И. И. Шарапудинов, Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2018, том 82, выпуск 1, 225–258

DOI: 10.4213/im8536

УДК 517.538

И. И. Шарапудинов

Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой

Для заданной ортонормированной на (a,b) с весом $\rho(x)$ системы функций $\{\varphi_k(x)\}$ и натурального r построена ассоциированная с ней новая система функций $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированная относительно скалярного произведения типа Соболева следующего вида:

$$\langle f,g\rangle=\sum_{\nu=0}^{r-1}f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a)+\int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)\,dt.$$

Исследованы вопросы сходимости ряда Фурье по системе $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Рассмотрены важные частные случаи систем типа $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, порожденных функциями Хаара и полиномами Чебышёва $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$. В этих случаях для порожденных функций $\varphi_{r,k}(x)$ получены явные представления, которые могут быть использованы при исследовании асимптотических свойств функций $\varphi_{r,k}(x)$ при $k\to\infty$ и аппроксимативных свойств сумм Фурье по системе $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Основное внимание уделено исследованию аппроксимативных свойств рядов Фурье по системам типа $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, порожденным функциями Хаара и полиномами Чебышёва.

Библиография: 27 наименования.

Ключевые слова: системы функций, ортогональных по Соболеву, ассоциированные с функциями Хаара; полиномы, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с полиномами Чебышёва; сходимость рядов Фурье по функциям, ортогональным по Соболеву; аппроксимативные свойства частичных сумм ряда Фурье по функциям, ортогональным по Соболеву; сходимость ряда Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, ассоциированным с полиномами Чебышёва.

DOI: https://doi.org/10.4213/im8536

§ 1. Введение

В ряде наших работ [1]–[5] были введены так называемые *смешанные* ряды по классическим ортогональным полиномам, частичные суммы которых обладают свойством совпадения их значений в концах области ортогональности со значениями исходной функции. Общая идея, которая лежит в основе построения смешанных рядов, заключается в следующем. Предположим, что система функций $\{\varphi_k(x)\}$ ортонормирована на (a,b) с весом $\rho(x)$, т. е.

$$\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_l(x)\rho(x)\,dx=\delta_{kl}, \tag{1.1}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-01-00486-а).

где δ_{kl} – символ Кронекера. Через $L^p_\rho(a,b)$ обозначим пространство функций $f(x)$, измеримых на (a,b), для которых

$$\int_a^b |f(x)|^p \rho(x)\,dx < \infty. \tag{1.2}$$

Если $\rho(x) \equiv 1$, то будем писать $L^p_\rho(a,b) = L^p(a,b)$ и $L(a,b) = L^1(a,b)$. Нетрудно показать, что если весовая функция $\rho(x)$ удовлетворяет некоторым естественным условиям, то пространство $L^p_\rho(a,b)$ представляет собой банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{p,\rho} = \left(\int_a^b |f(x)|^p \rho(x)\,dx\right)^{1/p}.$$

Для этого достаточно, например, считать, что $1/\rho(x) \in L(a,b)$. В этом случае из неравенства Гёльдера вытекает также, что $L^2_\rho(a,b) \subset L(a,b)$.

Из (1.1) следует, что $\varphi_k(x) \in L^2_\rho(a,b)$, $k = 0,1,\dots$. Мы добавим к этому условию еще одно, считая, что $\varphi_k(x) \in L(a,b)$, $k = 0,1,\dots$. Тогда мы можем определить следующие порожденные системой $\{\varphi_k(x)\}$ функции:

$$\varphi_{r,r+k}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1}\varphi_k(t)\,dt, \qquad k = 0,1,\dots. \tag{1.3}$$

Кроме того, определим конечный набор функций

$$\varphi_{r,k}(x) = \frac{(x-a)^k}{k!}, \qquad k = 0,1,\dots,r-1. \tag{1.4}$$

Из (1.3) и (1.4) следует, что

$$\varphi^{(\nu)}_{r,k}(x) = \begin{cases} \varphi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } 0 \leqslant \nu \leqslant r-1, r \leqslant k, \\ \varphi_{k-r}(x) \quad \text{для п.в. } x \in (a,b), & \text{если } \nu = r \leqslant k, \\ \varphi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } \nu \leqslant k < r, \\ 0, & \text{если } k < \nu \leqslant r. \end{cases} \tag{1.5}$$

При изучении свойств системы функций $\{\varphi_{r,k}(x)\}$ нам понадобится весовое пространство Соболева $W^r_{L^p_\rho(a,b)}$, состоящее из функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых $r-1$ раз на отрезке $[a,b]$, причем $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и $f^{(r)}(x) \in L^p_\rho(a,b)$. Скалярное произведение в пространстве $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ определим с помощью равенства

$$\langle f,g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)\,dt. \tag{1.6}$$

Для того чтобы величина $\langle f,g\rangle$, определяемая равенством (1.6), удовлетворяла всем четырем аксиомам скалярного произведения достаточно, например, считать, что $1/\rho(x) \in L(a,b)$. Тогда для $f \in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ мы можем определить норму $\|f\|_{W^r_{L^2_\rho(a,b)}} = \sqrt{\langle f,f\rangle}$, которая превращает $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ в банахово пространство, и, стало быть, $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ – гильбертово пространство со скалярным произведением (1.6).

Пользуясь определением (1.3) и (1.4) функций $\varphi_{r,k}(x)$ и равенством (1.5), нетрудно показать (см. теорему 2.1), что система $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ является ортонормированной в пространстве $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$. Будем называть систему $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ *ортонормированной по Соболеву* относительно скалярного произведения (1.6) и *порожденной* ортонормированной системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$.

В цитированных выше работах [1]–[5], а также в [6] были рассмотрены некоторые частные случаи систем функций вида $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, порожденных классическими ортонормированными системами Якоби, Лежандра, Чебышёва, Лагерра и Хаара. С другой стороны, в последние годы интенсивное развитие получила (см. [7]–[12] и цитированную там литературу) теория полиномов, ортогональных относительно различных скалярных произведений соболевского типа (полиномы, ортогональные по Соболеву). Скалярные произведения соболевского типа характеризуются тем, что они включают в себя слагаемые, которые “контролируют” поведение соответствующих ортогональных полиномов в нескольких заданных точках числовой оси. Например, в некоторых случаях оказывается так, что полиномы, ортогональные по Соболеву на интервале (a, b), могут иметь нули, совпадающие с одним или с обоими концами этого интервала. Это обстоятельство имеет важное значение для некоторых приложений, в которых требуется, чтобы значения частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ по рассматриваемой системе ортогональных полиномов совпали в концах интервала (a, b) со значениями $f(a)$ и $f(b)$. Заметим, что обычные ортогональные с положительным на (a, b) весом полиномы этим важным свойством не обладают. Скалярное произведение (1.6), рассматриваемое в настоящей работе, имеет одну особую точку, а именно, точку a, в окрестности которой “контролируется” поведение функций $\varphi_{r,k}(x)$, ортогональных по Соболеву и порожденных исходной ортонормированной системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ посредством равенства (1.3).

В дальнейшем будет показано (см. § 2), что ряд Фурье функции $f(x) \in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ по системе $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ имеет смешанный характер, а, точнее говоря, имеет следующий вид:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} f_{r,k}\varphi_{r,k}(x), \tag{1.7}$$

где

$$f_{r,k} = \int_a^b f^{(r)}(t)\varphi^{(r)}_{r,k}(t)\rho(t)\,dt = \int_a^b f^{(r)}(t)\varphi_{k-r}(t)\rho(t)\,dt, \tag{1.8}$$

поэтому ряд Фурье вида (1.7) будем (следуя [1]–[5]) называть *смешанным рядом* по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$, считая это название условным и сокращенным обозначением полного названия: “*ряд Фурье по системе* $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, *ортонормированной по Соболеву, порожденной ортонормированной системой* $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$”.

Отметим некоторые важные свойства смешанного ряда (1.7), непосредственно вытекающие из (1.5). Первое из них связано с дифференциальным свойством смешанного ряда, а именно, если $r > 1$, то в результате почленного дифференцирования смешанного ряда (1.7) мы получим смешанный ряд для производной $f'(x)$, соответствующий случаю, когда вместо r фигурирует $r-1$, другими словами

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} f'_{r-1,k-1}\varphi_{r-1,k-1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(f_{r,k}\varphi_{r,k}(x))'. \tag{1.9}$$

Второе свойство связано с почленным интегрированием с переменным верхним пределом и выражается формулой

$$\int_a^x f'(t)\,dt \sim \sum_{k=1}^{\infty} f'_{r-1,k-1}\int_a^x \varphi_{r-1,k-1}(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} f_{r,k}\varphi_{r,k}(x). \tag{1.10}$$

Важное значение имеет свойство смешанного ряда (1.7), которое заключается в том, что его частичная сумма вида

$$Y_{r,N}(f,x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{N} f_{r,k}\varphi_{r,k}(x) \tag{1.11}$$

при $N \geqslant r$, r-кратно совпадает с исходной функцией $f(x)$ в точке $x=a$, т. е.

$$\big(Y_{r,N}(f,x)\big)^{(\nu)}_{x=a} = f^{(\nu)}(a), \qquad 0 \leqslant \nu \leqslant r-1. \tag{1.12}$$

Кроме того, из (1.5) и (1.11) следует, что при $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$

$$Y^{(\nu)}_{r,N}(f,x) = \sum_{n=0}^{r-1-\nu} f^{(n+\nu)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \sum_{n=r-\nu}^{N-\nu} f^{(\nu)}_{r-\nu,n}\varphi_{r-\nu,n}(x) = Y_{r-\nu,N-\nu}(f^{(\nu)},x), \tag{1.13}$$

отсюда, в свою очередь, выводим при $0 \leqslant \nu \leqslant r-2$

$$\begin{aligned} f^{(\nu)}(x) - Y^{(\nu)}_{r,N}(f,x) &= \frac{1}{(r-\nu-2)!}\int_a^x (x-t)^{r-\nu-2}\big(f^{(r-1)}(t) - Y^{(r-1)}_{r,N}(f,t)\big)\,dt \\ &= \frac{1}{(r-\nu-2)!}\int_a^x (x-t)^{r-\nu-2}\big(f^{(r-1)}(t) - Y_{1,N-r+1}(f^{(r-1)},t)\big)\,dt. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Замечание. Еще одно важное свойство систем функций $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ возникает в том случае, когда исходная система $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ является ортонормированной с весом $\rho(x)$ системой алгебраических полиномов. Как хорошо известно (см. [25]), в этом случае между тремя полиномами $\varphi_k(x)$, $\varphi_{k-1}(x)$ и $\varphi_{k-2}(x)$ существует рекуррентная связь вида

$$\varphi_k(x) = (a_k x + b_k)\varphi_{k-1}(x) + c_k\varphi_{k-2}(x).$$

С учетом этого равенства из (1.3) нетрудно получить рекуррентное соотношение следующего вида для функций $\varphi_{k,r}(x)$:

$$ra_k\varphi_{r+1,r+k}(x) = (a_k x + b_k)\varphi_{r,r+k-1}(x) - \varphi_{r,r+k}(x) + c_k\varphi_{r,r+k-2}(x).$$

Рекуррентные соотношения других типов можно получить в различных частных случаях. Например, из цитируемого ниже результата (1.21), полученного в [1], можно вывести рекуррентное соотношение для полиномов $p_{r,r+k}^{0,0}(x)$, ортогональных по Соболеву и порожденных полиномами Лежандра, исходя из рекуррентных формул для полиномов Якоби $P_n^{r,r}(x)$. На подробном рассмотрении этого вопроса мы здесь не будем останавливаться, поскольку он является объектом исследования другой нашей работы.

В [1]–[5] было показано, что частичные суммы смешанных рядов по классическим ортогональным полиномам, в отличие от сумм Фурье по этим же полиномам, успешно могут быть использованы в задачах, где требуется одновременно приближать дифференцируемую функцию и ее несколько производных. В качестве примера рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения (ОДУ)

$$a_r(x)y^{(r)}(x) + a_{r-1}(x)y^{(r-1)}(x) + \cdots + a_0(x)y(x) = h(x) \tag{1.15}$$

с начальными условиями $y^{(k)}(-1) = y_k$, $k = 0, 1, \dots, r-1$. Наряду с различными сеточными методами для решения этой задачи часто применяют так называемые спектральные методы [15]–[23]. Напомним, что суть спектрального метода решения задачи Коши для ОДУ заключается в том, что в первую очередь искомое решение $y(x)$ представляется в виде ряда Фурье

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{y}_k \psi_k(x) \tag{1.16}$$

по подходящей ортонормированной системе $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$; чаще всего в качестве $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ используют одну из классических ортонормированных систем или систему всплесков (вэйвлетов). На втором этапе осуществляется подстановка вместо $y(x)$ ряда (1.16) в уравнение (1.15). Это приводит к системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов $\widehat{y}_k$, $k = 0, 1, \dots$. На третьем этапе требуется решить эту систему с учетом начальных условий $y^{(k)}(-1) = y_k$, $k = 0, 1, \dots, r-1$, исходной задачи Коши. Одна из основных трудностей, которые возникают на этом этапе, состоит в том, чтобы выбрать такой ортонормированный базис $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, для которого искомое решение $y(x)$ уравнения (1.15), представленное в виде ряда (1.16), удовлетворяло бы начальным условиям $y^{(k)}(-1) = y_k$, $k = 0, 1, \dots, r-1$. Более того, поскольку в результате решения системы уравнений относительно неизвестных коэффициентов $\widehat{y}_k$ будет найдено только конечное их число с $k = 0, 1, \dots, n$, то весьма важно, чтобы частичная сумма ряда (1.16) вида

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \widehat{y}_k \psi_k(x),$$

будучи приближенным решением рассматриваемой задачи Коши, также удовлетворяла начальным условиям $y_n^{(k)}(-1) = y_k$, $k = 0, 1, \dots, r-1$.

Покажем, что базис

$$\bigl\{\psi_k(x) = p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x)\bigr\}_{k=0}^{\infty} \subset W^r_{L^2_\rho(-1,1)},$$

состоящий из полиномов $p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x)$, ортонормированных по Соболеву относительно скалярного произведения

$$\langle f,g\rangle=\sum_{\nu=0}^{r-1}f^{(\nu)}(-1)g^{(\nu)}(-1)+\int_{-1}^{1}f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(x)\,dt \tag{1.17}$$

и порожденных ортонормированными с весом

$$\rho(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},\qquad -1<\alpha,\beta<1,$$

полиномами Якоби $p_k^{\alpha,\beta}(x)$ посредством равенств

$$\begin{aligned} p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x)&=\frac{(x+1)^k}{k!},\qquad k=0,1,\dots,r-1,\\ p_{r,r+n}^{\alpha,\beta}(x)&=\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}p_n^{\alpha,\beta}(t)\,dt,\qquad n=0,1,\dots, \end{aligned} \tag{1.18}$$

обладает указанными свойствами. С этой целью заметим, что ряд Фурье (1.16) в случае, когда $\{\psi_k(x)=p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, приобретает в силу (1.7) следующий вид:

$$y(x)=\sum_{k=0}^{r-1}y^{(k)}(-1)\frac{(x+1)^k}{k!}+\sum_{k=r}^{\infty}\widehat{y}_{r,k}p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x), \tag{1.19}$$

где коэффициенты $\widehat{y}_{r,k}$ даются формулами

$$\widehat{y}_{r,k}=\int_{-1}^{1}y^{(r)}(t)p_{k-r}^{\alpha,\beta}(t)\rho(t)\,dt.$$

С другой стороны, из свойства (1.12), присущего частичным суммам смешанных рядов, и того, что в силу определения (1.18) при $k\geqslant r$ справедливы равенства $(p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x))^{(\nu)}|_{x=-1}=0$ для всех $0\leqslant\nu\leqslant r-1$, следует, что функция $y(x)$, представленная в виде ряда (1.19), как и частичная сумма этого ряда вида

$$\mathcal{Y}_N^{\alpha,\beta}(x)=\mathcal{Y}_N^{\alpha,\beta}(y,x)=\sum_{k=0}^{r-1}y^{(k)}(-1)\frac{(x+1)^k}{k!}+\sum_{k=r}^{N}\widehat{y}_{r,k}p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x), \tag{1.20}$$

удовлетворяют начальным условиям задачи Коши для уравнения (1.15).

Таким образом, полиномы, ортогональные по Соболеву относительно скалярного произведения (1.17), тесно связаны с задачей Коши для уравнения (1.15). Разумеется, не является исключением и один из основных объектов исследования настоящей работы – полиномы $T_{r,n}(x)$, порожденные полиномами Чебышёва первого рода $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$, представляющие собой частный случай полиномов $p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x)$, соответствующий выбору $\alpha=\beta=-1/2$.

Отметим еще, что полиномы $p_{r,k}^{0,0}(x)$, порожденные полиномами Лежандра, могут служить удобным и эффективным методом приближенного решения не только задачи Коши, но также двухточечной краевой задачи для уравнений типа (1.15). В связи с этим возникает задача об аппроксимативных свойствах частичных сумм рядов Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву. В наших работах [1]–[5], используя несколько иные обозначения, были исследованы апроксимативные свойства частичных сумм вида (1.20). Наиболее детально были исследованы аппроксимативные свойства частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра (случай $\alpha=\beta=0$). Дело в том, что, как было обнаружено еще в работе [1] и многократно использовалось в [1]–[5], полиномы $p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x)$, определенные равенством (1.18), в случае $\alpha=\beta=0$ допускают следующее представление:

$$p_{r,r+k}^{0,0}(x)=\frac{(-1)^r}{2^r k^{[r]}\sqrt{h_k^{0,0}}}(1-x^2)^r P_{k-r}^{r,r}(x), \qquad k=r,r+1,\dots, \tag{1.21}$$

где $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ – классический полином Якоби, $h_n^{0,0}$ – квадрат нормы полинома Лежандра $P_n^{0,0}(x)$ (см. § 5), которое играет ключевую роль при исследовании аппроксимативных свойств частичных сумм $\mathcal{Y}_N^{0,0}(y,x)$, определенных равенством (1.20). В частности, в работе [3] существенно используя представление (1.21), была доказана следующая неулучшаемая по порядку оценка при $N\to\infty$:

$$\sup_{f\in W^r}\max_{x\in[-1,1]}\frac{|f^{(\nu)}(x)-(\mathcal{Y}_N^{0,0}(f,x))^{(\nu)}|}{(1-x^2)^{(r-\nu)-1/4}}\leqslant c(r)\frac{\ln N}{N^{r-\nu}}, \qquad 0\leqslant\nu\leqslant r, \tag{1.22}$$

где W^r – класс функций, непрерывно дифференцируемых r раз, для которых $\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f^{(r)}(x)|\leqslant 1$.

Что касается случая дробных α и β, то представления типа (1.21) для $p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x)$ получены не были, поэтому вопрос о доказательстве оценок, аналогичных (1.22), для $\mathcal{Y}_N^{\alpha,\beta}(f,x)$ при $-1<\alpha,\beta<1$ остается открытым.

В настоящей статье вводятся и исследуются системы функций $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированных по Соболеву относительно скалярного произведения (1.6) и порожденных системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Рассмотрена задача о представлении функций $\varphi_{r,k}(x)$, определенных равенством (1.3), в виде, более удобном для исследования их асимптотических свойств при $k\to\infty$. Эта задача решена для функций, ортогональных по Соболеву, порожденных системой Хаара, и для полиномов $T_{r,n}(x)$, порожденных полиномами Чебышёва первого рода $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$. Для $T_{r,n}(x)$ получено представление (равенство (6.15) и теорема 6.1), аналогичное представлению (1.21). Основное внимание уделено исследованию условий равномерной сходимости смешанных рядов по рассматриваемым двум классическими системам.

§ 2. О сходимости смешанных рядов по общим ортонормированным системам

Рассмотрим сначала задачу о полноте в $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ системы $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, состоящей из функций, определенных равенствами (1.3) и (1.4).

Теорема 2.1. *Предположим, что функции $\varphi_k(x)$, $k=0,1,\dots$, образуют полную в $L^2_\rho(a,b)$ ортонормированную с весом $\rho(x)$ систему на отрезке $[a,b]$. Тогда система $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, порожденная системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ посредством равенств* (1.3) *и* (1.4), *полна в $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения* (1.6).

Доказательство. Из равенства (1.3) следует, что если $r \leqslant k$ и $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$, то $\varphi_{r,k}^{(\nu)}(x)\big|_{x=a} = 0$, поэтому в силу (1.5), (1.6), имеем

$$\langle \varphi_{r,k}, \varphi_{r,l} \rangle = \int_a^b (\varphi_{r,k}(x))^{(r)}(\varphi_{r,l}(x))^{(r)}\rho(x)\,dx \\ = \int_a^b \varphi_{k-r}(x)\varphi_{l-r}(x)\rho(x)\,dx = \delta_{kl}, \qquad k, l \geqslant r, \tag{2.1}$$

а из (1.4) и (1.6) имеем

$$\langle \varphi_{r,k}, \varphi_{r,l} \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} \varphi_{r,k}^{(\nu)}(x)\big|_{x=a}\varphi_{r,l}^{(\nu)}(x)\big|_{x=a} = \delta_{kl}, \qquad k, l < r. \tag{2.2}$$

Очевидно также, что

$$\langle \varphi_{r,k}, \varphi_{r,l} \rangle = 0, \quad \text{если} \quad k < r \leqslant l \quad \text{или} \quad l < r \leqslant k. \tag{2.3}$$

Это означает, что функции $\varphi_{r,k}(t)$, $k = 0, 1, \ldots$, образуют в $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ ортонормированную систему относительно скалярного произведения (1.6). Остается убедиться в ее полноте в $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$. С этой целью покажем, что если для некоторой функции $f = f(x) \in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ и для всех $k = 0, 1, \ldots$ справедливы равенства $\langle f, \varphi_k \rangle = 0$, то $f(x) \equiv 0$. В самом деле, если $k \leqslant r-1$, то $\langle f, \varphi_{r,k} \rangle = f^{(k)}(a)$, поэтому с учетом того, что $\langle f, \varphi_{r,k} \rangle = 0$, для нашей функции $f(x)$ формула Тейлора приобретает вид

$$f(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\,dt. \tag{2.4}$$

С другой стороны, для всех $k \geqslant r$ имеем

$$0 = \langle f, \varphi_{r,k} \rangle = \int_a^b f^{(r)}(x)\varphi_{r,k}^{(r)}(x)\rho(x)\,dx = \int_a^b f^{(r)}(x)\varphi_{k-r}(x)\rho(x)\,dx.$$

Отсюда и из того, что $\varphi_m(x)$, $m = 0, 1, \ldots$, образуют в $L^2_\rho(a,b)$ полную ортонормированную систему, имеем $f^{(r)}(x) = 0$ почти всюду на $[a,b]$. Поэтому $f(x) \equiv 0$. Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. *Предположим, что $1/\rho(x) \in L(a,b)$, а функции $\varphi_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots$, образуют полную в $L^2_\rho(a,b)$ ортонормированную с весом $\rho(x)$ систему на отрезке $[a,b]$, $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ – система, ортонормированная в $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ относительно скалярного произведения* (1.6), *порожденная системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ посредством равенств* (1.3) *и* (1.4). *Тогда, если $f(x) \in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$, то ряд Фурье (смешанный ряд)* (1.7) *сходится к функции $f(x)$ равномерно относительно $x \in [a,b]$.*

Доказательство. Обозначим через $S_n(f^{(r)}) = S_n(f^{(r)}, x)$ частичную сумму ряда Фурье функции $f^{(r)}(x) \in L^2_\rho(a,b)$ по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$, т. е.

$$S_n(f^{(r)}, x) = \sum_{k=0}^n f_{r,k+r}\varphi_k(x), \tag{2.5}$$

где коэффициенты $f_{r,k+r}$, $k = 0, 1, \dots$, определены равенством (1.8). Из условий теоремы 2.2 следует, что при $n \to \infty$ справедливо соотношение

$$\|f^{(r)} - S_n(f^{(r)})\|_{L^2_\rho(a,b)} \to 0. \tag{2.6}$$

Далее, обозначим через $Y_{n+r}(f, x)$ частичную сумму смешанного ряда (1.7) следующего вида:

$$Y_{n+r}(f, x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{n+r} f_{r,k} \varphi_{r,k}(x), \tag{2.7}$$

и запишем формулу Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\, dt. \tag{2.8}$$

Из (2.7) и (2.8) имеем

$$f(x) - Y_{n+r}(f, x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\, dt - \sum_{k=r}^{n+r} f_{r,k} \varphi_{r,k}(x). \tag{2.9}$$

Обратимся к равенству (1.3), тогда (2.9) можно переписать так

$$\begin{aligned} f(x) &- Y_{n+r}(f, x) \\ &= \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\, dt - \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} \sum_{k=r}^{n+r} f_{r,k} \varphi_{k-r}(t)\, dt \\ &= \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} \bigl[f^{(r)}(t) - S_n(f^{(r)}, t)\bigr]\, dt. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Из (2.10) и неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} |f(x) &- Y_{n+r}(f, x)| \\ &\leqslant \frac{1}{(r-1)!} \biggl(\int_a^b \frac{|x-t|^{2(r-1)}}{\rho(t)}\, dt\biggr)^{1/2} \biggl(\int_a^b \bigl[f^{(r)}(t) - S_n(f^{(r)}, t)\bigr]^2 \rho(t)\, dt\biggr)^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Сопоставляя (2.6) с (2.11), убеждаемся в справедливости теоремы 2.2.

Ниже мы остановимся на важных частных случаях систем функций, ортогональных по Соболеву относительного скалярного произведения вида (1.6), порожденных классическими ортогональными системами такими, как система Хаара и система полиномов Чебышёва первого рода и рассмотрим их особенности.

§ 3. Некоторые сведения о системе Хаара

При исследовании системы функций $\mathcal{X}_{r,n}(x)$, $n = 0, 1, \dots$, ортогональных по Соболеву, порожденных функциями Хаара $\varphi_k(x) = \chi_{k+1}(x)$, $k = 0, 1, \dots$, нам понадобятся следующие обозначения [24]. Пусть $n = 2^k + i$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$, $k = 0, 1, \dots,$

$$\Delta_n = \Delta_k^i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \qquad \overline{\Delta}_n = \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right], \quad n \geqslant 2, \qquad \Delta_1 = [0,1],$$
$$\Delta_n^+ = (\Delta_k^i)^+ = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) = \Delta_{k+1}^{2i-1},$$
$$\Delta_n^- = (\Delta_k^i)^- = \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right) = \Delta_{k+1}^{2i}.$$

Система Хаара – это система функций $\chi = \{\chi_n\}_{n=1}(x)^\infty$, $x \in [0,1]$, в которой $\chi_1(x) = 1$, а функция $\chi_n(x)$ с $2^k < n \leqslant 2^{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$, определяется так

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \overline{\Delta}_n, \\ 2^{k/2}, & \text{если } x \in \Delta_n^+, \\ -2^{k/2}, & \text{если } x \in \Delta_n^-. \end{cases} \tag{3.1}$$

Значения в точках разрыва функции $\chi_n(x)$ выбирается так, чтобы выполнялись равенства:

$$\chi_n(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2}[\chi_n(x+\delta) + \chi_n(x-\delta)], \qquad x \in (0,1),$$
$$\chi_n(0) = \lim_{\delta \to 0} \chi_n(\delta), \qquad \chi_n(1) = \lim_{\delta \to 0} \chi_n(1-\delta).$$

Непосредственно из (3.1) выводим следующее свойство ортогональности функций Хаара:

$$\int_0^1 \chi_n(x)\chi_m(x)\,dx = \delta_{nm}. \tag{3.2}$$

Если функция $f = f(x)$ интегрируема на $[0,1]$, то мы можем определить коэффициенты Фурье–Хаара

$$f_{0,k} = \int_0^1 f(t)\chi_k(t)\,dt \tag{3.3}$$

и ряд Фурье–Хаара

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{0,k}\chi_k(x). \tag{3.4}$$

Через $Q_n(f,x)$ обозначим частичную сумму Фурье–Хаара вида

$$Q_n(f) = Q_n(f,x) = \sum_{k=1}^{n} f_{0,k}\chi_k(x). \tag{3.5}$$

Хорошо известно [24], что если $p \geqslant 1$ и $f \in L^p(0,1)$, то

$$\int_0^1 |f(x) - Q_n(f,x)|^p\,dx \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{3.6}$$

Далее рассмотрим весовую функцию $\rho = \rho(x) = (x(1-x))^{-1/2}$, заданную на $(0,1)$. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть* $f \in L^1_\rho(0,1)$. *Тогда* $Q_n(f)$ *сходится к* f *в метрике пространства* $L^1_\rho(0,1)$. *Другими словами, если*

$$\int_0^1 \frac{|f(x)|}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx < \infty,$$

то

$$I_n = \int_0^1 \frac{|f(x) - Q_n(f,x)|}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{3.7}$$

Доказательство. Представим величину I_n в виде

$$I_n = \int_0^{1/2} \frac{|f(x) - Q_n(f,x)|}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx + \int_{1/2}^1 \frac{|f(x) - Q_n(f,x)|}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = I'_n + I''_n \tag{3.8}$$

и покажем, что $I'_n, I''_n \to 0$ при $n \to \infty$. Достаточно рассмотреть только одну из этих величин, например, I'_n. Имеем

$$I'_n \leqslant \sqrt{2}\int_0^{1/2} \frac{|f(x) - Q_n(f,x)|}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{2}\int_0^{1/2} \left|\frac{f(x)}{\sqrt{x}} - \frac{Q_n(f,x)}{\sqrt{x}}\right| dx. \tag{3.9}$$

Заметим, что функция $h(x) = f(x)/\sqrt{x}$ интегрируема на $(0,1)$, поэтому мы можем рассмотреть ее сумму Фурье–Хаара $Q_n(h,x)$, причем

$$\int_0^1 |h(x) - Q_n(h,x)|\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Из (3.9) получаем

$$I'_n \leqslant \sqrt{2}\int_0^{1/2} |h(x) - Q_n(h,x)|\,dx + \sqrt{2}\int_0^{1/2} \left|Q_n(h,x) - \frac{Q_n(f,x)}{\sqrt{x}}\right| dx. \tag{3.10}$$

Обозначим через $\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \dots, \lambda_{nn}$ интервалы постоянства системы функций $\chi_1(x), \chi_2(x), \dots, \chi_n(x)$. Если $n = 2^k + i$, то они имеют вид $\lambda_{ns} = \Delta^s_{k+1}$ при $s = 1, 2, \dots, 2i$ и $\lambda_{ns} = \Delta^s_k$ при $s = 2i+1, \dots, n$, а их длины

$$|\lambda_{ns}| = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k+1}}, & 1 \leqslant s \leqslant 2i, \\ \dfrac{1}{2^k}, & 2i+1 \leqslant s \leqslant n. \end{cases}$$

Тогда, воспользовавшись формулой (см. [24])

$$Q_n(f,x) = \frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int_{\lambda_{ns}} f(t)\,dt, \tag{3.11}$$

мы можем записать

$$\int_0^{1/2} \left|Q_n(h,x) - \frac{Q_n(f,x)}{\sqrt{x}}\right| dx = U'_n + U''_n, \tag{3.12}$$

где

$$U_n' = \int_{\lambda_{n1}} dx\left|\frac{1}{|\lambda_{n1}|}\int_{\lambda_{n1}} \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\,dt - \frac{1}{|\lambda_{n1}|\sqrt{x}}\int_{\lambda_{n1}} f(t)\,dt\right|, \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
U_n'' &= \sum_{\lambda_{ns}\subset[\frac{1}{2^{k+1}},\frac12]}\int_{\lambda_{ns}} dx\left|\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int_{\lambda_{ns}}\frac{f(t)}{\sqrt{t}}\,dt - \frac{1}{|\lambda_{ns}|\sqrt{x}}\int_{\lambda_{ns}} f(t)\,dt\right| \\
&= \sum_{\lambda_{ns}\subset[\frac{1}{2^{k+1}},\frac12]}\int_{\lambda_{ns}} dx\left|\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int_{\lambda_{ns}}\frac{f(t)(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{\sqrt{t}\sqrt{x}}\,dt\right| \\
&= \sum_{\lambda_{ns}\subset[\frac{1}{2^{k+1}},\frac12]}\int_{\lambda_{ns}} dx\left|\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int_{\lambda_{ns}}\frac{f(t)(x-t)}{\sqrt{t}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{t})}\,dt\right| \\
&\leqslant \sum_{\lambda_{ns}\subset[\frac{1}{2^{k+1}},\frac12]}\int_{\lambda_{ns}}\frac{|f(t)|\,dt}{\sqrt{t}}\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int_{\lambda_{ns}}\frac{|x-t|}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{t})}\,dx \\
&\leqslant \sum_{\lambda_{ns}\subset[\frac{1}{2^{k+1}},\frac12]}\int_{\lambda_{ns}}\frac{|f(t)|\,dt}{\sqrt{t}}\int_{\lambda_{ns}}\frac{dx}{x} = \sum_{\lambda_{ns}\subset[\frac{1}{2^{k+1}},\frac12]}\int_{\lambda_{ns}}\frac{|f(t)|}{\sqrt{t}}\ln\frac{s}{s-1}\,dt \\
&\leqslant \sum_{\lambda_{ns}\subset[\frac{1}{2^{k+1}},\frac12]}\frac{1}{s-1}\int_{\lambda_{ns}}\frac{|f(t)|\,dt}{\sqrt{t}}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Применяя преобразование Абеля, из (3.14) имеем

$$U_n'' \leqslant \sum_{s=2}^{s_k-1}\frac{1}{s(s-1)}\int_{1/2^{k+1}}^{s/2^k}\frac{|f(t)|}{\sqrt{t}}\,dt + \frac{1}{s_k-1}\int_{1/2^{k+1}}^{1/2}\frac{|f(t)|}{\sqrt{t}}\,dt, \tag{3.15}$$

где число s_k выбрано так, чтобы правый конец интервала λ_{ns_k} совпал с $1/2$. Из (3.13) и (3.15) нетрудно увидеть, что если $f\in L^1_\rho(0,1)$, где $\rho=\rho(x)=(x(1-x))^{-1/2}$, то $U_n', U_n''\to 0$ при $n\to\infty$. Сопоставляя этот факт с (3.10) и (3.12), мы замечаем, что $I_n'\to 0$, если $n\to\infty$. Лемма 3.1 доказана.

§ 4. Ортонормированная по Соболеву система функций, порожденная функциями Хаара

Положим $\varphi_k(x)=\chi_{k+1}(x)$, $k=0,1,\dots$, и для каждого натурального r мы определим систему функций $\{\mathcal{X}_{r,n}\}_{n=r}^{\infty}$ следующим образом:

$$\mathcal{X}_{r,k+r}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1}\varphi_k(x)\,dt, \qquad k=0,1,2,\dots. \tag{4.1}$$

Кроме того, определим конечный набор функций

$$\mathcal{X}_{r,n}(x) = \frac{x^n}{n!}, \qquad n=0,1,\dots,r-1. \tag{4.2}$$

Пусть $W^r_{L^2(0,1)}$ – пространство Соболева с $L^2(0,1)=L^2_\rho(0,1)$, а $\rho=\rho(x)\equiv 1$. Из теоремы 2.1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 4.1. *Система* $\{\mathcal{X}_{r,n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, *порожденная посредством равенств* (4.1) *и* (4.2) *системой Хаара* $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, *полна в* $W^r_{L^2(0,1)}$ *и ортонормирована относительно скалярного произведения*

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int_0^1 f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\,dt. \tag{4.3}$$

Ряд Фурье по системе $\{\mathcal{X}_{r,n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет следующий вид (см. (1.7)):

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{r-1} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=r}^{\infty} f_{r,n}\mathcal{X}_{r,n}(x), \tag{4.4}$$

где

$$f_{r,n} = \int_0^1 f^{(r)}(t)\varphi_{n-r}(t)\,dt = \int_0^1 f^{(r)}(t)\chi_{n-r+1}(t)\,dt.$$

Используя обозначения, отличные от принятых в настоящей работе, в [6] получено следующее представление для функций $\mathcal{X}_{r,n}(x)$, определенных равенством (4.1):

$$\mathcal{X}_{r,n+r-1}(x) = \frac{2^{k/2}}{r!}\begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{i-1}{2^k}, \\ \left(x - \dfrac{i-1}{2^k}\right)^r, & \dfrac{i-1}{2^k} \leqslant x \leqslant \dfrac{2i-1}{2^{k+1}}, \\ \left(x - \dfrac{i-1}{2^k}\right)^r - 2\left(x - \dfrac{2i-1}{2^{k+1}}\right)^r, & \dfrac{2i-1}{2^{k+1}} \leqslant x \leqslant \dfrac{i}{2^k}, \\ \left(x - \dfrac{i-1}{2^k}\right)^r - 2\left(x - \dfrac{2i-1}{2^{k+1}}\right)^r + \left(x - \dfrac{i}{2^k}\right)^r, & \dfrac{i}{2^k} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{4.5}$$

где $n = 2^k + i$, $i = 1, 2, \ldots, 2^k$, $k = 0, 1, \ldots$, и, как следствие, доказано, что

$$\mathcal{X}_{r,n+r-1}(x) = \frac{2^{k/2}}{r!}\Delta^2_{1/2^{k+1}}(x-t)^r_+\big|_{t=(i-1)/2^k}, \tag{4.6}$$

где $\Delta^2_h g(t)$ – конечная разность второго порядка с шагом h,

$$a^r_+ = \begin{cases} a^r, & \text{если } a \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Используя свойства (4.5) и (4.6), в цитированной выше работе [6] исследованы аппроксимативные свойства частичных сумм ряда (4.4) следующего вида:

$$Y_{r,N}(f, x) = \sum_{n=0}^{r-1} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=r}^{N} f_{r,n}\mathcal{X}_{r,n}(x) \tag{4.7}$$

для функций f из классов $W^r_{L^p(0,1)}$ с $p=1$ и $p=2$. В частности, для $f\in W^r_{L(0,1)}$ получены следующие оценки:

$$\left|f^{(\nu)}(x)-Y^{(\nu)}_{r,N}(f,x)\right|\leqslant\frac{x^{r-1-\nu}}{(r-1-\nu)!}\omega_2\biggl(f^{(r-1)},\frac{1}{N-r+1}\biggr),\qquad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad(4.8)$$

$$\left|f^{(\nu)}(x)-Y^{(\nu)}_{r,N}(f,x)\right|\leqslant\frac{x^{r-1-\nu}}{(r-1-\nu)!}\eta\biggl(f^{(r)},\frac{1}{N-r+1}\biggr),\qquad 0\leqslant x\leqslant 1,\qquad(4.9)$$

где $0\leqslant\nu\leqslant r-1$,

$$\omega_2(g,\delta)=\sup_{\substack{0\leqslant h\leqslant\delta,\\ h\leqslant x\leqslant 1-h}}|g(x+h)+g(x-h)-2g(x)|,$$

$$\eta(g,\delta)=\sup_{\substack{0\leqslant h\leqslant\delta,\\ h\leqslant x\leqslant 1-h}}\left|\int_0^h[g(x+t)-g(x+t-h)]\,dt\right|.$$

В качестве следствия неравенства (4.9) в [6] показано, что если $f^{(r)}(x)$ удовлетворяет условию Липшица $|f^{(r)}(x)-f^{(r)}(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha$, $x,y\in[0,1]$, $0<\alpha\leqslant 1$, то имеет место неравенство

$$\left|f^{(\nu)}(x)-Y^{(\nu)}_{r,N}(f,x)\right|\leqslant\frac{Mx^{r-1-\nu}}{(r-1-\nu)!}(N-r+1)^{-1-\alpha},\qquad 0\leqslant x\leqslant 1,\qquad(4.10)$$

где $0\leqslant\nu\leqslant r-1$. Для $\nu=r-1$ неравенство (4.8) приобретает следующий вид:

$$\left|f^{(r-1)}(x)-Y^{(r-1)}_{r,N}(f,x)\right|\leqslant\omega_2\biggl(f^{(r-1)},\frac{1}{N-r+1}\biggr).\qquad(4.11)$$

Заметим, что из (1.12) вытекают следующие равенства

$$(Y_{r,N}(f,x))^{(\nu)}_{x=0}=f^{(\nu)}(0),\qquad 0\leqslant\nu\leqslant r-1,$$

однако оценка (4.11) не учитывает этого обстоятельства в том смысле, что величина $\omega_2(f^{(r-1)},1/(N-r+1))$ не зависит от переменной x (и не стремится к нулю при $x\to 0$). В связи с этим возникает задача о получении такой оценки величины $\left|f^{(\nu)}(x)-Y^{(\nu)}_{r,N}(f,x)\right|$, которая учитывает тот факт, что

$$\lim_{x\to 0}\left|f^{(\nu)}(x)-Y^{(\nu)}_{r,N}(f,x)\right|=0.$$

Рассмотрим предварительно случай $\nu=r-1$. Пусть $f\in W^r_{L_\rho(0,1)}$, $g(x)=f^{(r-1)}(x)$. Тогда, очевидно, $g\in W^1_{L_\rho(0,1)}$, поэтому в силу равенства

$$(Y_{1,N-r+1}(f,x))'=Q_{N-r+1}(f',x),\qquad(4.12)$$

которое в силу (1.5), (4.7) и (3.5) справедливо для $f\in W^1_{L(0,1)}$ при почти всех $x\in(0,1)$, мы можем записать

$$g(x)-Y_{1,N-r+1}(g,x)=\int_0^x[g'(t)-Q_{N-r+1}(g',t)]\,dt.\qquad(4.13)$$

Пусть $n = N - r + 1 = 2^k + i$, $1 \leqslant i \leqslant 2^k$. Тогда мы можем воспользоваться следующим равенством [24]:

$$Q_n(f,x) = \begin{cases} Q_{2^{k+1}}(f,x), & x \in \left[0, \dfrac{i}{2^k}\right), \\ Q_{2^k}(f,x), & x \in \left(\dfrac{i}{2^k}, 1\right]. \end{cases} \tag{4.14}$$

Рассмотрим три случая:

$$1) \quad x \in \left[0, \frac{i}{2^k}\right); \qquad 2) \quad x \in \left(\frac{i}{2^k}, 1\right); \qquad 3) \quad x = \frac{i}{2^k} \quad \text{или} \quad x = 1.$$

Если $x \in [0, i/2^k)$, то через s_x обозначим такое натуральное число, для которого $x \in [s_x/2^{k+1}, s_x + 1/2^{k+1})$. Тогда из (4.13) имеем

$$\begin{aligned} g(x) - Y_{1,N-r+1}(g,x) &= \sum_{s=1}^{s_x} \int_{\Delta_{k+1}^s} \left[g'(t) - 2^{k+1} \int_{\Delta_{k+1}^s} g'(\tau) d\tau\right] dt \\ &\quad + \int_{s_x/2^{k+1}}^{x} \left[g'(t) - 2^{k+1} \int_{\Delta_{k+1}^{s_x+1}} g'(\tau) d\tau\right] dt \\ &= \sum_{s=1}^{s_x} \left[\int_{\Delta_{k+1}^s} g'(t) - 2^{k+1} \int_{\Delta_{k+1}^s} \int_{\Delta_{k+1}^s} g'(\tau) d\tau\right] dt \\ &\quad + g(x) - g\left(\frac{s_x}{2^{k+1}}\right) - 2^{k+1}\left(x - \frac{s_x}{2^{k+1}}\right)\left[g\left(\frac{s_x+1}{2^{k+1}}\right) - g\left(\frac{s_x}{2^{k+1}}\right)\right]. \end{aligned}$$

Отсюда для $x \in [0, i/2^k)$ находим

$$\begin{aligned} &g(x) - Y_{1,N-r+1}(g,x) \\ &\quad = g(x) - g\left(\frac{s_x}{2^{k+1}}\right) - 2^{k+1}\left(x - \frac{s_x}{2^{k+1}}\right)\left[g\left(\frac{s_x+1}{2^{k+1}}\right) - g\left(\frac{s_x}{2^{k+1}}\right)\right] = \Gamma_n^1(g,x). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Перейдем к случаю $x \in (i/2^k, 1)$ и обозначим через j_x такое натуральное число, для которого $x \in [j_x/2^{k+1}, (j_x+1)/2^{k+1})$. В силу (4.13) имеем

$$g(x) - Y_{1,N-r+1}(g,x) = U_1 + U_2, \tag{4.16}$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= \int_0^{i/2^k} [g'(t) - Q_n(g',t)]\, dt = \int_0^{2i/2^{k+1}} [g'(t)\, dt - Q_n(g',t)]\, dt \\ &= \sum_{s=1}^{2i} \left[\int_{\Delta_{k+1}^s} g'(t)\, dt - \int_{\Delta_{k+1}^s} 2^{k+1} \int_{\Delta_{k+1}^s} g'(\tau) d\tau\, dt\right] = 0, \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} U_2 &= \int_{i/2^k}^{x} [g'(t) - Q_n(g',t)]\, dt = \int_{i/2^k}^{j_x/2^k} [g'(t)\, dt - Q_n(g',t)]\, dt \\ &\quad + \int_{j_x/2^k}^{x} [g'(t) - Q_n(g',t)]\, dt = \int_{j_x/2^k}^{x} g'(t)\, dt - \int_{j_x/2^k}^{x} Q_{2^k}(g',t)\, dt \\ &= g(x) - g\left(\frac{j_x}{2^k}\right) - 2^k\left(x - \frac{j_x}{2^k}\right)\left[g\left(\frac{j_x+1}{2^k}\right) - g\left(\frac{j_x}{2^k}\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.18}$$

В третьем случае, когда $x = i/2^k$ или $x = 1$, нетрудно увидеть, что

$$g(x) - Y_{1,N-r+1}(g,x) = 0. \tag{4.19}$$

Из (4.16)–(4.19) находим, что для $x \in [i/2^k, 1]$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} &g(x) - Y_{1,N-r+1}(g,x) \\ &\quad = g(x) - g\left(\frac{j_x}{2^k}\right) - 2^k\left(x - \frac{j_x}{2^k}\right)\left[g\left(\frac{j_x+1}{2^k}\right) - g\left(\frac{j_x}{2^k}\right)\right] = \Gamma_n^2(g,x). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Для $n = N - r + 1 = 2^k + i$ введем в рассмотрение следующую функцию:

$$\Gamma_n(g,x) = \begin{cases} \Gamma_n^1(g,x), & x \in \left[0, \dfrac{i}{2^k}\right), \\ \Gamma_n^2(g,x), & x \in \left[\dfrac{i}{2^k}, 1\right], \end{cases} \tag{4.21}$$

где функции $\Gamma_n^1(g,x)$ и $\Gamma_n^2(g,x)$ определены с помощью равенств (4.15) и (4.20). Тогда используя (4.15), (4.20), (4.21), нетрудно увидеть, что

$$|\Gamma_n(g,x)| \leqslant \begin{cases} \omega\left(g, x - \dfrac{s_x}{2^{k+1}}\right) + 2^{k+1}\left(x - \dfrac{s_x}{2^{k+1}}\right)\omega(g, 2^{-k-1}), & x \in \left[0, \dfrac{i}{2^k}\right), \\ \omega\left(g, x - \dfrac{j_x}{2^k}\right) + 2^k\left(x - \dfrac{j_x}{2^k}\right)\omega(g, 2^{-k}), & x \in \left[\dfrac{i}{2^k}, 1\right], \end{cases} \tag{4.22}$$

где

$$\omega(g,\delta) = \max_{x,y\in[0,1],\, |x-y|\leqslant\delta} |g(x) - g(y)|$$

– модуль непрерывности функции $g(x)$. Таким образом, в случае $\nu = r - 1$ задача об оценке отклонения $|g(x) - Y_{1,N-r+1}(g,x)|$, учитывающей его поведение при приближении переменной x к 0, полностью решена с помощью точных равенств (4.15) и (4.20) и неравенства (4.22). При исследовании этой задачи при $0 \leqslant \nu \leqslant r - 2$ нам понадобится следующая величина:

$$\gamma_n(g,x) = \max_{0\leqslant t\leqslant x} |\Gamma_n(g,t)|, \tag{4.23}$$

поведение которой при $n \to \infty$ мы рассмотрим позже. Но уже сейчас заметим, что, как это непосредственно вытекает из (4.22) и (4.23), имеет место предельное соотношение $\lim_{x\to 0} \gamma_n(g,x) = 0$.

Переходя к задаче об оценке разности $f^{(\nu)}(x) - Y_{r,N}^{(\nu)}(f,x)$, мы отметим предварительно дальнейшие свойства частичных сумм $Y_{r,N}(f,x)$. Из (1.5) и (4.7) следует, что

$$Y_{r,N}^{(\nu)}(f,x) = \sum_{k=0}^{r-1-\nu} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=r-\nu}^{N-\nu} f_{r-\nu,k}^{(\nu)} \mathcal{X}_{r-\nu,k}(x) = Y_{r-\nu,N-\nu}(f^{(\nu)},x). \tag{4.24}$$

Кроме того, в силу (1.12) справедливо, что $(Y_{r-\nu,N-\nu}(f^{(\nu)},x))^{(j)}_{x=0}-f^{(j)}(0)=0$ при $0\leqslant j\leqslant r-\nu-2$, поэтому с учетом (4.24) имеем

$$\begin{aligned}f^{(\nu)}(x)-Y_{r,N}^{(\nu)}(f,x)&=\frac{1}{(r-\nu-2)!}\int_0^x(x-t)^{r-\nu-2}\bigl(f^{(r-1)}(t)-Y_{r,N}^{(r-1)}(f,t)\bigr)\,dt\\&=\frac{1}{(r-\nu-2)!}\int_0^x(x-t)^{r-\nu-2}\bigl(f^{(r-1)}(t)-Y_{1,N-r+1}(f^{(r-1)},t)\bigr)\,dt.\end{aligned}\tag{4.25}$$

Подставим в (4.25) вместо $f^{(r-1)}(t)-Y_{1,N-r+1}(f^{(r-1)},t)$ функцию $\Gamma_n(g,x)$, определенную равенством (4.21), в котором $n=N-r+1=2^k+i$. Это дает

$$f^{(\nu)}(x)-Y_{r,N}^{(\nu)}(f,x)=\frac{1}{(r-\nu-2)!}\int_0^x(x-t)^{r-\nu-2}\Gamma_n(f^{(r-1)},t)\,dt.\tag{4.26}$$

Из (4.23) и (4.26) выводим следующее неравенство при $n=N-r+1=2^k+i$:

$$\begin{aligned}\bigl|f^{(\nu)}(x)-Y_{r,N}^{(\nu)}(f,x)\bigr|&\leqslant\frac{1}{(r-\nu-2)!}\int_0^x(x-t)^{r-\nu-2}|\Gamma_n(f^{(r-1)},t)|\,dt\\&\leqslant\frac{x^{r-\nu-1}}{(r-\nu-1)!}\gamma_n(f^{(r-1)},x),\end{aligned}\tag{4.27}$$

в котором величина $\gamma_n(f^{(r-1)},x)$, как уже отмечалось, стремится к нулю вместе с переменной x.

Нам остается рассмотреть поведение этой величины при $n\to\infty$. С этой целью заметим, что для произвольного интервала $(a,b)\subset(0,1)$ и произвольной непрерывной на $[0,1]$ функции $g(x)$ имеет место (см. [24], с. 208) неравенство

$$J=\max_{x\in[a,b]}|g(x)-l(x)|\leqslant\omega_2\biggl(g,\frac{b-a}{2}\biggr),\tag{4.28}$$

где

$$l(x)=g(a)+\frac{g(b)-g(a)}{b-a}(x-a),\qquad x\in[0,1].$$

Положим $n=N-r+1=2^k+i$ и применим неравенство (4.28) к интервалу $\Delta_k^{j_x+1}$ и разности $g(x)-l(x)$, где

$$l(x)=g\biggl(\frac{j_x}{2^k}\biggr)+2^k\biggl(x-\frac{j_x}{2^k}\biggr)\biggl[g\biggl(\frac{j_x+1}{2^k}\biggr)-g\biggl(\frac{j_x}{2^k}\biggr)\biggr].$$

Это дает

$$|\Gamma_n^2(g,x)|=|g(x)-l(x)|\leqslant\omega_2\biggl(g,\frac{1}{2^{k+1}}\biggr),\qquad x\in\biggl[\frac{i}{2^k},1\biggr].\tag{4.29}$$

Совершенно аналогично находим

$$|\Gamma_n^1(g,x)|\leqslant\omega_2\biggl(g,\frac{1}{2^{k+2}}\biggr),\qquad x\in\biggl[0,\frac{i}{2^k}\biggr].\tag{4.30}$$

Сопоставляя (4.29) и (4.30) с (4.21), мы получаем для $g = f^{(r-1)}$ оценку

$$|\Gamma_n(f^{(r-1)}, x)| \leqslant \omega_2\left(f^{(r-1)}, \frac{1}{n}\right), \qquad x \in [0,1]. \tag{4.31}$$

Из (4.23) и (4.31), в свою очередь, выводим

$$|\gamma_n(f^{(r-1)}, x)| \leqslant \omega_2\left(f^{(r-1)}, \frac{1}{n}\right), \qquad x \in [0,1]. \tag{4.32}$$

В случае, когда функция $f^{(r-1)}(x)$ является абсолютно непрерывной на $[0,1]$, величины $\omega_2(f^{(r-1)}, \delta)$ и $\eta(f^{(r)}, \delta)$ (см.(4.8) и (4.9)) совпадают, т. е.

$$\omega_2(f^{(r-1)}, \delta) = \eta(f^{(r)}, \delta),$$

поэтому вместо (4.31) и (4.32) можно использовать также неравенства

$$|\Gamma_n(f^{(r-1)}, x)| \leqslant \eta\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right), \qquad |\gamma_n(f^{(r)}, x)| \leqslant \eta\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right). \tag{4.33}$$

Подводя итоги, мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть $r \geqslant 1$, $f \in W^r_{L(0,1)}$, $n = N - r + 1 = 2^k + i$. Тогда имеют место следующие оценки*:

$$\left|f^{(r-1)}(x) - Y^{(r-1)}_{r,N}(f,x)\right| \leqslant |\Gamma_n(f^{(r-1)}, x)|,$$
$$\left|f^{(\nu)}(x) - Y^{(\nu)}_{r,N}(f,x)\right| \leqslant \frac{x^{r-\nu-1}}{(r-\nu-1)!}\gamma_n(f^{(r-1)}, x), \quad 0 \leqslant \nu \leqslant r-2,$$

в которых для функции $\Gamma_n(f^{(r-1}, x)$ справедливы неравенства (4.22) *и* (4.31), *а для функции $\gamma_n(f^{(r-1)}, x)$ верно неравенство* (4.32).

Из леммы 3.1 и равенства (4.12) вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 4.1. *Пусть $\rho = \rho(x) = (x(1-x))^{-1/2}$, $f \in W^1_{L_\rho(0,1)}$. Тогда*

$$\int_0^1 \frac{|f'(x) - (Y_{1,N}(f,x))'|}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \to 0, \qquad N \to \infty.$$

Из леммы 4.1 и теоремы 4.1, в свою очередь, выводим следующий результат, который нам понадобится при исследовании задачи о равномерной сходимости ряда Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным полиномами Чебышёва первого рода.

Предложение 4.1. *Пусть $\rho = \rho(x) = (x(1-x))^{-1/2}$, $f \in W^1_{L_\rho(0,1)}$. Тогда*

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x) - Y_{1,N}(f,x)| + \int_0^1 \frac{|f'(x) - (Y_{1,N}(f,x))'|}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \to 0, \qquad N \to \infty.$$

§ 5. Некоторые сведения о полиномах Якоби

При изучении свойств полиномов, ортогональных по Соболеву, порожденных полиномами Чебышёва первого рода $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, нам понадобится ряд свойств классических полиномов Якоби. Для произвольных действительных α и β полиномы Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ можно определить [25] с помощью формулы Родрига

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \bigl[\rho(x)\sigma^n(x)\bigr], \tag{5.1}$$

где $\rho(x) = \rho(x;\alpha,\beta) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\sigma(x) = 1-x^2$. Если $\alpha,\beta > -1$, то полиномы Якоби образуют ортогональную систему с весом $\rho(x)$, т. е.

$$\int_{-1}^{1} P_n^{\alpha,\beta}(x)P_m^{\alpha,\beta}(x)\rho(x)\,dx = h_n^{\alpha,\beta}\delta_{nm}, \tag{5.2}$$

где величины $h_n^{\alpha,\beta}$ определяются по формуле

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}. \tag{5.3}$$

Нам понадобятся еще следующие свойства полиномов Якоби [25], [26]:

$$\frac{d}{dx}P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x), \tag{5.4}$$

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_\nu}{2^\nu}P_{n-\nu}^{\alpha+\nu,\beta+\nu}(x), \tag{5.5}$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_\nu = a(a+1)\cdots(a+\nu-1)$, $a^{[0]} = 1$, кроме того,

$$\binom{n}{l}P_n^{\alpha,-l}(x) = \binom{n+\alpha}{l}\left(\frac{x+1}{2}\right)^l P_{n-l}^{\alpha,l}(x), \qquad 1 \leqslant l \leqslant n, \tag{5.6}$$

$$P_n^{\alpha,\beta}(t) = \binom{n+\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(n+\alpha+\beta+1)_k}{k!\,(\alpha+1)_k}\left(\frac{1-t}{2}\right)^k, \tag{5.7}$$

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^m}{2^m n^{[m]}}\frac{d^m}{dx^m}\bigl\{(1-x)^{m+\alpha}(1+x)^{m+\beta}P_{n-m}^{m+\alpha,m+\beta}(x)\bigr\}, \tag{5.8}$$

где $k^{[0]} = 1$, $k^{[r]} = k(k-1)\cdots(k-r+1)$, а также

$$P_n^{\alpha,\beta}(-1) = (-1)^n\binom{n+\beta}{n}, \qquad P_n^{\alpha,\beta}(1) = \binom{n+\alpha}{n}, \tag{5.9}$$

$$\frac{P_n^{a,a}(x)}{P_n^{a,a}(1)} = \sum_{j=0}^{[n/2]}\frac{n!\,(\alpha+1)_{n-2j}(n+2a+1)_{n-2j}(1/2)_j(a-\alpha)_j}{(n-2j)!\,(2j)!\,(a+1)_{n-2j}(n-2j+2\alpha+1)_{n-2j}} \times \frac{1}{(n-2j+a+1)_j(n-2j+\alpha+3/2)_j}\,\frac{P_{n-2j}^{\alpha,\alpha}(x)}{P_{n-2j}^{\alpha,\alpha}(1)}, \tag{5.10}$$

где $[b]$ – целая часть числа b.

Лемма 5.1. *Пусть $\alpha > -1$, k, r – целые, $r \geqslant 1$, $k \geqslant r+1$. Тогда*

$$P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x) = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j^{\alpha} P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x),$$

где величины λ_j^{α} определяются по формуле

$$\lambda_j^{\alpha} = \lambda_j^{\alpha}(r,k) = \frac{(-1)^j (k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j} (1/2)_j r^{[j]} (\alpha+k)^{[j]}}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j} (k+r-2j+\alpha+3/2)_j (2j)!}.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $\alpha - r > -1$, тогда, полагая $a = \alpha - r$, мы можем воспользоваться формулой (5.10). Поскольку при $j \geqslant r+1$ выполняется равенство $(a-\alpha)_j = (-r)_j = 0$, то из (5.10) мы имеем

$$P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x) = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j^{\alpha} P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x),$$

где величины λ_j^{α} определяются из

$$\begin{aligned}\lambda_j^{\alpha} &= \frac{P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(1)}{P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(1)} \frac{(k+r)!\,(\alpha+1)_{k+r-2j}(k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j}}{(k+r-2j)!\,(2j)!\,(\alpha-r+1)_{k+r-2j}} \\ &\quad \times \frac{(1/2)_j(-r)_j}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j}(k-2j+\alpha+1)_j(k+r-2j+\alpha+3/2)_j} \\ &= \frac{(-1)^j (k-r+2\alpha+1)_{k+r-2j} (1/2)_j r^{[j]} (\alpha+k)^{[j]}}{(k+r-2j+2\alpha+1)_{k+r-2j} (k+r-2j+\alpha+3/2)_j (2j)!}.\end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость утверждения леммы 5.1 в случае $\alpha > r-1$. Но поскольку $P_{k+r}^{\alpha-r,\alpha-r}(x)$, λ_j^{α} и $P_{k+r-2j}^{\alpha,\alpha}(x)$ представляют собой аналитические функции относительно α, то утверждение леммы 5.1 вытекает из уже доказанного случая.

Лемма 5.2. *Пусть k, r – целые, $r \geqslant 1$, $k \geqslant r+1$. Тогда*

$$P_{k+r}^{-1/2-r,-1/2-r}(x) = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j^{-1/2}(k,r) P_{k+r-2j}^{-1/2,-1/2}(x),$$

где

$$\begin{aligned}\lambda_j^{-1/2}(k,r) &= \frac{(-1)^j (k-r)_{k+r-2j} (1/2)_j r^{[j]} (k-1/2)^{[j]}}{(k+r-2j)_{k+r-2j} (k+r-2j+1)_j (2j)!} \\ &= (-1)^j \frac{((k+r-2j)!)^2 2^{2k+2r-4j}}{(2(k+r-2j))!} \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k+2r}} \frac{r^{[j]}}{j!} \frac{k^{[r+1]}}{(k+r-j)^{[r+1]}}.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости утверждения леммы 5.2 достаточно в лемме 5.1 взять $\alpha = -1/2$.

Пусть $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ – полином Чебышёва первого рода. Тогда имеют место соотношения [25]

$$P_n^{-1/2,-1/2}(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} T_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} T_n(x) \tag{5.12}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1+\sigma_n)T_n(x), \qquad \sigma_n = O\biggl(\frac{1}{n}\biggr). \tag{5.13}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5.3. *Пусть k, r – целые, $r \geqslant 1$, $k \geqslant r+1$. Тогда*

$$P_{k+r}^{-1/2-r,-1/2-r}(x) = \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k+2r}} \sum_{j=0}^{r} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{r^{[j]} k^{[r+1]}}{(k+r-j)^{[r+1]}} T_{k+r-2j}(x).$$

Доказательство. Утверждение леммы 5.3 непосредственно вытекает из леммы 5.2 и равенств (5.11) и (5.13).

Пусть $A, B \in \mathbb{R}$, $p \geqslant 1$. Обозначим через $L^p_{A,B}$ пространство измеримых функций $f = f(x)$, определенных на $[-1,1]$, для которых конечна величина

$$\|f\|_{L^p_{A,B}} = \biggl(\int_{-1}^{1} (1-x)^A (1+x)^B |f(x)|^p \, dx\biggr)^{1/p}.$$

Если $\alpha, \beta > -1$, $f \in L^p_{\alpha,\beta}$, то мы можем определить коэффициенты Фурье–Якоби

$$f_k^{\alpha,\beta} = \frac{1}{h_k^{\alpha,\beta}} \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x) P_k^{\alpha,\beta}(x) \, dx$$

и рассмотреть следующую сумму Фурье–Якоби по полиномам Якоби $P_k^{\alpha,\beta}(x)$:

$$S_n^{\alpha,\beta}(f) = S_n^{\alpha,\beta}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f_k^{\alpha,\beta} P_k^{\alpha,\beta}(x),$$

которая при $\alpha = \beta = -1/2$ представляет собой [25] сумму Фурье по полиномам Чебышёва $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$. В работе [27] доказано следующее утверждение.

Теорема M (теорема Макенхаупта). *Пусть $\alpha, \beta > -1$, $A, B \in \mathbb{R}$, $p > 1$ таковы, что*

$$\biggl|\frac{A+1}{p} - \frac{\alpha+1}{2}\biggr| < \min\biggl\{\frac{1}{4}, \frac{\alpha+1}{2}\biggr\}, \qquad \biggl|\frac{B+1}{p} - \frac{\beta+1}{2}\biggr| < \min\biggl\{\frac{1}{4}, \frac{\beta+1}{2}\biggr\}.$$

Тогда, если $f \in L^p_{A,B}$, то имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_{L^p_{A,B}} = 0.$$

§ 6. Ортогональные по Соболеву полиномы, порожденные многочленами Чебышёва первого рода

Полиномы Чебышёва

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad T_k(x)=\cos(k\arccos x), \quad k=1,2,\dots, \tag{6.1}$$

образуют ортонормированную в $L^2_\rho(-1,1)$ с весом $\rho(x)=\kappa(x)=(2/\pi)(1-x^2)^{-1/2}$ систему. Как хорошо известно [25], система полиномов Чебышёва (6.1) полна в $L^2_\kappa(-1,1)$. Эта система порождает на $[-1,1]$ систему полиномов $T_{r,k}(x)$, $k=0,1,\dots$, определенных равенствами

$$T_{r,k}(x)=\frac{(x+1)^k}{k!}, \qquad k=0,1,\dots,r-1, \tag{6.2}$$

$$T_{r,r}(x)=\frac{(x+1)^r}{\sqrt{2}r!}, \qquad T_{r,r+k}(x)=\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}T_k(t)\,dt, \quad k=1,2\dots. \tag{6.3}$$

Из теоремы 2.1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 6.1. *Система полиномов $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, порожденная системой ортонормированных полиномов Чебышёва (6.1) посредством равенств (6.2) и (6.3), полна в $W^r_{L^2_\kappa(-1,1)}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения*

$$\langle f,g\rangle=\sum_{\nu=0}^{r-1}f^{(\nu)}(-1)g^{(\nu)}(-1)+\int_{-1}^{1}f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\kappa(t)\,dt. \tag{6.4}$$

Ряд Фурье (1.7) для системы $\{T_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ приобретает вид

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{r-1}f^{(k)}(-1)\frac{(x+1)^k}{k!}+\sum_{k=r}^{\infty}f_{r,k}T_{r,k}(x), \tag{6.5}$$

где величины $f_{r,k}$ определяются из

$$f_{r,r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}f^{(r)}(t)\kappa(t)\,dt, \qquad f_{r,r+j}=\int_{-1}^{1}f^{(r)}(t)T_j(t)\kappa(t)\,dt, \quad j\geqslant 1. \tag{6.6}$$

Следствие 6.2. *Если $f(x)\in W^r_{L^2_\kappa(-1,1)}$, то смешанный ряд Фурье (6.5) сходится к функции $f(x)$ равномерно относительно $x\in[-1,1]$.*

Доказательство. Так как $1/\kappa(x)\in L(-1,1)$, то утверждение следствия 6.1 вытекает из теоремы 2.2 и следствия 2.1. Следствие доказано.

В дальнейшем мы значительно усилим утверждение следствия 6.1, распространив его на более широкие, чем $W^r_{L^2_\kappa(-1,1)}$ классы Соболева $W^r_{L^p_\kappa(-1,1)}$ с показателем p. Но для этого нам нужны дальнейшие свойства полиномов $T_{r,k}(x)$, определенных равенствами (6.2) и (6.3).

Пусть $\alpha=\beta=-1/2$. Тогда $\lambda=\alpha+\beta=-1$, и если $(k-1)^{[r]}\neq 0$, то мы можем воспользоваться равенством (5.5) и записать

$$P_k^{-1/2,-1/2}(t)=\frac{2^r}{(k-1)^{[r]}}\,\frac{d^r}{dt^r}P_{k+r}^{-1/2-r,-1/2-r}(t). \tag{6.7}$$

Если $k\geqslant r+1$, то, очевидно, $(k-1)^{[r]}\neq 0$, и для таких k мы можем воспользоваться равенством (6.7). Итак, пусть $(k-1)^{[r]}\neq 0$. Тогда в силу (6.7) имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}P_k^{-1/2,-1/2}(t)\,dt\\
&\quad=\frac{2^r}{(k-1)^{[r]}}\,\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}\frac{d^r}{dt^r}P_{k+r}^{-1/2-r,-1/2-r}(t)\,dt\\
&\quad=\frac{2^r}{(k-1)^{[r]}}\biggl[P_{k+r}^{-1/2-r,-1/2-r}(x)-\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{(1+x)^\nu}{\nu!}\,\frac{d}{dt^\nu}P_{k+r}^{-1/2-r,-1/2-r}(t)\Big|_{t=-1}\biggr].
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Далее, в силу (5.5)

$$\frac{d}{dt^\nu}P_{k+r}^{-1/2-r,-1/2-r}(t)=\frac{(k-r)_\nu}{2^\nu}P_{k+r-\nu}^{-1/2+\nu-r,-1/2+\nu-r}(t), \tag{6.9}$$

а из (5.9) имеем

$$\begin{aligned}
P_{k+r-\nu}^{-1/2+\nu-r,-1/2+\nu-r}(-1)&=(-1)^{k+r-\nu}\binom{k-1/2}{k+r-\nu}\\
&=\frac{(-1)^{k+r-\nu}\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(\nu-r+1/2)(k+r-\nu)!}.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Из (6.9) и (6.10) находим

$$\frac{d}{dt^\nu}P_{k+r}^{-1/2-r,-1/2-r}(t)\Big|_{t=-1}=\frac{(-1)^{k+r-\nu}\Gamma(k+1/2)(k-r)_\nu}{\Gamma(\nu-r+1/2)(k+r-\nu)!\,2^\nu}=A_{\nu,k,r}. \tag{6.11}$$

Сопоставляя (6.8) и (6.11), мы можем записать

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}P_k^{-1/2,-1/2}(t)\,dt\\
&\qquad=\frac{2^r}{(k-1)^{[r]}}\biggl[P_{k+r}^{-1/2-r,-1/2-r}(x)-\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{\nu,k,r}}{\nu!}(1+x)^\nu\biggr].
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Из (6.12), (5.13) и (6.3) имеем

$$\begin{aligned}
T_{r,r+k}(x)&=\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}T_k(t)\,dt\\
&=\frac{2^{2k}k!^2}{(2k)!\,(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}P_k^{-1/2,-1/2}(t)\,dt\\
&=\frac{k!^2}{(2k)!}\,\frac{2^{r+2k}}{(k-1)^{[r]}}\biggl[P_{k+r}^{-1/2-r,-1/2-r}(x)-\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{\nu,k,r}}{\nu!}(1+x)^\nu\biggr],
\end{aligned} \tag{6.13}$$

где для величин $A_{\nu,k,r}$ в силу (6.11) и равенств

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)},\qquad \Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2z)}{\Gamma(z)2^{2z-1}}$$

при $k\geqslant r+1$ находим

$$\begin{aligned}A_{\nu,k,r}&=\frac{(-1)^{k+r-\nu}\Gamma(k+1/2)(k-r)_\nu}{\Gamma(\nu-r+1/2)(k+r-\nu)!\,2^\nu}\\&=\frac{(-1)^k\Gamma(k+1/2)(k-r)_\nu\Gamma(r-\nu+1/2)}{\pi(k+r-\nu)!\,2^\nu}\\&=\frac{(-1)^k(2k-1)!\,(2(r-\nu)-1)!\,(k-r)_\nu}{(k-1)!\,(r-\nu-1)!\,(k+r-\nu)!\,2^{2(k+r-1)-\nu}}.\end{aligned}\tag{6.14}$$

Таким образом, при $k\geqslant r+1$ получаем следующее представление:

$$T_{r,r+k}(x)=\frac{k!^2}{(2k)!}\frac{2^{r+2k}}{(k-1)^{[r]}}\left[P_{k+r}^{-1/2-r,-1/2-r}(x)-\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{\nu,k,r}}{\nu!}(1+x)^\nu\right].\tag{6.15}$$

Теперь обратимся к лемме 5.3, из которой выводим

$$\frac{k!^2}{(2k)!}\,\frac{2^{r+2k}}{(k-1)^{[r]}}P_{k+r}^{-1/2-r,-1/2-r}(x)=\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{r}{j}\frac{kT_{k+r-2j}(x)}{2^r(k+r-j)^{[r+1]}}.\tag{6.16}$$

Сопоставляя (6.15) и (6.16), мы приходим к следующему результату.

Теорема 6.1. *Если $k\geqslant r+1$, то*

$$T_{r,r+k}(x)=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\frac{(-1)^jkT_{k+r-2j}(x)}{2^r(k+r-j)^{[r+1]}}-\frac{k!^2\,2^{r+2k}}{(2k)!\,(k-1)^{[r]}}\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{A_{\nu,k,r}}{\nu!}(1+x)^\nu.\tag{6.17}$$

Рассмотрим два важных частных случая, соответствующие значениям $r=1$ и $r=2$.

1) Пусть $r=1$. Тогда из (6.14) имеем

$$A_{0,k,1}=\frac{(-1)^k(2k-1)!}{(k-1)!\,(k+1)!\,2^{2k}},\qquad k=2,3,\dots.\tag{6.18}$$

Из (6.17) и (6.18) для $k\geqslant 2$ находим

$$\begin{aligned}T_{1,k+1}(x)&=\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\frac{kT_{k+1-2j}(x)}{2(k+1-j)^{[2]}}-\frac{k!^2}{(2k)!}\,\frac{2^{2k+1}}{(k-1)}\,\frac{(-1)^k(2k-1)!}{(k-1)!\,(k+1)!\,2^{2k}}\\&=\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\frac{kT_{k+1-2j}(x)}{2(k+1-j)^{[2]}}-\frac{(-1)^k}{k^2-1}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (6.2) и (6.3) мы выводим следующее утверждение.

Следствие 6.3. *Имеют место равенства*

$$T_{1,k+1}(x)=\frac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)}-\frac{T_{k-1}(x)}{2(k-1)}-\frac{(-1)^k}{k^2-1}, \qquad k\geqslant 2, \tag{6.19}$$

$$T_{1,0}(x)=1, \qquad T_{1,1}(x)=\frac{1+x}{\sqrt{2}}, \qquad T_{1,2}(x)=\frac{1}{2}(x^2-1). \tag{6.20}$$

2) Для $r=2$ и $k\geqslant 3$ из (6.14) и (6.17) имеем

$$A_{0,k,2}=\frac{6(-1)^k(2k-1)!}{(k-1)!\,(k+2)!\,2^{2(k+1)}}, \qquad A_{1,k,2}=\frac{(-1)^k(2k-1)!\,(k-2)}{(k-1)!\,(k+1)!\,2^{2k+1}},$$

$$T_{2,k+2}(x)=\sum_{j=0}^{2}\binom{r}{j}\frac{(-1)^jkT_{k+2-2j}(x)}{2^2(k+2-j)^{[3]}}-\frac{k!^2}{(2k)!}\,\frac{2^{2+2k}}{(k-1)^{[2]}}\sum_{\nu=0}^{1}\frac{A_{\nu,k,2}}{\nu!}(1+x)^\nu,$$

поэтому при $k\geqslant 3$ получаем

$$T_{2,k+2}(x)=\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}\frac{(-1)^jkT_{k+2-2j}(x)}{4(k+2-j)^{[3]}}-(-1)^k\left[\frac{1+x}{k^2-1}+\frac{3}{(k^2-1)(k^2-4)}\right].$$

Отсюда и из (6.2) и (6.3) мы выводим следующее утверждение.

Следствие 6.4. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned}T_{2,k+2}(x)=\frac{T_{k+2}(x)}{4(k+2)(k+1)}-\frac{T_k(x)}{2(k^2-1)}+\frac{T_{k-2}(x)}{4(k-1)(k-2)}&\\-(-1)^k\left[\frac{1+x}{k^2-1}+\frac{3}{(k^2-1)(k^2-4)}\right],& \qquad k\geqslant 3,\end{aligned} \tag{6.21}$$

$$T_{2,0}(x)=1, \qquad T_{2,1}(x)=1+x, \qquad T_{2,2}(x)=\frac{(1+x)^2}{2\sqrt{2}}, \tag{6.22}$$

$$T_{2,3}(x)=\frac{1}{6}(x-2)(x+1)^2, \qquad T_{2,4}(x)=\frac{1}{6}x(x-2)(x+1)^2. \tag{6.23}$$

§ 7. Условия равномерной сходимости ряда Фурье по ортогональным по Соболеву полиномам, порожденным полиномами Чебышёва первого рода

Вернемся к вопросу об условиях равномерной сходимости смешанного ряда Фурье (6.5). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 7.1. *Пусть $A,B\in\mathbb{R}$, $p>1$ таковы, что*

$$\left|\frac{A+1}{p}-\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{4}, \qquad \left|\frac{B+1}{p}-\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{4}, \tag{7.1}$$

$\rho(x)=(1-x)^A(1+x)^B$. *Тогда, если $f\in W^r_{L^p_\rho}(-1,1)$, то ряд* (6.5) *равномерно на $[-1,1]$ сходится к $f(x)$.*

Доказательство. Прежде всего, покажем, что мы можем определить коэффициенты $f_{r,k}$, определяемые равенством (6.6), если $f(x)\in W^r_{L^p_\rho}(-1,1)$. С этой целью покажем, что функция $(1-x^2)^{-1/2}f^{(r)}(x)$ интегрируема на $(-1,1)$. В самом деле, поскольку $f^{(r)}\in L^p_\rho(-1,1)$, то в силу условий (7.1) имеем

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}|f^{(r)}(x)|\,dx\\&=\int_{-1}^{1}(1-x)^{-1/2-A/p}(1+x)^{-1/2-B/p}[\rho(x)]^{1/p}|f^{(r)}(x)|\,dx\\&\leqslant\biggl(\int_{-1}^{1}(1-x)^{(-1/2-A/p)p'}(1+x)^{(-1/2-B/p)p'}\,dx\biggr)^{1/p'}\biggl(\int_{-1}^{1}\rho(x)|f^{(r)}(x)|^p\,dx\biggr)^{1/p},\end{aligned}\tag{7.2}$$

где $p'=p/(p-1)$ – сопряженный показатель. Второй интеграл в (7.2) конечен, а для сходимости первого интеграла из (7.2) достаточно, чтобы были справедливы неравенства

$$\Bigl(-\frac12-\frac Ap\Bigr)p'>-1,\qquad\Bigl(-\frac12-\frac Bp\Bigr)p'>-1,\tag{7.3}$$

но (7.3) равносильно тому, что

$$\frac{-p/2-A}{p}>-\frac{1}{p'}=-1+\frac1p,\qquad\frac{-p/2-B}{p}>-1+\frac1p,$$

или, что то же самое,

$$\frac p2-(A+1)>0,\qquad\frac p2-(B+1)>0,$$

а это, в свою очередь, равносильно тому, что

$$\frac14-\frac{A+1}{p}>-\frac14,\qquad\frac14-\frac{B+1}{p}>-\frac14.\tag{7.4}$$

Справедливость неравенств (7.4) вытекает из (7.1), и, тем самым, коэффициенты $f_{r,k}$ существуют. Перейдем к доказательству равномерной сходимости ряда Фурье (6.5) к функции $f(x)$ на $[-1,1]$. Обозначим через $S_n^{-1/2,-1/2}(f^{(r)})$ частичную сумму ряда Фурье функции $f^{(r)}(x)$ по системе полиномов Чебышёва (6.1), т. е.

$$S_n^{-1/2,-1/2}(f^{(r)})=S_n^{-1/2,-1/2}(f^{(r)},x)=\frac{f_{r,r}}{\sqrt2}+\sum_{k=1}^{n}f_{r,k+r}T_k(x),\tag{7.5}$$

где, в соответствии с (6.6)

$$f_{r,r}=\frac{1}{\sqrt2}\int_{-1}^{1}f^{(r)}(t)\kappa(t)\,dt,\qquad f_{r,k+r}=\int_{-1}^{1}f^{(r)}(t)T_k(t)\kappa(t)\,dt.$$

Имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}f^{(r)}(t)\,dt-\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}S_n^{-1/2,-1/2}(f^{(r)},t)\,dt\right| \\
&\qquad\leqslant 2^{r-1}\int_{-1}^{1}\left|f^{(r)}(t)-S_n^{-1/2,-1/2}(f^{(r)},t)\right|dt \\
&\qquad= 2^{r-1}\int_{-1}^{1}[\rho(t)]^{-1/p}[\rho(t)]^{1/p}\left|f^{(r)}(t)-S_{r,n}^{-1/2,-1/2}(f^{(r)},t)\right|dt \\
&\qquad\leqslant 2^{r-1}\left(\int_{-1}^{1}[\rho(t)]^{-p'/p}\,dt\right)^{1/p'}\left(\int_{-1}^{1}\left|f^{(r)}(t)-S_n^{-1/2,-1/2}(f^{(r)},t)\right|^p\rho(t)\,dt\right)^{1/p}.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

С другой стороны,

$$\int_{-1}^{1}[\rho(t)]^{-p'/p}\,dt=\int_{-1}^{1}(1-t)^{-A/(p-1)}(1+t)^{-B/(p-1)}\,dt\leqslant c(A,B,p), \tag{7.7}$$

так как из условия (7.1) следует, что $A/(p-1)<1$ и $B/(p-1)<1$. Далее, если соблюдены условия теоремы 7.2, то из теоремы Макенхаупта M следует, что

$$\|f^{(r)}-S_n^{-1/2,-1/2}(f^{(r)})\|_{L^p_\rho(-1,1)}\to 0,\qquad n\to\infty. \tag{7.8}$$

Обозначим через $S_{r,n}(f,x)$ частичную сумму ряда (6.5) вида

$$S_{r,n}(f,x)=z_{r-1}(f,x)+\sum_{k=r}^{n}f_{r,k}T_{r,k}(x), \tag{7.9}$$

где

$$z_{r-1}(f,x)=\sum_{k=0}^{r-1}f^{(k)}(-1)\frac{(x+1)^k}{k!}. \tag{7.10}$$

Имея в виду (6.3) и (7.5), мы можем переписать (7.9) следующим образом:

$$\begin{aligned}
S_{r,n}(f,x)&=z_{r-1}(f,x)+\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}\left(\frac{f_{r,r}}{\sqrt{2}}+\sum_{k=r+1}^{n}f_{r,k}T_{k-r}(t)\right)dt \\
&=z_{r-1}(f,x)+\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}S_{n-r}^{-1/2,-1/2}(f^{(r)},t)\,dt.
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Обратившись к формуле Тейлора (2.8) с $a=-1$, из (7.11) для $-1\leqslant x\leqslant 1$ получаем

$$\begin{aligned}
&|f(x)-S_{r,n}(f,x)| \\
&\qquad\leqslant\frac{2^{r-1}}{(r-1)!}\left(\int_{-1}^{1}(\rho(t))^{-p'/p}\,dt\right)^{1/p}\|f^{(r)}-S_n^{-1/2,-1/2}(f^{(r)})\|_{L^p_\rho(-1,1)}.
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Сопоставляя (7.6), (7.7) с (7.12), мы убеждаемся в том, что ряд Фурье (6.5) равномерно сходится, и сумма его равна $f(x)$. Теорема 7.1 доказана.

Из теоремы 7.1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 7.1. *Пусть* $\rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, $p > 1$. *Тогда, если* $f \in W^r_{L^p_\rho(-1,1)}$, *то ряд* (6.5) *равномерно на* $[-1,1]$ *сходится к* $f(x)$.

Заметим, что для построения смешанного ряда (6.5) (и тем более для его равномерной сходимости) необходимо выполнение условия $f \in W^r_{L^1_\rho(-1,1)}$. Возникает вопрос о том, не является ли это условие также и достаточным для равномерной сходимости ряда (6.5). Другими словами, нельзя ли в следствии 7.1 заменить условие $p > 1$ на $p = 1$. Утвердительный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 7.2. *Пусть* $\rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, $r \geqslant 1$. *Тогда, если* $f \in W^r_{L^1_\rho(-1,1)}$, *то ряд* (6.5) *равномерно на* $[-1,1]$ *сходится к* $f(x)$.

Доказательство. Положим

$$H_{r,k+r}(x) = -\frac{k!^2\, 2^{r+2k}}{(2k)!\,(k-1)^{[r]}} \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{\nu,k,r}}{\nu!}(1+x)^\nu \tag{7.13}$$

и заметим, что в силу (6.11) и (7.13) при $|x| \leqslant 1$ имеет место оценка $H_{r,k+r}(x) = O(k^{-2})$, поэтому для $f \in W^1_{L^1_\rho(-1,1)}$ ряд

$$U_{r-1}(f,x) = \sum_{k=2r+1}^{\infty} f_{r,k} H_{r,k}(x) \tag{7.14}$$

сходится абсолютно и равномерно относительно $x \in [-1,1]$, и его сумма $U_{r-1}(f,x)$ представляет собой алгебраический полином степени $r-1$. С другой стороны, в силу теоремы 6.1 имеем $T_{r,r+k}(x) = G_{r,k+r}(x) + H_{r,k+r}(x)$, где

$$G_{r,k+r}(x) = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \frac{(-1)^j k T_{k+r-2j}(x)}{2^r (k+r-j)^{[r+1]}}, \tag{7.15}$$

следовательно, равномерная сходимость ряда (6.5) равносильна равномерной сходимости ряда

$$V_r(f,x) = \sum_{k=2r+1}^{\infty} f_{r,k} G_{r,k}(x). \tag{7.16}$$

Поэтому нам остается доказать, что для произвольной функции $f \in W^1_{L^1_\rho(-1,1)}$ ряд (7.16) сходится равномерно относительно $x \in [-1,1]$. С этой целью осуществим некоторые преобразования ряда (7.16).

Пусть сначала $f \in W^r_{L^p_\rho(-1,1)}$, где $p > 1$. Тогда в силу следствия 6.2 ряд (6.5) равномерно на $[-1,1]$ сходится к $f(x)$, поэтому, полагая

$$D_{2r}(f,x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(-1)\frac{(x+1)^k}{k!} + U_{r-1}(f,x) + \sum_{k=r}^{2r} f_{r,k} T_{r,k}(x), \tag{7.17}$$

мы можем записать

$$f(x) = D_{2r}(f,x) + V_r(f,x), \tag{7.18}$$

где $D_{2r}(f,x)$ – алгебраический полином степени $2r$, а ряд $V_r(f,x)$, определенный равенством (7.16), сходится равномерно относительно $x\in[-1,1]$. Рассмотрим случай $r=1$ и заметим, что в силу (6.19)

$$G_{1,k+1}(x)=\frac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)}-\frac{T_{k-1}(x)}{2(k-1)},\qquad H_{1,k+1}(x)=-\frac{(-1)^k}{k^2-1}, \tag{7.19}$$

поэтому правая часть равенства (7.18) принимает для $r=1$ следующий вид:

$$\begin{aligned} f(x)&=f(0)+f_{1,1}\frac{1+x}{\sqrt{2}}+f_{1,2}(x^2-1)\\ &\quad+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}f_{1,k}}{(k-1)^2-1}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{f_{1,k}}{2}\biggl(\frac{T_k(x)}{k}-\frac{T_{k-2}(x)}{k-2}\biggr), \end{aligned}\tag{7.20}$$

причем ряды, фигурирующие в правой части равенства (7.20), сходятся, а кроме того, второй из них сходится равномерно относительно $x\in[-1,1]$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} V_1(x)&=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{f_{1,k}}{2}\biggl(\frac{T_k(x)}{k}-\frac{T_{k-2}(x)}{k-2}\biggr)\\ &=-\frac{f_{1,3}}{2}T_1(x)-\frac{f_{1,4}}{4}T_2(x)+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{f_{1,k}-f_{1,k+2}}{2k}T_k(x). \end{aligned}\tag{7.21}$$

Кроме того, используя (6.6), получаем

$$\begin{aligned} \frac{f_{1,k}-f_{1,k+2}}{2k}&=\frac{1}{2k}\int_{-1}^{1}f'(t)\bigl(T_{k-1}(t)-T_{k+1}(t)\bigr)\kappa(t)\,dt\\ &=\frac{1}{\pi k}\int_0^{\pi}f'(\cos\theta)\bigl(\cos(k-1)\theta-\cos(k+1)\theta\bigr)\,d\theta\\ &=\frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi}f'(\cos\theta)\sin\theta\sin k\theta\,d\theta=-\frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi}(f(\cos\theta))'\sin k\theta\,d\theta\\ &=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\cos\theta)\cos k\theta\,d\theta=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)T_k(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=f_k, \end{aligned}\tag{7.22}$$

где f_k – k-й коэффициент Фурье–Чебышёва функции $f(x)$. Из (7.20)–(7.22) мы получаем для $f(x)\in W^1_{L^p_\rho(-1,1)}$ равенство

$$f(x)=q(f,x)+\sum_{k=3}^{\infty}f_kT_k(x), \tag{7.23}$$

в котором

$$\begin{aligned} q(f,x)&=f(0)+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}f_{1,k}}{(k-1)^2-1}+f_{1,1}\frac{1+x}{\sqrt{2}}+f_{1,2}(x^2-1)\\ &\quad-\frac{f_{1,3}T_1(x)}{2}-\frac{f_{1,4}T_2(x)}{4} \end{aligned}\tag{7.24}$$

– алгебраический полином степени 2, а ряд, фигурирующий в правой части равенства (7.23), сходится равномерно относительно $x \in [-1,1]$. Из равенства (7.23) и из того, что система полиномов Чебышёва $\{T_k(x)\}$ является ортогональной, следует, что функция $q(f,x)$, определенная равенством (7.24), допускает для $f(x) \in W^1_{L^p_\rho(-1,1)}$ представление

$$q(f,x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{2} f_k T_k(x). \tag{7.25}$$

Из (7.23) и (7.25) мы выводим равенство

$$f(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k T_k(x), \tag{7.26}$$

в правой части которого фигурирует ряд Фурье функции $f(x) \in W^1_{L^p_\rho(-1,1)}$ по полиномам Чебышёва $T_k(x)$, $k = 0,1,\ldots$, который равномерно на $[-1,1]$ сходится к $f(x)$.

Предположим теперь, что $f(x) \in W^1_{L^1_\rho(-1,1)}$ и ряд Фурье–Чебышёва (7.26) сходится равномерно на $[-1,1]$ к $f(x)$. Кроме того, условимся, что для $f(x)$ имеет место равенство (7.25). Тогда мы можем представить $f(x)$ в виде (7.23), в котором ряд, фигурирующий в его правой части, равномерно на $[-1,1]$ сходится. Отсюда вытекает, что при $r = 1$ ряд (7.16) также сходится равномерно на $[-1,1]$. Чтобы убедиться в этом, достаточно выполнить в обратном порядке те преобразования, которые для $r = 1$ в предположении равномерной сходимости ряда (7.16) привели нас к равенству (7.23), отправившись от равенства (7.18). Поэтому, чтобы завершить доказательство теоремы 7.2 для $r = 1$, нам достаточно проверить, что если $f(x) \in W^1_{L^1_\rho(-1,1)}$, то ряд Фурье–Чебышёва (7.26) сходится равномерно относительно $x \in [-1,1]$ и для $f(x)$ имеет место равенство (7.25).

Итак, пусть $f(x) \in W^1_{L^1_\rho(-1,1)}$, тогда индуцированная функция $F(\theta) = f(\cos\theta)$, как это легко показать, является абсолютно непрерывной на периоде $[-\pi,\pi]$, и, следовательно, ее тригонометрический ряд Фурье равномерно на $[-\pi,\pi]$ сходится к $F(\theta)$, а это равносильно тому, что ряд Фурье–Чебышёва функции $f(x)$ сходится к ней равномерно на $[-1,1]$. Таким образом, утверждение теоремы 7.2, относящееся к случаю $r = 1$, будет полностью доказано, если проверим, что равенство (7.25) останется в силе и в более общем случае, когда $f(x) \in W^1_{L^1_\rho(-1,1)}$. С этой целью построим последовательность функций $h_N(x) \in W^1_{L^p_\rho(-1,1)}$, $N = 1,2,\ldots$, для которых

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - h_N(x)| + \int_{-1}^{1} \frac{|f'(x) - (h_N(x))'|}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \to 0, \qquad N \to \infty. \tag{7.27}$$

Для этого положим $t = (1+x)/2$, $\mu = \mu(t) = \rho(x)$ и рассмотрим отображение пространства $W^1_{L^p_\rho(-1,1)}$ на пространство $W^1_{L^p_\mu(0,1)}$, сопоставляющее функции $f(x) \in W^1_{L^p_\rho(-1,1)}$ функцию $f(2t-1) = F(t) \in W^1_{L^p_\mu(0,1)}$. Далее, для функции $F(t)$ построим частичную сумму $Y_{1,N}(F,t)$ смешанного ряда по функциям

Хаара, соответствующий выбору $r = 1$, которая в силу (4.7) имеет вид

$$Y_{1,N}(F,t) = F(0) + \sum_{n=1}^{N} F_{1,n}\mathcal{X}_{1,n}(t).$$

Определим последовательность $h_N(x) = h_N(f,x)$, $N = 1,2,\dots$, полагая

$$h_N(x) = Y_{1,N}(F,t), \qquad x = 2t-1.$$

Тогда предельное соотношение (7.27) вытекает из предложения 4.1, так как

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-h_N(x)| + \int_{-1}^{1}\frac{|f'(x)-(h_N(x))'|}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$= \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|F(t)-Y_{1,N}(F,t)| + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{|F'(t)-(Y_{1,N}(F,t))'|}{\sqrt{t(1-t)}}\,dt \to 0, \qquad N\to\infty.$$

С другой стороны, поскольку $h_N(x) \in W^1_{L^p_\rho(-1,1)}$, $N = 1,2,\dots$, то, как это следует из (7.25), справедливо равенство

$$q(h_N,x) = \frac{(h_N)_0}{2} + \sum_{k=1}^{2}(h_N)_k T_k(x). \tag{7.28}$$

Далее положим

$$v^0_{k,N} = (h_N)_k - f_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(h_N(x)-f(x))T_k(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \tag{7.29}$$

$$v^1_{k,N} = (h_N)_{1,k} - f_{1,k} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{((h_N(x))'-f'(x))T_{k-1}(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \tag{7.30}$$

и заметим, что в силу (7.27) равномерно относительно $k = 2,3,\dots$ справедливы оценки

$$|v^0_{k,N}| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{|h_N(x)-f(x)|\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = A_N(f) = o(1), \tag{7.31}$$

$$|v^1_{k,N}| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{|(h_N(x))'-f'(x)|\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = B_N(f) = o(1). \tag{7.32}$$

Отметим так же, что

$$|f^1_{1,k}| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{|f'(x)|\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = C(f) \tag{7.33}$$

и в силу (7.30)

$$|(h_N)_{1,k}| \leqslant |f^1_{1,k}| + |v^1_{k,N}| \leqslant C(f) + B_N(f). \tag{7.34}$$

Из (7.33) и (7.34) следует, что ряды

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(h_N)_{1,k}}{k^2-1} \quad \text{и} \quad \sum_{k=2}^{\infty}\frac{f_{1,k}}{k^2-1}$$

абсолютно сходятся, поэтому мы можем записать

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(h_N)_{1,k}}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{f_{1,k}}{k^2-1} + V_N(f),$$

где в силу (7.32)

$$|V_N| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{v^1_{k,N}}{k^2-1}\right| \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|v^1_{k,N}|}{k^2-1} \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_N(f)}{k^2-1} \to 0, \qquad N\to\infty.$$

Поэтому

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(h_N)_{1,k}}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{f_{1,k}}{k^2-1}. \tag{7.35}$$

Кроме того, из (7.29)–(7.32) следует, что

$$\lim_{N\to\infty} (h_N)_{1,k} = f_{1,k}, \qquad \lim_{N\to\infty} (h_N)_k = f_k. \tag{7.36}$$

Из (7.34) и (7.35) и определения (7.25) функции q находим

$$\lim_{N\to\infty} q(h_N,x) = q(f,x), \tag{7.37}$$

$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{(h_N)_0}{2} + \sum_{k=1}^{2} (h_N)_k T_k(x)\right) = \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{2} f_k T_k(x). \tag{7.38}$$

Сопоставляя (7.36) и (7.37) с (7.28), убеждаемся в справедливости равенства (7.25) для произвольной функции $f(x) \in W^1_{L^1_\rho(-1,1)}$ и, тем самым, утверждение теоремы 7.2, относящееся к случаю $r=1$, доказано. Если же $r>1$, то мы можем воспользоваться равенством (1.14) и записать

$$f^{(r-2)}(x) - Y^{(r-2)}_{r,N}(f,x) = \int_{-1}^{x} (f^{(r-1)}(t) - Y_{1,N-r+1}(f^{(r-1)},t))\,dt.$$

Отсюда и из (1.13) имеем

$$\left|f^{(r-2)}(x) - Y_{2,N-r+2}(f^{(r-2)},x)\right| \leqslant \int_{-1}^{x} \left|f^{(r-1)}(t) - Y_{1,N-r+1}(f^{(r-1)},t)\right| dt.$$

Из этого неравенства следует, что если теорема 7.2 верна для $r=1$, то она верна и для $r=2$ и так далее. Поэтому утверждение теоремы 7.2 выводим по индукции. Теорема доказана.

Список литературы

1. И. И. Шарапудинов, “Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье–Лежандра”, *Матем. сб.*, **191**:5 (2000), 143–160; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, “Approximation of functions of variable smoothness by Fourier–Legendre sums”, *Sb. Math.*, **191**:5 (2000), 759–777.

2. И. И. Шарапудинов, *Смешанные ряды по ортогональным полиномам*, Изд-во ДНЦ, Махачкала, 2004, 276 с.
3. И. И. Шарапудинов, “Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r”, *Матем. сб.*, **197**:3 (2006), 135–154; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, “Approximation properties of mixed series in terms of Legendre polynomials on the classes W^r”, *Sb. Math.*, **197**:3 (2006), 433–452.
4. И. И. Шарапудинов, “Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм смешанного ряда по полиномам Лежандра”, *Матем. заметки*, **84**:3 (2008), 452–471; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, “Approximation properties of the Vallée-Poussin means of partial sums of a mixed series of Legendre polynomials”, *Math. Notes*, **84**:3 (2008), 417–434.
5. И. И. Шарапудинов, Т. И. Шарапудинов, “Смешанные ряды по полиномам Якоби и Чебышева и их дискретизация”, *Матем. заметки*, **88**:1 (2010), 116–147; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, T. I. Sharapudinov, “Mixed series of Jacobi and Chebyshev polynomials and their discretization”, *Math. Notes*, **88**:1 (2010), 112–139.
6. И. И. Шарапудинов, Г. Н. Муратова, “Некоторые свойства r-кратно интегрированных рядов по системе Хаара”, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **9**:1 (2009), 68–76.
7. A. Iserles, P. E. Koch, S. P. Nørsett, J. M. Sanz-Serna, “On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products”, *J. Approx. Theory*, **65**:2 (1991), 151–175.
8. F. Marcellán, M. Alfaro, M. L. Rezola, “Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions”, *J. Comput. Appl. Math.*, **48**:1-2 (1993), 113–131.
9. H. G. Meijer, “Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space”, *J. Approx. Theory*, **73**:1 (1993), 1–16.
10. K. H. Kwon, L. L. Littlejohn, “The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{-k}(x)\}$ for positive integers k”, *Ann. Numer. Math.*, **2**:1-4 (1995), 289–303.
11. K. H. Kwon, L. L. Littlejohn, “Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations”, *Rocky Mountain J. Math.*, **28**:2 (1998), 547–594.
12. F. Marcellán, Yuan Xu, “On Sobolev orthogonal polynomials”, *Expo. Math.*, **33**:3 (2015), 308–352; arXiv: 6249v1.
13. G. López, F. Marcellán, W. Van Assche, “Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product”, *Constr. Approx.*, **11**:1 (1995), 107–137.
14. А. А. Гончар, “О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **97(139)**:4(8) (1975), 607–629; англ. пер.: A. A. Gončar, “On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **26**:4 (1975), 555–575.
15. L. N. Trefethen, *Spectral methods in MATLAB*, Software Environ. Tools, **10**, SIAM, Philadelphia, PA, 2000, xviii+165 pp.
16. L. N. Trefethen, *Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equations*, Cornell Univ., Ithaca, NY, 1996, 300 pp.
17. В. В. Солодовников, А. Н. Дмитриев, Н. Д. Егупов, *Спектральные методы расчета и проектирования систем управления*, Машиностроение, М., 1986, 440 с.
18. С. Пашковский, *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева*, Наука, М., 1983, 384 с.; пер. с польск.: S. Paszkowski, *Zastosowania numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1975, 481 pp.
19. О. Б. Арушанян, Н. И. Волченскова, С. Ф. Залеткин, “Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышева”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **7** (2010), 122–131.

20. О. Б. Арушанян, Н. И. Волченскова, С. Ф. Залеткин, “Метод решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышева”, *Выч. мет. программирование*, **14**:2 (2013), 203–214.
21. О. Б. Арушанян, Н. И. Волченскова, С. Ф. Залеткин, “Применение рядов Чебышева для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **11** (2014), 517–531.
22. Д. С. Лукомский, П. А. Терехин, “Применение системы Хаара к численному решению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка”, *Современные проблемы теории функций и их приложения*, Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы, Науч. кн., Саратов, 2016, 171–173.
23. М. Г. Магомед-Касумов, “Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием смешанных рядов по системе Хаара”, *Современные проблемы теории функций и их приложения*, Материалы 18-й международной Саратовской зимней школы, Науч. кн., Саратов, 2016, 176–178.
24. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, 2-е изд., АФЦ, М., 1984, 496 с.; англ. пер.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, xii+451 pp.
25. Г. Сеге, *Ортогональные многочлены*, Физматлит, М., 1962, 500 с.; пер. с англ.: G. Szegö, *Orthogonal polynomials*, rev. ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1959, ix+421 pp.
26. G. Gasper, “Positivity and special functions”, *Theory and application of special functions* (Proc. Advanced Sem., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1975), Academic Press, New York, 1975, 375–433.
27. B. Muckenhoupt, “Mean convergence of Jacobi series”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **23**:2 (1969), 306–310.

Идрис Идрисович Шарапудинов
(Idris I. Sharapudinov)
Дагестанский научный центр РАН, г. Махачкала;
Владикавказский научный центр
Российской академии наук
E-mail: sharapud@mail.ru

Поступило в редакцию
01.03.2016
28.07.2016