — полная структура; 2) для каждого элемента a и подмножества A из S $\sup(aA) = a \sup A$, $\inf(aA) = a \inf A$, $\sup(Aa) = (\sup A)a$, $\inf(Aa) = (\inf A)a$. Проведенные им исследования касаются главным образом интервальной топологии в таких полугруппах.

Систему $A = (A, +, \leqslant, -)$ назовем дуально структурно упорядоченной полугруппой с вычитанием, если: 1) $(A, +, \leqslant)$ является коммутативной структурно упорядоченной полугруппой с нулевым элементом 0; 2) для данных $a, b \in A$ существует наименьший элемент x такой, что $b + x \geqslant a$, и этот элемент обозначается $a - b$ (он определяется однозначно); 3) $(a - b) \cup 0 + b \leqslant a \cup b$ и 4) $(a - a) \geqslant 0$. Такие системы определил и изучал их свойства Свами [239]. Дуально структурная упорядоченная полугруппа с вычитанием является общим абстрактным образованием, включающим в себя в качестве частных случаев алгебру Брауэра, абелеву l-группу и булево кольцо. Тем самым частично решена 105-я проблема Биркгофа [1].

3. Частично упорядоченные полугруппы. Подполугруппа A частично упорядоченной полугруппы P называется выпуклой, если из $\alpha \geqslant \gamma \geqslant \beta$, $\alpha, \beta \in A$, $\gamma \in P$ всегда следует $\gamma \in A$. Полугруппа P называется l-полугруппой, если P есть одновременно структура и соотношения $(\alpha \cup \beta)\gamma = \alpha\gamma \cup \beta\gamma$, $\gamma(\alpha \cup \beta) = \gamma\alpha \cup \gamma\beta$, $(\alpha \cap \beta)\gamma = \alpha\gamma \cap \beta\gamma$, $\gamma(\alpha \cap \beta) = \gamma\alpha \cap \gamma\beta$ выполняются для любых $\alpha, \beta, \gamma \in P$. Подполугруппа A l-группы P называется

l-подполугруппой, если A является подструктурой в P и выпукла в P. Я. В. Хион [64] установил, что любая частично упорядоченная полугруппа (l-полугруппа) без собственных выпуклых подполугрупп (l-подполугрупп) состоит только из одного элемента. Всякая частично упорядоченная полугруппа, в которой никакие две различные ее собственные выпуклые подполугруппы не пересекаются, либо имеет не больше двух элементов, либо является тривиально упорядоченной циклической группой простого порядка.

Рассмотрим полугруппу S и множество всех ее отношений частичного порядка обозначим $\Gamma = \Gamma(S)$. Множество Γ частично упорядочим отношением включения: $\sigma \leqslant \rho$, если из $(a, b) \in \sigma$ всегда следует $(a, b) \in \rho$. Для любого частичного порядка $\tau \in \Gamma$ в Γ существует максимальный элемент $\sigma \in \Gamma$ такой, что $\tau \leqslant \sigma$. Характеристике максимальных элементов множества Γ посвящена работа [42] Е. С. Ляпина. В статье [43] Е. С. Ляпин изучал частичные упорядоченности на полугруппах линейных преобразований.

Берджесс и Макфадден [96] изучали вопрос о возможности вложения частично упорядоченной полугруппы в l-полугруппу с сохранением объединений, пересечений, левых и правых частных во всех случаях, когда эти частичные операции определены в первоначальной частично упорядоченной полугруппе.

Будем иметь в виду частично упорядоченную полугруппу S с единственной левой единицей, являющейся максимальным элементом, и, возможно, с нулем 0, являющимся минимальным элементом. Элемент $p \in S$, $0 < p < e$ называется простым, если из $ab \leqslant p$ следует $a \leqslant p$ или $b \leqslant p$. Фукс и Штейнфельд [136] показали, что в S при определенных условиях любой элемент $a \in S$, $0 < a < e$, однозначно записывается в виде $a = p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r}$, где p_i — различные простые элементы.

Стабильная эквивалентность θ на частично упорядоченной полугруппе S с левой единицей называется конгруэнтностью Дюбрей — Жакотен, если все ее классы $\theta(a)$ являются выпуклыми подмножествами S и для любого $a \in S$ из $\theta(a) \leqslant \theta(e)$ следует $a \leqslant e$. Конгруэнтности Дюбрей — Жакотен на полугруппе S рассматривал Фукс [134]. В статье [135] Фуксом исследуется проблема о том, каковы те отношения эквивалентности в частично упорядоченных полугруппах, факторполугруппы по которым являются упорядоченными группами.

Вопросам представления частично квазиупорядоченных полугрупп в виде подполугрупп полугрупп преобразований множества посвящена статья [67] Б. М. Шайна.

П. Г. Конторович и Л. А. Пруткина [33] исследовали строение идеалов полугруппы $G+$, являющейся полугруппой положительных элементов частично упорядоченной группы G без кручения.

4. Упорядоченные группоиды. Блайт [89] рассматривал частично упорядоченные группоиды (группоиды с частными), в которых любые два элемента имеют правое и левое частное.

Леви — Бруль [187] распространил теорему Жордана — Гёлдера на частично упорядоченные группоиды в следующем виде: если в частично упорядоченном группоиде G выполняются следующие условия: 1) $xy \leqslant x$; 2) $xy = x \Leftrightarrow x \leqslant y$; 3) $x (c) y \Rightarrow xz (c) yz$, где $a (c) b$ означает, что $a = b$ или b покрывает a, то существует максимальная цепь конечной длины между двумя элементами $a, b \in G$, причем все максимальные цепи между a и b имеют одну и ту же конечную длину. Указано также соответствие между элементами максимальных цепей между одной и той же парой элементов.

Упорядоченные группоиды изучались в диссертации Блайта [90]. В статье [91] определен l-группоид как такой частично упорядоченный группоид, который является структурой. В множестве $M(G)$ матриц n-й степени с элементами из l-группоида G особым образом определяется отношение частичного порядка, выяснено, когда при этом $M(G)$ будет группоидом с делением и решены некоторые другие вопросы о множестве $M(G)$ при других условиях, наложенных на порядок в группоиде G.

5. Промежуточные полугруппы. Отношение «между» на группах рассматривал Шепперд, на кольцах — А. И. Черемисин. Гилдер [138] ввел отношение «между» на полугруппы. Полугруппу S назовем промежуточной, если на множестве ее элементов определено тернарное отношение «между» (a, b, c) с теми же аксиомами, которыми определена промежуточная группа. Если отношение «между» индуцируется в полугруппе линейным отношением порядка, то полугруппа называется линейной промежуточной полугруппой, а если отношение «между» является циклическим, то и полугруппа называется промежуточно циклической. Найдены все циклические промежуточные полугруппы. Он изучал также линейные промежуточные полугруппы.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Биркгоф Г.**, Теория структур. И. Л., М. 1952
2. **Бредихин Б. М.**, К асимптотическому закону распределения образующих элементов в упорядоченных полугруппах. Тр. 2-й Научн. кон-

ференции матем. кафедр пед. ин-тов Поволжья. Вып. 1. Куйбышев, 1962, 3—6 (РЖМат, 1964, 4А216)
3. **Бурбаки Н.**, Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. «Наука», М., 1965
4. **Ван Ши-цзян**, Представление упорядоченных абелевых групп и колец конечной степени. Шусюэ сюэбао, Acta math sinica, 1955, 5, № 4, 425—432 (РЖМат, 1957, 2075)
5. **Виноградов А. А.**, Частично упорядоченные локально нильпотентные группы. Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1953, 4, 3—18 (РЖМат, 1955, 3076)
6. —, К теории частично упорядоченных нильпотентных групп. Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1954, 5, 61—64 (РЖМат, 1956, 5120)
7. —, Замечания по теории частично упорядоченных групп и полугрупп. Алгебра и логика. Семинар, 1962, 1, № 2, 22—29 (РЖМат, 1964, 4А210)
8. —, Метабелевы частично упорядоченные группы. Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1963, 34, 20—26 (РЖМат, 1964, 11А189)
9. **Габович Е.**, Частично упорядоченные группы, лишенные нетривиальных выпуклых подгрупп. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, вып. 102, 289—293 (РЖМат, 1962, 11А163)
10. —, Об архимедовски упорядоченных Ω-группах. Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, вып. 129, 19—22 (РЖМат, 1964, 3А240)
11. —, Эндоморфизмы некоторых упорядоченных полугрупп. Liet. matem. rinkinys. Лит. матем. сб., 1963, 3, № 2, 69—76 (РЖМат, 1965, 6А187)
12. **Глускин Л. М.**, Полугруппы. В сб. Алгебра. Топология. 1962 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР). М., 1963, 33—58 (РЖМат, 1964, 11А193)
13. **Гуревич Ю. Ш.**, Элементарная эквивалентность упорядоченных абелевых групп. Успехи матем. наук, 1964, 19, № 2, 222—223 (РЖМат, 1965, 2А303)
14. —, Элементарные свойства упорядоченных абелевых групп. Алгебра и логика. Семинар., 1964, 3, № 1, 5—39 (РЖМат, 1964, 12А263)
15. —, Кокорин А. И., Универсальная эквивалентность упорядоченных абелевых групп. Алгебра и логика. Семинар, 1963, 2, № 1, 37—39 (РЖМат, 1963, 11А185)
16. **Зайцева М. И.**, *О совокупности упорядочений абелевой группы.* Успехи матем. наук, 1953, 8, № 1, 135—137 (РЖМат, 1953, 98)
17. —, Правоупорядоченные группы. Уч. зап. Шуйск. пед. ин-та, 1958, 6, 205—226 (РЖМат, 1959, 9800)
18. **Канторович Л. В.**, Линейные полуупорядоченные пространства. Матем. сб., 1937, 2, 121—168
19. —, Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Полуупорядоченные группы и пространства. Успехи матем. наук, 1951, 6, 31—98
20. **Каргаполов М. И.**, Вполне доупорядочиваемые группы. Алгебра и логика. Семинар, 1962, 1, № 2, 16—21 (РЖМат, 1963, 4А159)
21. —, Классификация упорядоченных абелевых групп по элементарным свойствам. Алгебра и логика. Семинар, 1963, 2, № 2, 31—46 (РЖМат, 1964, 2А357)
22. —, Доупорядочиваемые группы. 1. Алгебра и логика. Семинар, 1963, 2, № 6, 5—14 (РЖМат, 1964, 8А193)
23. **Кокорин А. И.**, О группах, упорядочиваемых единственным способом. Докл. 2-й Сибирск. конференции по матем. и механ. 1962, Томск, Томский ун-т, 1962, 87—88 (РЖМат, 1963, 12А203)
24. —, О классе структурно упорядоченных групп. Матем. зап. Уральского ун-та, 1962, 3, № 3, 37—38 (РЖМат, 1964, 1А251)

25. —, Способы структурного упорядочения свободной абелевой группы с конечным числом образующих. Матем. зап. Уральского ун-та, 1963, 4, № 1, 45—48 (РЖМат, 1963, 9А185)
26. —, О доупорядочиваемых группах. Докл. АН СССР, 1963, **151**, № 1, 31—33 (РЖМат, 1964, 1А250)
27. —, К теории доупорядочиваемых групп. Алгебра и логика. Семинар, 1963, 2, № 6, 15—20 (РЖМат, 1964, 8А194)
28. —, К теории вполне доупорядочиваемых групп. Матем. зап. Уральского ун-та, 1963, 4, № 3, 25—29 (РЖМат, 1964, 8А197)
29. —, Доупорядочиваемость прямого произведения доупорядочиваемых групп. Матем. зап. Уральского ун-та, 1963, 4, № 3, 95—96 (РЖМат, 1964, 8А192)
30. —, Копытов В. М., О некоторых классах упорядоченных групп. Алгебра и логика. Семинар, 1962, 1, № 3, 21—23 (РЖМат, 1963, 4А157)
31. **Конторович П. Г.**, Вопросы линейного и структурного упорядочения групп. Spisy přírodověd. fak. univ. Brně, 1964, № 9, 472—473 (РЖМат, 1965, 10А193)
32. —, Кокорин А. И., Об одном типе частично упорядоченных групп. *Матем. зап. Уральского ун-та*, 1962, **3**, № 3, 39—44 (РЖМат, 1964, 2А269)
33. —, Пруткина Л. А., Строго изолированные идеалы. Докл. 3-й Сибирск. конференции по матем. и механ., 1964, Томск, Томский ун-т, 1964, 227—228 (РЖМат, 1965, 5А194)
34. Копытов В. М., О пополнении центра упорядоченной группы. Матем. зап. Уральского ун-та, 1963, **4**, № 3, 20—24 (РЖМат, 1964, 8А196)
35. —, Пополнение вполне доупорядочиваемых групп. Матем. зап. Уральского ун-та, 1963, **4**, № 3, 76—78 (РЖМат, 1964, 8А195)
36. **Круминг П. Д.**, Структурно упорядоченные полугруппы. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1964, № 6, 78—87 (РЖМат, 1965, 9А222)
37. **Кутыев К. М.**, *ПС-изоморфизмы частично упорядоченных локально* нильпотентных групп. Успехи матем. наук, 1956, 11, № 2, 193—198 (РЖМат, 1958, 8597)
38. —, ПС-изоморфизм упорядоченных групп. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1960, **24**, № 6, 807—824 (РЖМат, 1961, 8А217)
39. —, ПС-изоморфизм упорядоченной группы. Докл. АН СССР, 1960, 135, № 6, 1326—1329 (РЖМат, 1961, 8А218)
40. —, О ПС-изоморфизме некоторых классов R-групп. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1963, **27**, № 4, 701—722 (РЖМат, 1964, 3А144)
41. **Ливчак Я. Б.**, Об упорядочиваемых группах. Уч. зап. Уральского ун-та, 1959, вып. 23, № 1, 11—12 (РЖМат, 1961, 7А250)
42. **Ляпин Е. С.**, О максимальных двусторонне стабильных упорядоченностях в полугруппах. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1963, № 3, 88—94 (РЖМат, 1963, 12А207)
43. —, Упорядоченности линейных преобразований, согласованные с суперпозицией. Матем. сб., 1964, **63**, № 1, 122—136 (РЖМат, 1964, 8А204)
44. **Мальцев А. И.**, Об упорядоченных группах. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1949, **13**, 473—482
45. —, О доупорядочении групп. Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1951, **38**, 173—175
46. —, Замечание о частично упорядоченных группах. Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1956, **10**, 3—5 (РЖМат, 1957, 4638)
47. —, О частично упорядоченных нильпотентных группах. Алгебра и логика. Семинар, 1962, **1**, № 2, 5—9 (РЖМат, 1963, 3А195)

48. **Пинскер А. Г.**, Расширение полуупорядоченных групп и пространств. Уч. зап. Ленинградск. гос. пед. ин-та, 1949, **86**, 285—315
49. —, Локально упорядоченные группы. Тр. 3-го Всес. матем. съезда. М., АН СССР, 1956, 1, 32—33 (РЖМат, 1957, 2918)
50. **Плоткин Б. И.**, К теории разрешимых групп без кручения. Докл. АН СССР, 1952, **84**, 665—668
51. —, Обобщенные разрешимые и обобщенные нильпотентные группы. Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 4, 89—172 (РЖМат, 1959, 6652)
52. **Поддерюгин В. Д.** Условия упорядочиваемости группы. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, **21**, № 2, 199—208 (РЖМат, 1958, 2743)
53. *Сибирский К. С.*, *Стахи А. М.*, К вопросу о частичной упорядочиваемости групп. В сб. Исслед. по алгебре и матем. анализу. Кишинев, Картя Молдовеняскэ, 1965, 73—78 (РЖМат, 1965, 9А208)
54. **Скорняков Л. А.**, Кольца. В сб. Алгебра. Топология. 1962. (Итоги науки ВИНИТИ АН СССР). М., 1963, 59—79 (РЖМат, 1964, 11А217)
55. **Смирнов Д. М.**, Инфраинвариантные подгруппы. Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1953, **4**, 92—96 (РЖМат, 1954, 5459)
56. —, О приведенно свободных мультиоператорных группах. Докл. АН СССР, 1963, **150**, № 1, 44—47 (РЖМат, 1963, 12А302)
57. —, Группы автоморфизмов групповых колец правоупорядочиваемых групп. Алгебра и логика. Семинар, 1965, **4**, № 1, 31—45 (РЖМат, 1965, 10А243)
58. **Терехов А. А.**, О вполне доупорядочиваемых группах. Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 1, 34—36 (РЖМат, 1961, 7А245)
59. —, Структура локально разрешимых вполне доупорядочиваемых групп. Алгебра и логика. Семинар, 1962, 1, № 2 (РЖМат, 1963, 4А158)
60. **Фукс Л.**, Частично упорядоченные алгебраические системы. Перев. с англ. М., «Мир», 1965 (РЖМат, 1965, 10А268К)
61. **Френкель В. И.**, Об алгоритмических проблемах в частично упорядоченных группах. Успехи матем. наук, 1962, **17**, № 4, 173—179 (РЖМат, 1963, 7А155)
62. —, Об алгоритмических проблемах в частично упорядоченных группах. Докл. АН СССР, 1963, **152**, № 1, 67—70 (РЖМат, 1964, 3А168)
63. **Хион Я. В.**, Архимедовски упорядоченные кольца. Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 4, 237—242 (РЖМат, 1956, 6457)
64. —, О частично упорядоченных полугруппах, в которых собственные выпуклые подполугруппы не пересекаются. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1963, **27**, № 1, 67—74 (РЖМат, 1963, 8А180)
65. **Черемисин А. И.**, Промежуточные кольца. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1962, № 3, 158—163 (РЖМат, 1963, 1А264)
66. —, Разделительные кольца. Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-т, 1963, 34, 62—73 (РЖМат, 1964, 8А257)
67. **Шайн Б. М.**, Представление упорядоченных полугрупп. Матем. сб. 1964, **65**, № 2, 188—197 (РЖМат, 1965, 4А189)
68. **Шеврин Л. Н.**, Структурно подполугрупповая характеристика упорядочиваемых групп. Успехи матем. наук, 1964, **19**, № 5, 157—161 (РЖМат, 1965, 7А195)
69. **Шимбирева Е. П.**, О прямых разложениях частично упорядоченных групп. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1962, **110**, 347—350 (РЖМат, 1963, 8А171)
70. **Шмелькин А. Л.**, Свободные полинильпотентные группы. Докл. АН СССР, 1963, **151**, № 1, 73—75 (РЖМат, 1964, 8А169)
71. —, Свободные полинильпотентные группы. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1964, **28**, № 1, 91—122 (РЖМат, 1964, 8А170)

72. **Якубик Я.**, Представление и расширение l-групп. Чехосл. матем. ж., 1963, **13**, № 2, 267—283 (РЖМат, 1964, 3А169)
73. **Якубикова М.**, О некоторых подгруппах l-групп. Mat.-fyz. časop, 1962, **12**, № 2, 97—107 (РЖМат, 1963, 2А207)
74. **Alling N. L.**, On ordered divisible groups, Trans. Amer. Math. Soc., 1960, **94**, № 3, 498—514 (РЖМат, 1961, 6А244)
75. —, A characterization of abelian η_α-groups in terms of their natural valuation. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1961, **47**, № 5, 711—713 (РЖМат, 1962, 6А179)
76. —, On the existence of real-closed fields that are η_α-sets of power $\aleph_\alpha$. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, **103**, № 3, 341—352 (РЖМат, 1963, 3А196)
77. **Anderson F. W.**, On f-rings with the ascending chain condition. Proc. Amer. Math. Soc., 1962, **13**, № 5, 715—721 (РЖМат, 1963, 8А214)
78. **Andrus J. F.**, Butson A. T., Ordered groups, Amer. Math. Monthly, 1963, **70**, № 6, 619—628 (РЖМат, 1964, 4А208)
79. **Aubert K. E.**, Caractérisations des anneaux des valuation à l'aide de la théorie des r-idéaux. Sémin. Dubreil et Pisot. Fac. Sci. Paris, 1956—1957, 10. Paris, 1958, 10—1—10—8 (РЖМат, 1959, 7799)
80. **Balmana M.**, Nota., Rev. mat. hisp.-amer., 1952, **12**, № 4, 137
81. **Banaschewski B.**, Über die Vervollständigung geordneter Gruppen. Math. Nachn., 1957, **16**, № 1, 51—71 (РЖМат, 1958, 4516)
82. —, On lattice-ordered groups, Fundam. math., 1964, **55**, № 2, 113—122 (РЖМат, 1965, 7А196)
83. **Bauer H.**, Geordnete Gruppen mit Zerlegungseigenschaft. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl. 1958. München, 1958, 25—36 (РЖМат, 1961, 7А244)
84. **Behrend F. A.**, A characterisation of vector spaces over fields of real numbers. Math. Z., 1962, **78**, № 4, 298—304 (РЖМат, 1962, 12А151)
85. **Birkhoff G.**, Lattice-ordered groups, Ann. Math., 1942, **43**, 298—331
86. —, Lattice-ordered demigroups, Sémin. P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin et Pisot; Fac. Sci. Paris. 1960—1961. 14 année, fasc. 2, Paris, 1963, 19/01—19/26 (РЖМат, 1964, 6А199)
87. **Bleicher M. N.**, Bourne S., On the embeddability of partially ordered holfrings. J. Math. and Mech., 1965, **14**, № 1, 109—116 (РЖМат, 1965, 10А267)
88. —, Schneider H., The decomposition of cones in modules over ordered rings, J. Algebra, 1964, **1**, № 3, 233—258 (РЖМат, 1965, 10А262)
89. **Blyth T. S.**, La forme générale des structures algébriques résiduées. C. r. Acad. sci., 1962, **254**, № 14, 2506—2508 (РЖМат, 1964, 4А217)
90. —, Contribution à la théorie de la résiduation dans les structures algebriques ordonnées. Theses doct. sci. math. Fac. sci. Univ. Paris. 1963 (РЖМат, 1964, 12А200Д)
91. —, Matrices over ordered algebraic structures, J. London Math. Soc., 1964, **39**, № 3, 427—432 (РЖМат, 1965, 4А193)
92. **Brainerd B.**, On a class of Ф-algebras with zero dimensional structure spaces. Arch. Math., 1961, **12**, № 4, 290—297 (РЖМат, 1963, 1А265)
93. —, On the normalizer of an f-ring. Proc. Japan Acad. 1962, **38**, № 8, 438—443 (РЖМат, 1963, 10А232)
94. **Britton J. L.**, Schepperd J. A. H., Almost ordered groups, Proc. London Math. Soc., 1951, **1**, 188—199
95. **Burgess D. C. J.**, Generalized intervals in partially ordered groups. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1959, **55**, № 2, 165—171 (РЖМат, 1961, 6А248)
96. —, McFadden R., Systems of ideals in partially ordered semigroups. Math. Z., 1962, **79**, № 5, 439—450 (РЖМат, 1964, 6А200)

97. **Busulini F.**, Sui gruppi non regolarmente ordinati, Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1963, **33**, 285—296 (РЖМат, 1964, 2A270)
98. **Chehata C. G.**, On a relation on ordered groups, Proc. Math. and Phys Soc. U.A.R., 1961(1964), № 25, 79—82, 12 (РЖМат, 1965, 3A228)
99. **Choe T. H.**, Notes on the lattice-ordered groups. Kyungpook Math. J., 1958, **1**, 37—42 (РЖМат, 1962, 5A211)
100. —, The interval topology of a lattice ordered group. Kyungpook Math. J., 1958, **1**, 69—74 (РЖМат, 1963, 1A211)
101. —, On a quasi-ordered group, Kyungpook Math. J., 1959, **2**, 47—52 (РЖМат, 1963, 3A197)
102. —, Notes on lattice-ordered group. (Erratum). Kyungpook Math. J., 1959, **2**, 73, (РЖМат, 1963, 4A161)
103. **Ciampa S.**, Osservazioni sull'ordinobilità de gruppi. Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1964, **18**, № 1, 111—136 (РЖМат, 1965, 1A199)
104. **Clifford A. H.**, A class of partially ordered Abelian groups related to Ky Fan's characterizing subgroups, Amer. J. Math., 1952, **74**, 347—356
105. **Cohen L.**, Goffman C., The topology of ordered Abelian groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1949, **67**, 310—320
106. **Conrad P. F.**, Embedding theorems for Abelian groups with valuations. Amer. J. Math., 1953, **75**, № 1, 1—29 (РЖМат, 1953, 604)
107. —, The group of order preserving automorhisms of an ordered Abelian group. Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 3, 382—389 (РЖМат, 1959, 5572)
108. —, A note on valued linear spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 4, 646—647 (РЖМат, 1959, 6026)
109. —, A correction and improvement of a theorem on ordered groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 2, 182—184 (РЖМат, 1960, 1393)
110. —. Non-abelian ordered groups. Pacif. J. Math., 1959, **9**, № 1, 25—41 (РЖМат, 1960, 7284)
111. —, Right-ordered groups. Michigan Math. J., 1959, **6**, № 3, 267—275 (РЖМат, 1961, 7A246)
112. —, The structure of a lattice-ordered group with a finite number of disjoint elements. Michigan Math. J., 1960, **7**, № 2, 171—180 (РЖМат, 1961, 6A247)
113. —, Some structure theorems for lattice-ordered groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **99**, № 2, 212—240 (РЖМат, 1962, 3A211)
114. —, Regularly ordered groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1962, **13**, № 5, 726—731 (РЖМат, 1963, 7A168)
115. —, The relationship between the radical of a lattice-ordered group and complete distributivity. Pacif. J. Math., 1965, **14**, № 2, 493—499 (РЖМат, 1965, 5A193)
116. —, The lattice of all convex l-subgroups of a lattice-ordered group. Чехосл. матем. ж. 1965, **15**, № 1, 101—123 (РЖМат, 1965, 12A252)
117. —, Clifford A. H., Lattice-ordered groups having at most two disjoint elements. Proc. Glasgow Math. Assoc., 1960, **4**, № 3, 111—113 (РЖМат, 1962, 3A213)
118. —, Harvey J., Holland C., The Hahn embedding theorem for Abelian lattice-ordered groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1963, **108**, № 1, 143—169 (РЖМат, 1964, 3A170)
119. **Cristescu R.**, La notion de composantes dans un groupe dirigé. C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 20, 1700—1702 (РЖМат, 1960, 8631)
120. —, Sur les groupes dirigés. Чехосл. матем. ж., 1960, **10**, № 1, 17—26 (РЖМат, 1962, 5A210)
121. **Doneddu A.**, Mesure des grandeurs archimediennes. Bull. Assoc. profes-

seurs math. enseign. public, 1964, **43**, № 238, 225—235 (РЖМат, 1965, 6A186)
122. **Endler O.**, Über multiplikative Strukturen und eudoxische Hüllen von archimedischen totalgeordneten Gruppen. Math. Z., 1961, **77**, № 4, 339—358 (РЖМат, 1963, 3A204)
123. **Escardo Linés E.**, Balmana Mallol R., On l-groups. Rev. mat. hisp-amer., 1952, **12**, 129—136, 137
124. **Everett C. J.**, Sequence completion of lattice moduls. Duke Math. J., 1944, **11**, 109—119
125. —, Ulam S., On ordered groups. Trans. Amer. Math. Soc. 1945, **57**, 208—216
126. **Fan K. U.**, Partially ordered additive groups of continuous functions. Ann. Math., 1950, **51**, 409—427
127. **Fleischer I.**, Sur les espaces normés non-archimédiens. Proc. Konincl. neder. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 2, 165—168; Indagationes math., 1954, **16**, № 2, 165—168 (РЖМат, 1956, 592)
128. —, Functional representation of partially ordered groups. Ann. Math., 1956, **64**, № 2, 260—263 (РЖМат, 1959, 7800)
129. —, A characterization of lexicographically ordered $\eta\alpha$-sets. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1963, **50**, № 6, 1107—1108 (РЖМат, 1964, 10A231)
130. **Fougues A.**, a-systèmes S-dedekindiens. C. r. Acad. sci., 1965, **260**, № 6, 1525—1527 (РЖМат, 1965, 8A183)
131. **Fuchs L.**, The extension of partially ordered groups. Acta Math. Acad. scient. Hung. 1950, **1**, 118—124
132. —, On the ordering of quotient rings and quotient semigroups. Acta scient. math., 1961, **22**, № 1-2, 42—45 (РЖМат, 1963, 2A217)
133. —, Partially ordered algebraic systems. (Internat. Ser. Monogr. Pure and Appl. Math., 28). Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press, 1963, X, 229 pp. (РЖМат, 1964, 4A252K)
134. —, On group homomorphic images of partially ordered semigroups. Acta scient. math., 1964, **25**, № 1-2, 139—142 (РЖМат, 1965, 2A321)
135. —, Über homomorphe Gruppenbilder teilweise geordneter Halbgruppen. Spisy přírodověd fak. univ. Brně, 1964, № 9, 462—463 (РЖМат, 1965, 10A203)
136. —, Steinfeld O., Principal components and prime factorization in partially ordered semigroups. Ann. Univ. scient. budapest. Soc. math., 1963, **6**, 103—111 (РЖМат, 1964, 11A197)
137. **Gemignani G.**, Digressione sui campi ordinati. Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1962, **16**, № 2, 143—157 (РЖМат, 1964, 4A223)
138. **Gilder J.**, Betweenness and order in semigroups. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1965, **61**, № 1, 13—28 (РЖМат, 1965, 8A189)
139. **Goffman C.**, Remarks on lattice ordered groups and vector lattices. I. Carathéodory functions. Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **88**, № 1, 107—120 (РЖМат, 1959, 2419)
140. **Greve W.**, Partial betweenness groups. Math. Z., 1962, **78**, № 4, 305—318 (РЖМат, 1962, 12A150)
141. **Hahn H.**, Über die nicharchimedischen Grössensysteme, S—B. Wiener Acad. Math. Nat. Klasse, Abt. IIa, 1907, 116, 601—653
142. **Harvey J.**, Complete holomorphs. Pacif. J. Math., 1961, **11**, № 3, 961—970 (РЖМат, 1962, 11A142)
143. **Hayes A.**, A characterization of f-rings without non-zero nilpotents. J. London Math. Soc., 1964, **39**, № 4, 706—707 (РЖМат, 1965, 6A231)
144. —, A representation theory for a class of partially ordered rings. Pacif. J. Math., 1964, **14**, № 3, 957—968 (РЖМат, 1965, 12A322)
145. **Henriksen M.**, Isbell J. R., Lattice-ordered rings and function rings. Pacif. J. Math., 1962, **12**, № 2, 533—565 (РЖМат, 1963, 10A233)

146. —, —, Johnson D. G., Residue class fields of lattice-ordered algebras. Fundam. math., 1961, 50, № 2, 107—117 (РЖМат, 1963, 6Б422)
147. —, Johnson D. G., On the structure of a class of archimedean lattice — ordered algebras. Fundam. math., 1961, 50, № 1, 73—94 (РЖМат, 1963, 3Б421)
148. **Holland Ch.**, Extensions of ordered groups and sequence completion. Trans. Amer. Math. Soc., 1963, **107**, № 1, 71—82 (РЖМат, 1963, 11A184)
149. —, The lattice-ordered group of automorphisms of an ordered set. Michigan Math. J., 1963, **10**, № 4, 399—408 (РЖМат, 1964, 8A198)
150. —, Transitive lattice-ordered permutation groups. Math. Z., 1965, **87**, № 3, 420—433 (РЖМат, 1965, 8A180)
151. —, A class of simple lattice-ordered groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1965, **16**, № 2, 326—329 (РЖМат, 1965, 11A210)
152. —, The interval topology of a certain L-group. Чехосл. матем. ж., 1965, **15**, № 2, 311—314 (РЖМат, 1965, 12A249)
153. **Ion I. D.**, Asupra grupurilor de valuare. Studii și cercetări mat. Acad. RPR, 1963, **14**, № 4, 689—696 (РЖМат, 1964, 7A245)
154. **Jaffard P.**, Groups archimediens et para archimédiens. C. r. Acad. sci., 1950, **231**, 1278—1280
155. —, Contribution à l'étude des groupes ordonnés, J. math. pures et appl., 1953, **32**, № 3, Ser. 9, 203—280 (РЖМат, 1955, 3635)
156. —, Sur les groupes réticulés associés à un groupe ordonné. Sémin P. Dubreil. Fac. sci. Paris, 1954/1955, **8**, № 27, 1—12 (РЖМат, 1956, 7902)
157. —, Extensions des groupes ordonnés. Sémin. A. Châtelet et P. Dubreil. Fac. sci. Paris, 1953—1954 (1956), **7**, № 11, 1—10 (РЖМат, 1957, 4637)
158. —, Realisation des groupes complètement réticulés. Bull. Soc. math. France, 1956, **84**, № 3, 295—305 (РЖМат, 1959, 2386)
159. —, Sur certains groupes réticulés. Proc. Internat. Congr. Math. 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 28—29 (РЖМат, 1958, 136)
160. —, Extension des groupes réticulés et applications. Publs scient. Univ. Alger, 1954, **A1**, № 1, 197—222 (РЖМат, 1958, 8596)
161. —, Sur les groupes reticulés associés a un groupe ordonné. Publs scient. Univ. Alger, 1955, **A2**, № 2, 173—203 (РЖМат, 1958, 4515)
162. —, Sur le spectre d'un groupe réticulé et l'unicité des réalisations irréductibles. Ann. Univ. Lyon, 1959, **A**, № 22, 43—47 (РЖМат, 1961, 6A245)
163. —, Sur la théorie algébrique de la croissance. C. r. Acad. sci., 1965, **243**, № 19, 1383—1385 (РЖМат, 1960, 4931)
164. **Jakubik J.**, Об одном классе структурно упорядоченных групп. Časop. pěstov. mat., 1959, **84**, № 2, 150—161 (РЖМат, 1960, 6213)
165. —, О главных идеалах в структурно упорядоченных группах. Чехосл. матем. ж., 1959, **9**, № 4, 528—543 (РЖМат, 1960, 12527)
166. —, Konvexné reťazce v čiastočne usporiadaných gruppách. Mat.-fiz. časop., 1959, **9**, № 4, 236—242 (РЖМат, 1961, 1A232)
167. —, Über eine Klasse von l-Gruppen. Acta Fac. rerum natur. Univ. Comenianae. Math., 1961, **6**, № 6, 267—273 (РЖМат, 1962, 10A163)
168. —, The interval topology of an L-group. Mat.-fyz. časop., 1962, **12**, № 3, 209—211 (РЖМат, 1963, 4A160)
169. —, Über Teilbünde der l-Gruppen. Acta scient. math., 1962, **23**, № 3-4, 249—254 (РЖМат, 1963, 12A204)
170. —, Über ein Problem von Paul Jaffard. Arch. Math., 1963, **14**, № 1, 16—21 (РЖМат, 1963, 10A172)

171. —, Interval topology of an l-group. Colloq. math., 1963, **11**, № 1, 65—72 (РЖМат, 1964, 6A189)
172. —, Über halbgeordnete Gruppen mit verallgemeinerter Jordanscher Zerlegung. Rev. roumaine math. pures et appl., 1964, **9**, № 2, 187—190 (РЖМат, 1965, 3A226)
173. —, Über Verbandsgruppen mit zwei Erzeugenden, Чехосл. матем. ж., 1964, **14**, № 3, 444—454 (РЖМат, 1965, 3A227)
174. —, Verbandsgruppen mit zwei Erzeugenden. Spisy přírodověd. fak. univ. Brně, 1964, № 9, 468 (РЖМат, 1965, 10A195)
175. **Johnson D. G.**, On a representation theory for a class of archimedean lattice-ordered rings. Proc. London Math. Soc., 1962, **12**, № 46, 207—225 (РЖМат, 1963, 8A213)
176. **Katznelson M. J.**, Sur les algèbres dont les éléments non négatifs admettent des racines carrées, Ann. scient. Ecole norm. supér., 1960, **77**, № 2, 167—174 (РЖМат, 1963, 4Б361)
177. **Kist J.**, Representations of Archimedean function rings. Illinois J. Math., 1963, **7**, № 2, 269—278 (РЖМат, 1964, 9A242)
178. **Kowalski O.**, Zum Begriff der Quasiteilbarkeit in ganzen l-Halbgruppen. Časop. pěstov. mat., 1964, **89**, № 1, 53—77 (РЖМат, 1964, 9A192)
179. **Krantz D. H.**, Conjoint measurement the Luce — Tukey axiomatisation and some extensions. J. Math. Psychol., 1964, **1**, № 2, 248—277 (РЖМат, 1965, 7A197)
180. **Krull W.**, Über geordnete Gruppen von reellen Funktionen. Math. Z., 1956, **64**, 10—40 (РЖМат, 1960, 4930)
181. —, Über die Endomorphismen von total geordneten Archimedischen Abelschen Gruppen. Math. Z., 1960, **74**, № 1, 81—90 (РЖМат, 1962, 7A176)
182. —, Automorphismen and Spiegelungen Endoxischer Halbgruppen. Math. Z., 1962, **79**, № 1, 53—68 (РЖМат, 1963, 3A205)
183. **Kudláček V.**, O některých typech l-okruhů. Sb. Vysokého učení techn. Brně, 1962, № 1-2, 179—181 (РЖМат, 1965, 5A234)
184. **Lallement G.**, Sur les homomorphisms d'un demi-groupe sur un demi-groupe complètement-o-simple. C. r. Acad. sci., 1964, **258**, 3609—3612 (РЖМат, 1964, 12A194)
185. **Lavis A.**, Groupes topologiques ordonnes, Bull. Soc. roy. sci. Liege, 1962, **31**, № 7-8, 497—503 (РЖМат, 1963, 9A180)
186. —, Sur les quotients totalement ordonnés d'un groupe linéairement ordonné. Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1963, **32**, № 3-4, 204—208 (РЖМат, 1963, 12A205)
187. **Lévy-Bruhl J.**, Le théorème de Jordan — Holder dans certains groupoides ordonnés. C. r. Acad. sci, 1964, **258**, № 4, 1114—1116 (РЖМат, 1964, 9A200)
188. **Loonstra F.**, L'extension du groupe ordonné des entiers rationnels par le même groupe. Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., 1955, **A58**, № 1, 41—49; Indagationes math., 1955, **17**, № 1, 41—49 (РЖМат, 1956, 3690)
189. **Lorenz K.**, Über Strukturverbände von Verbandsgruppen, Acta math. Acad. scient. hung., 1962, **13**, № 1-2, 55—67 (РЖМат, 1963, 1A210)
190. **Lorenzen P.**, Über halbgeordnete Gruppen. Math. Z., 1950, **52**, 483—526
191. —, Die erweiterung halbgeordneter Gruppen zu Verbandsgruppen. Math. Z., 1953, **58**, № 1, 15—24 (РЖМат, 1955, 103)
192. **Lugowski H.**, Über die Vervollständigung geordneter Halbringe, Publs. math., 1962, **9**, № 3-4, 213—222 (РЖМат, 1964, 4A250)
193. —, Über gewisse geordnete Halbmoduln mit negativen Elementen. Publs. math., 1964, **11**, № 1-4, 23—31 (РЖМат, 1965, 11A226)

194. —, Über die Vervollständigung gewisser geordneter Halbmoduln mit negativen Elementen. Publs. math., 1964, **11**, № 1-4, 135—138 (РЖМат, 1965, 11А227)
195. **Maltese G.**, Convex ideals and positive multiplicative forms in partially ordered algebras. Math. scand., 1961, **9**, № 2, 372—382 (РЖМат, 1963, 8Б394)
196. **Matsushita S.**, Sur la puissance des ordres dans un groupe libre. Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., 1953, **A56**, № 1, 15—16; Indigationes math., 1953, **15**, № 1, 15—16 (РЖМат, 1953, 99)
197. **Michiura T.**, On definition of lattice ordered groups. J. Osaka Inst. Sci. Tech. Part I, 1949, **1**, 27
198. —, On a definition of lattice-ordered groups. II. J. Osaka Inst. Sci. Tech., Part I, 1949, **1**, 117—119
199. —, On simple ordered groups. Portugaliae Math., 1951, **10**, 89—95
200. —, Sur les groupes ordonnés. II. C. r. Acad. sci., 1952, **234**, 1422—1423; III. C. r. Acad. sci., 1952, **234**, 1521—1522
201. —, On partially ordered groups without proper convex subgroups. Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., 1953, **A56**, № 3, 231—232; Indigationes math, 1953, **15**, № 3, 231—232 (РЖМат, 1954, 1579)
202. **Müller D.**, Verbandsgruppen und Durchschitte allgemeiner Bewertungsringe. Diss., Math.-naturwiss. Fak., Bonn, 1960, VI, 83S (РЖМат, 1963, 12А248Д)
203. **Nakano T.**, A theorem on lattice ordered groups and its applications to the valuation theory. Math. Z., 1964, **83**, № 2, 140—146 (РЖМат, 1965, 9А209)
204. **Neumann B. H.**, On ordered groups. Amer. J. Math., 1949, **71**, № 1, 1—18
205. **Northam E. S.**, The interval topology of a lattice. Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 5, 824—827 (РЖМат, 1955, 1686)
206. **Papangelou F.**, Order convergence and topological completion of commutative lattice-groups. Math. Ann., 1964, **155**, № 2, 81—107 (РЖМат, 1965, 3А225)
207. **Pickert G.**, Nachbarschaftsfilter und Verbandshalbgruppen. Arch. Math., 1962, **13**, № 1-3, 151—159 (РЖМат, 1964, 3А188)
208. **Querré J.**, Equivalences de fermeture dans un demi-groupe résidutif. Semin. P. Dubreil, M.—L. Dubreil — Jacotin et C. Pisot; Fac. sci. Paris. 1961—1962, 15 année, fasc. I. Paris, 1963, 3/01—3/31 (РЖМат, 1964, 7А253)
209. **Rautenberg W.**, Beweis des Kommutativgesetzes in elementar-archimedisch geordneten Gruppen. Z. math. Logik und Grundl. Math., 1965, **11**, № 1, 1—4 (РЖМат, 1965, 12А250)
210. **Ree R.**, On ordered, finitely generated solvable groups. Trans. Roy. Soc. Canada, 1954, Sec. 3, 48, June, 39—42 (РЖМат, 1956, 1074; 1957, № 5 «Поправки и дополнения»)
211. —, The existence of outer automorphisms of some groups. II. Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 1, 105—109 (РЖМат, 1959, 2356)
212. **Ribenboim P.**, Un théorème de réalisation de groupes réticulés. Pacif. J. Math., 1960, **10**, № 1, 305—308 (РЖМат, 1961, 8А219)
213. —, Théorie des groupes ordonnés. Bahia Blanca, Univ. nac. del sur, 1963, 113 p., ill. (РЖМат, 1965, 4А179К)
214. **Rieger L. S.**, On the ordered and cyclically ordered groups, I—III, Věstnik Král. České Spol. Nauk, 1946, № 6, 1—31; 1947, № 1, 1—33; 1948, № 1, 1—26
215. **Robinson A.**, Z a k o n E., Elementary properties of ordered abelian groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, **96**, № 2, 222—236 (РЖМат, 1961, 5А233)

216. **Saitô T.**, Ordered idempotent semigroups. J. Math. Soc. Japan, 1962, 14, № 2, 150—169 (РЖМат, 1964, 3А189)
217. —, Regular elements in an ordered semigroup. Pacif. J. Math., 1963, 13, № 1, 263—295 (РЖМат, 1964, 3А187)
218. **Sankaran N.**, Venkataraman R., A generalization of the ordered group of integers. Math. Z., 1962, 79, № 1, 21—31 (РЖМат, 1962, 11А162)
219. **Scherk P.**, On ordered geometries. Canad. Math. Bull., 1963, 6, № 1, 27—36 (РЖМат, 1964, 9А241)
220. **Shepperd J. A. H.**, Betweenness groups, J. London Math. Soc., 1957, 32, № 3, 277—285 (РЖМат, 1958, 5534)
221. —, Separations groups, Proc. London Math. Soc., 1957, 7, № 8, 518—548 (РЖМат, 1958, 6511)
222. **Šik F.**, К теории структурно упорядоченных групп. Чехосл. матем. ж., 1956, 6, № 1, 1—25 (РЖМат, 1957, 159)
223. —, Über Summen einfach geordneter Gruppen, Чехосл. матем. ж., 1958, 8, № 1, 22—53 (РЖМат, 1958, 9565)
224. —, Über subdirekte Summen geordneter Gruppen. Чехосл. матем. ж., 1960, 10, № 3, 400—424 (РЖМат, 1961, 6А246)
225. —, Erweiterungen teilweise geordneter Gruppen. Spisy přirodověd. fak. univ. Brně, 1960, № 2, 65—80 (РЖМат, 1961, 9А256)
226. —, Zwei Konstruktionen quasilinearer Erweiterungen der Anordnung einer Abelschen Gruppe mit Hilfe additiver und isotoner Funktionale. Z. math. Logik und Grundl. Math., 1961, 7, № 1, 39—45 (РЖМат, 1962, 4А202)
227. —, Über die algebraische Charakterisierung der Gruppen von reallen Funktionen. Ann. mat. pura et appl., 1961, 54, 295—299 (РЖМат, 1962, 5Б529)
228. —, Über die Beziehungen zwischen eigenen Spitzen und minimalen Komponenten einer l-Gruppe. Acta math. Acad. scient. hung., 1962, 13, № 1-2, 171—178 (РЖМат, 1963, 1А209)
229. —, Über additive und isotone Funktionale auf geordneten Gruppen. Чехосл. матем. ж., 1962, 12, № 4, 611—621 (РЖМат, 1963, 7А167)
230. —, Kompakt erzeugte vollständige l-gruppen. Bull. Inst. politehn.— Iaşi, 1962, 8, № 3-4, 5—8 (РЖМат, 1964, 6А190)
231. —, Zum Disjunktivitätsproblem auf geordneten Gruppen. Math. Nachr., 1963, 25, № 2, 83—93 (РЖМат, 1963, 9А186)
232. —, Über direkte Zerlegungen gerichteter Gruppen. Math. Nachr., 1963, 25, № 2, 95—110 (РЖМат, 1963, 9А187)
233. —, Über fortsetzung additiver und isotoner Funktionale auf geordneten Gruppen. Чехосл. матем. ж., 1963, 13, № 1, 24—36 (РЖМат, 1963, 11Б514)
234. —, Compacidad de ciertos espacios de ultraantifiltros. Mem. Fac. cienc. Univ. Habana, Mat., 1963, 1, № 1, 19—25 (РЖМат, 1965, 3А229)
235. —, Estructura y realizaciones de grupos reticulados. Mem. Fac. cienc. Univ. Habana. Ser. Mat., 1964, 1, № 3, 1—29 (РЖМат, 1965, 12А251)
236. **Steinfeld O.**, Über Hauptkomponenten und Primfaktorisation in halbgeordneten Halbgruppen. Spisy přirodověd. fak. univ. Brně, 1964, № 9, 492 (РЖМат, 1965, 10А204)
237. **Strodt W.**, On the algebraic closure of certain partially ordered fields. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, 105, № 2, 229—250 (РЖМат, 1963, 10А193)
238. **Swamy K. L.**, Autometrized lattice ordered groups. I. Math. Ann., 1964, 154, № 5, 406—412 (РЖМат, 1964, 11А190)
239. —, Dually Residuated lattice ordered semigroups. Math. Ann., 1965, 159, № 2, 105—114 (РЖМат, 1965, 12А353)

240. **Swierczkowski S.**, On cyclically ordered groups. Fundam. math., 1959, 47, № 2, 161—166 (РЖМат, 1961, 7А247)
241. **Teh H. H.**, A note on l-groups. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1962, **13**, № 1, 123—124 (РЖМат, 1963, 5А222)
242. **Teller J. R.**, On the extensions of lattice-ordered groups. Pacif. J. Math., 1964, **14**, № 2, 709—718 (РЖМат, 1965, 5А192)
243. —, On ordered algebraic structures. Doct. diss. Tulane Univ., 1964, 61 pp. «Dissept. Abstrs», 1965, **25**, № 7, 4182—4183 (РЖМат, 1965, 11А211Д)
244. **Thierrin G.**, Sur les anneaux partiellement ordonnés. Canad. Math. Bull., 1962, **5**, № 2, 123—128 (РЖМат, 1963, 3А245)
245. **Trevisan G.**, Classificazione dei semplici ordinamenti di un gruppo libero commutativo con n generatori. Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1953, **22**, № 1, 143—157 (РЖМат, 1955, 3106)
246. **Tully E. J., Jr.**, The existence of a total order on a group. Proc. Amer. Math. Soc., 1962, **13**, № 2, 217—219 (РЖМат, 1962, 11А161)
247. **Urbanik K.**, Remarks on ordered absolute-valued algebras. Colloq. math., 1963, **11**, № 1, 31—39 (РЖМат, 1964, 9А243)
248. **Vaida D.**, Asupra subgrupurilor isolate ale unui grup reticulat necomutativ. Comun. Acad. RPR, 1960, **10**, № 11, 935—939 (РЖМат, 1961, 9А255)
249. —, Un Probleme De G. Birkhoff. Докл. Болг. АН., 1962, **15**, № 8, 801—803 (РЖМат, 1964, 1А252)
250. —, Groupes ordonnés dont les éléments admettent une décomposition jordanienne généralisée. C. r. Acad. sci., 1963, **257**, № 15, 2053—2055 (РЖМат, 1964, 4А209)
251. —, Groupes ordonnés dont les éléments admettent une décomposition jordanienne généraliseé. C. r. Acad. sci., 1963, **257**, № 16, 2222—2223 (РЖМат, 1964, 7Б564)
252. —, Groupes ordonnés dont les éléments admettent une décomposition jordanienne généralisée. Rev. roumaine math. pures et appl., 1964, **9**, № 10, 929—948 (РЖМат, 1965, 11А209)
253. —, Groupes ordonnés dont les éléments admettent une décomposition jordanienne généralisée. Spisy přirodověd. fak. univ. Brně, 1964, № 9, 494 (РЖМат, 1965, 10А194)
254. **Weinberg E. C.**, Completely distributive lattice — ordered groups. Pacif. J. Math., 1962, **12**, № 3, 1131—1137 (РЖМат, 1963, 9А184)
255. —, Higher degrees of distributivity in lattices of continuous functions. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, **104**, № 2, 334—346 (РЖМат, 1964, 10А228)
256. —, Free lattice — ordered abelian groups. Math. Ann., 1963, **151**, № 3, 187—199 (РЖМат, 1964, 1А253)
257. **Weinert H. J.** Über Halbringe und Halbkörper. I. Acta math. Acad. scient. hung., 1962, **13**, № 3-4, 365—378, VI (РЖМат, 1964, 3А233)
258. —, Über Halbringe und Halbkörper. II. Acta math. Acad. scient. hung., 1963, **14**, № 1-2, 209—227, XII, XIII, XIV (РЖМат, 1964, 3А234)
259. **Welter C. P.**, On the algebraic closure of certain partially ordered fields. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, **105**, 229—250
260. **Wolk E. S.**, On the interval topology of an l-group. Proc. Amer. Math. Soc., 1961, **12**, № 2, 304—307 (РЖМат, 1963, 12А317)
261. **Yakobe I.**, Equivalence of the Krull — Müller — Jaffard theorem and Ribenboims approximation theorem, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 1963, **A17**, № 2, 145—152 (РЖМат, 1965, 9А210)
262. **Zakon E.**, Generalized Archimedean groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **99**, № 1, 21—40 (РЖМат, 1962, 2А231)
263. **Zamansky M.**, Groupes de Riesz. C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 21, 2933—2934 (РЖМат, 1961, 5А234)