В. Н. Габушин, Неравенства между производными в метриках L_p при $0 < p \leqslant \infty$, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1976, том 40, выпуск 4, 869–892

СЕРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
Том 40, № 4, 1976

УДК 517.5

В. Н. ГАБУШИН

НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ ПРОИЗВОДНЫМИ В МЕТРИКАХ L_p ПРИ $0<p\leqslant\infty$

Пусть G — открытое множество в n-мерном эвклидовом пространстве E_n, $S=\overline{G}$ — замыкание множества G, $\partial G=S\setminus G$ — граница множества G, $x=(x_1, \ldots, x_n)\in S$, $f(x)$ — измеримая на S функция. Как обычно,

$$\|f\|_{L_p(S)}=\begin{cases}\left(\int\limits_S |f(x_1, \ldots, x_n)|^p\, dx_1 \cdots dx_n\right)^{\frac{1}{p}} & \text{при} \quad p<\infty, \\ \operatorname{ess\,sup} |f(x)| & \text{при} \quad p=\infty.\end{cases} \tag{1}$$

Для $\|f\|_{L_p(S)}$ будем применять также следующие обозначения: $\|f\|_p$, $\|f\|_{p,S}$, $\|f\|_{L_p}$.

Неравенства для функций одного переменного вида

$$\|f^{(k)}\|_{L_q(S)}\leqslant K\|f\|^{\alpha}_{L_p(S)}\|f^{(l)}\|^{\beta}_{L_r(S)}, \tag{2}$$

а также их обобщения на случай функций нескольких переменных изучались во многих работах. Такого рода неравенства естественным образом появляются в целом ряде задач, например, в теории вложения функциональных пространств, развитой С. Л. Соболевым, С. М. Никольским и др. Теоремы вложения, в которых встречаются неравенства вида (2), рассматривались В. П. Ильиным (см., например, ([3])) и многими другими. Обзор результатов этого направления можно найти в ([11]), ([13]), ([15]), ([21]). Особенно хорошо изучен случай, когда показатели p, q, r больше единицы. Однако известно, что в ряде частных случаев, например, при $l=1$, неравенства (2) имеют место и для показателей p, $q<1$ (Б. С. Надь ([4])). Известно также, что при $p=q=r=\infty$ и $S=(-\infty, \infty)$ неравенство (2) можно усилить, заменив $\|f^{(l)}\|_\infty$ одной из следующих величин:

$$M_1(f^{(l)})=|\sup_{x\in S} f^{(l)}(x)| \quad \text{или} \quad M_2(f^{(l)})=|\inf_{x\in S} f^{(l)}(x)|$$

(Л. Хёрмандер ([7])). Оценки такого рода мы будем называть односторонними.

В настоящей работе обобщаются и усиливаются неравенства вида (2) для функций одной переменной. Неравенства для функций многих переменных предполагается рассмотреть в другой статье. Опишем более подробно полученные результаты.

Введем следующие классы функций.

$W^l(S)$ — *множество функций* $f(x)$, *у которых все производные до порядка* $l-1$ *абсолютно непрерывны на любом отрезке* $[a, b]\subset S$.

$$V^{j,l}(S)=\{f\in W^l(S):\inf_{x\in S}|f^{(i)}(x)|=0,\quad i=j,\ \ldots,\ l-1\}.$$

В настоящей статье неравенства (2) для классов $W^l(S)$, где S — полупрямая или прямая, известные при $p, q, r\geqslant 1$, распространяются на случай показателей $p, q>0$ и произвольных k и l; кроме того, $\|f^{(l)}\|_r$ заменяется функционалом типа $\|f_+^{(l)}\|_r$ или $\|f_-^{(l)}\|_r$, где

$$f_+^{(l)}(x)=\begin{cases} f^{(l)}(x), & \text{если } f^{(l)}(x)\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } f^{(l)}(x)<0,\end{cases} \tag{3}$$
$$f_-^{(l)}(x)=|f^{(l)}(x)|-f_+^{(l)}(x).$$

Очевидно, $\|f_+^{(l)}\|_\infty=M_1(f^{(l)})$, $\|f_-^{(l)}\|_\infty=M_2(f^{(l)})$, если $S=(-\infty,\infty)$. В некоторых неравенствах вычисляются точные константы. В тех случаях, когда для всех функций из класса $W^l(S)$ неравенство (2) не имеет места, либо рассматриваются более узкие классы $V^{j,l}(S)$, либо вместо неравенства (2) рассматриваются неравенства вида

$$\|f^{(k)}\|_{L_q(S)}\leqslant K\nu^\gamma(f^{(k)})\|f\|^\alpha_{L_p(S)}\|f^{(l)}\|^\beta_{L_r(S)}, \tag{4}$$

где $\nu(f^{(k)})$ — число перемен знака функции $f^{(k)}(x)$ (точное определение этой величины мы дадим позднее), либо линейные аналоги неравенства (2). Заметим, что в общем виде неравенства типа (4), а также неравенства для классов непериодических функций $V^{j,l}(S)$ ранее, по-видимому, не рассматривались. Однако частные случаи были известны и ранее (Б. С. Надь ([5]), О. А. Ладыженская и др. ([14])).

В качестве примера доказанных в работе утверждений приведем следующие теоремы. Однако предварительно определим две числовые функции:

$$\alpha(p,q,r,k,l)=\begin{cases} \dfrac{l-k-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}}{l-\frac{1}{r}+\frac{1}{p}}, & \text{если } l-\frac{1}{r}+\frac{1}{p}\neq 0;\\ 1, & \text{если } k=0,\ q=p;\\ \dfrac{l-k}{l} & \text{в остальных случаях;}\end{cases} \tag{5}$$

$$\Delta(p,q,r,k,l)=\frac{1}{q}-\frac{l-k}{lp}-\frac{k}{lr}. \tag{6}$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $S=(-\infty, \infty)$, $-\infty<\alpha, \beta<\infty$ — *произвольные действительные*, k, l $(0\leqslant k\leqslant l-1)$ — *целые числа*,

$$\left.\begin{array}{c} 0<p, q, r\leqslant\infty, \\ q\neq p \quad \text{при } k=0, \end{array}\right\} \tag{7}$$

$\Psi_r(f^{(l)})$—*один из функционалов*: $\|f^{(l)}\|_{L_r(S)}$, $\|f_+^{(l)}\|_{L_r(S)}$ *или* $\|f_-^{(l)}\|_{L_r(S)}$. *Тогда для класса* $\widetilde{W}_p^l(S)=\{f\in W^l(S) : \|f\|_p<\infty\}$ *неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_{L_q(S)}\leqslant K\|f\|_{L_p(S)}^{\alpha}\Psi_r^{\beta}(f^{(l)}) \tag{8}$$

с константой K, *не зависящей от* f, *имеет место тогда и только тогда, когда*: а) $r\geqslant1$); б) $\alpha=\alpha(p, q, r, k, l)$, $\beta=1-\alpha$; с) $\Delta(p, q, r, k, l)\leqslant0$.

Из теоремы 1 легко следует

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $S=(-\infty, \infty)$ *и показатели* p, q, r, k, l *удовлетворяют соотношениям* (7) *и условиям* а), б) *и* с) *теоремы* 1. *Тогда для любой функции* $f\in\widetilde{W}_p^l(S)$ *и любой измеримой функции* Φ, *удовлетворяющей хотя бы одному из соотношений*:

$$f^{(l)}(x)\leqslant\Phi(x) \quad \forall x\in S, \tag{9}$$

$$f^{(l)}(x)\geqslant\Phi(x) \quad \forall x\in S, \tag{10}$$

имеет место неравенство

$$\|f^{(k)}\|_{L_q(S)}\leqslant K\|f\|_{L_p(S)}^{\alpha}\|\Phi\|_{L_r(S)}^{1-\alpha}, \tag{11}$$

где $\alpha=\alpha(p, q, r, k, l)$ *и* K *не зависит от* f.

Изложенные в работе результаты частично анонсированы в ([18]), ([19]).

§ 1

В этом параграфе формулируются и доказываются некоторые вспомогательные результаты, вряд ли имеющие самостоятельный интерес.

I. *Если* $0<p\leqslant\infty$, *то* [см. ([8]), стр. 161]

$$\|f+g\|_p\leqslant2(\|f\|_p+\|g\|_p).$$

II. *Если* a_i, b_i, A, $B\geqslant0$, *то при* $A+B\geqslant1$

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_i^Ab_i^B\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_i\right)^A\left(\sum_{i=1}^{\infty}b_i\right)^B, \tag{12}$$

а при $A+B<1$ *и* $C=1-A-B$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^Ab_i^B\leqslant n^C\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^A\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^B. \tag{13}$$

Неравенство (12) следует из теоремы 22 в ([1]). Неравенство (13) получается применением неравенства Гёльдера к сумме $\sum a_i^Ab_i^Bc_i^C$, где $c_i=1$, $i=1, \ldots, n$.

III. *Если* $f \in W^l\,[a, b]$, $l \geqslant 1$, *и* f *имеет* l *нулей на* $[a, b]$, *то найдется точка* $\eta \in [a, b]$, *в которой* $f^{(l-1)}(\eta)=0$ *и каждая из производных* $f^{(j)}(x)$, $j=0, \ldots, l-1$, *имеет нули на* $[a, \eta]$ *и на* $[\eta, b]$.

Доказательство см., например, в (10).

IV. *Если* η — *точка сгущения нулей функции* $f \in W^l(S)$, $l \geqslant 1$, *то* $f^{(m)}(\eta)=0$, $m=0, 1, \ldots, l-1$.

Действительно, если η — точка сгущения, то в силу непрерывности функции f имеем $f(\eta)=0$. Поскольку в любой окрестности η содержится бесконечное множество нулей f, то из теоремы Ролля вытекает, что этим свойством обладают непрерывные функции $f'(x)$, $f''(x)$, ... и, следовательно, $f^{(m)}(\eta)=0$.

V. *Пусть* $p>0$, $m \geqslant 1$, $m \geqslant k$, $S=[a, b]$. *Для любой функции* $f \in W^m(S)$ *найдется такой многочлен* P *степени не выше* $m-1$, *что*

$$
\begin{gathered}
g(x)=f(x)-P(x) \in V^{0,m}(S), \quad g^{(m)}=f^{(m)}, \\
\|g\|_p \leqslant A\|f\|_p, \quad \|P^{(k)}\|_q \leqslant B(b-a)^{-\mu}\|f\|_p,
\end{gathered} \tag{14}
$$

причем A *и* B *не зависят от* f *и* S, $\mu=k-\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{p}$.

Доказательство. Разобьем отрезок S точками $a=x_0<x_1\ldots$ $\ldots<x_{2m}=b$ на $2m$ равных частей и выберем точки $\xi_j \in S_j=[x_{2j}, x_{2j+1}]$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$, так, чтобы при $p<\infty$

$$
\int_{S_j} |f(x)|^p\,dx=|f(\xi_j)|^p(\operatorname{mes} S_j)=\frac{(b-a)\,|f(\xi_j)|^p}{2m}, \tag{15}
$$

а при $p=\infty$ положим $\xi_j=x_{2j}$. Построим по точкам ξ_j интерполяционный полином Лагранжа [см. (6), стр. 45]:

$$
P(x)=\sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_j)\,P_j(x),
$$

$$
P_j(x)=\prod_{i \neq j}(x-\xi_i)(\xi_j-\xi_i)^{-1}.
$$

Так как $|x-\xi_i| \leqslant b-a$ и при $i \neq j$ $|\xi_j-\xi_i| \geqslant \dfrac{b-a}{2m}$, то найдется такая не зависящая от ξ_j и S константа c_1, что $|P_j(x)| \leqslant c_1$. Отсюда и из (15) следует оценка:

$$
\begin{gathered}
|P(x)| \leqslant \max_j |f(\xi_j)| \sum_{i=0}^{m-1} |P_i(x)| \leqslant c_2(b-a)^{-\frac{1}{p}}\|f\|_p, \\
\|P\|_p \leqslant (b-a)^{\frac{1}{p}}\|P\|_\infty \leqslant c_3\|f\|_p.
\end{gathered} \tag{16}
$$

Отсюда с учетом I получаем:

$$\|g\|_p \leqslant 2(\|f\|_p + \|P\|_p) \leqslant A\|f\|_p.$$

Из неравенства Маркова [(2), стр. 28] и оценки (16) вытекает, что

$$\|P^{(k)}\|_q \leqslant (b-a)^{\frac{1}{q}} \|P^{(k)}\|_\infty \leqslant c_4 (b-a)^{-k+\frac{1}{q}} \|P\|_\infty \leqslant B(b-a)^{-\mu} \|f\|_p.$$

Нетрудно видеть, что константы c_1, c_2, c_3, A, B можно выбрать не зависящими от f и S.

Равенство $f^{(m)} = g^{(m)}$ и включение $g \in V^{0,m}(S)$ очевидны.

VI. *Пусть* $f \in W^1(S)$, $f'(x) \geqslant 0$ $\forall x \in S = [a, b]$, x_0 — *точка, в которой* $|f(x_0)| = \min\limits_{x \in S} |f(x)|$ *и* $g(x)$ — *невозрастающая на отрезке* $\Gamma = [a, x_0]$ *и неубывающая на отрезке* $Z = [x_0, b]$ *функция, равноизмеримая на каждом из этих отрезков с функцией* $|f'(x)|$. *Тогда*

$$|f(x)| = |f(x_0)| + \left| \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt \right| \geqslant |G(x)|, \tag{17}$$

где $G(x) = \int\limits_{x_0}^{x} g'(t)\,dt$. *Для любого* $v > 0$

$$\|g\|_{v,S} = \|f'\|_{v,S}, \quad \|G\|_{v,S} \leqslant \|f\|_{v,S}. \tag{18}$$

Из определения g и свойств равноизмеримых функций [(12), стр. 55—57] вытекает первое из соотношений (18). Так как функция f монотонна, то в силу определения точки x_0 $f(x_0)(f(x) - f(x_0)) \geqslant 0$ и поэтому

$$|f(x)| = |f(x_0)| + |f(x) - f(x_0)| = |f(x_0)| + \left| \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt \right|.$$

Отсюда и из предыдущего вытекает (17) и, как следствие, второе из соотношений (18).

Пусть S — отрезок, полупрямая или прямая.

Определение. *Число* $\nu = \nu(f)$ *будем называть числом перемен знака функции* f, *определенной на* S, *если* S *можно разбить на* ν *попарно непересекающихся интервалов* H_i, $S = \bigcup\limits_i \overline{H}_i$, *так, что на каждом* H_i *функция* f *либо неотрицательна, либо неположительна и на соседних интервалах* H_i *и* H_{i+1} *найдутся точки* $x \in H_i$, $y \in H_{i+1}$, *в которых*

$$\operatorname{sign} f(x) = -\operatorname{sign} f(y) \neq 0.$$

Если ни для какого конечного ν *нельзя построить такого разбиения, то полагаем* $\nu(f) = \infty$.

VII. *Если* $f \in W^m(S)$, $S = [a, \infty)$, $m \geqslant 1$, $\nu(f^{(m)}) = 1$, $\|f\|_p < \infty$, *то найдется последовательность* ξ_n, $\xi_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, *такая, что* $f^{(i)}(\xi_n) \to 0$ *при всех* i, $0 \leqslant i \leqslant m$ (*за исключением, быть может, случая* $i = 0$, $p = \infty$).

Если $f^{(m)}$ не меняет знака на некотором интервале, то $f^{(m-1)}$ имеет на этом интервале не более двух перемен знака, $f^{(m-2)}$ — не более четырех перемен знака и т. д. Таким образом, каждая из производных $f^{(i)}$ имеет конечное число перемен знака и поэтому найдется полупрямая $\tilde{S}\subset S$, на которой все $f^{(i)}(x)$, $0\leqslant i\leqslant m$, не меняют знака, и, следовательно, каждая из $f^{(i)}(x)$, $0\leqslant i\leqslant m-1$, монотонна. Пусть

$$c_j=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}|f^{(j)}(x)|.$$

Предположим, что для некоторого $j\leqslant m$ $c_j\neq 0$. Тогда для достаточно больших x $|f^{(j)}(x)|>c_j$ и по формуле Тэйлора $|f^{(i)}(x)|>c_jx^{j-i}/(j-i)!$. Так как $\|f\|_p<\infty$, то это возможно только при $j=0$, $p=\infty$. Значит, во всех остальных случаях $c_j=0$. Из монотонности $f^{(i)}(x)$, $i\leqslant m-1$, следует, что $f^{(i)}(x)\to 0$ при $x\to\infty$. Таким образом, в качестве ξ_n можно выбрать любую из последовательностей, для которой $f^{(m)}(\xi_n)\to 0$ при $n\to\infty$ (а существование ее гарантируется условием $c_m=0$).

В следующем пункте изложены некоторые свойства непрерывных функций.

VIII. *Если функция* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *непрерывна на открытом множестве* $G\subset E_n$, *то множество*

$$T=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in G: f(x)\neq 0\} \tag{19}$$

открыто и представимо единственным образом в виде

$$T=\bigcup_{j\in\sigma}T_j,\quad T_i\cap T_j=\varnothing, \tag{20}$$

где σ — *не более чем счетное множество,* T_j — *области, т. е. связные, открытые множества, и*

$$f(x)=0,\quad \text{если}\quad x=(x_1,\ldots,x_n)\in\partial T_j\diagdown\partial G. \tag{21}$$

На каждом из множеств T_j *функция* f *не меняет знака. Если* $n=1$, *то* T_j — *конечные или бесконечные интервалы и разложение* (20) *совпадает с известным разложением открытого множества на составляющие интервалы* [см. ([9]), стр. 53—55].

Действительно, взяв в качестве T_j связные компоненты множества T, получим разложение (20) [см. ([17]), стр. 136, 149, 235]. Если бы f меняла знак на T_j, то $T_j=\tilde{T}_j\cup\tilde{\tilde{T}}_j$, $\tilde{T}_j=\{x\in T_j: f(x)>0\}$, $\tilde{\tilde{T}}_j=T_j\diagdown\tilde{T}_j$, а это противоречит связности множества T_j. Если же $f(x_0)\neq 0$ в некоторой точке $x_0\in\partial T_j\diagdown\partial G$, то и в достаточно малой шаровой окрестности Q точки x_0 функция f не меняет знака, $Q\subset T$, и, следовательно, $Q\cup T_j$ связно [([17]), стр. 141] и по определению связной компоненты $Q\cup T_j\subset T_j$. Это противоречит тому, что x_0 — граничная точка. В случае $n=1$ связные множества имеют простое строение [([17]), стр. 137] и разложение (20) есть разложение открытого множества на составляющие интервалы.

§ 2

В этом параграфе доказываются основные теоремы. Как и ранее, будем предполагать, что G — открытое множество, $S=\bar{G}$. Оказывается, что в неравенствах (2) и (4) можно заменить $\|f^{(l)}\|_{L_r(S)}$ функционалом

$\tau_{r,m}(g, S)$, $g=f^{(l-1)}$, достаточно общего вида. Этот функционал строится специальным образом по некоторому исходному функционалу $\tau_r(f, S)$, определенному на множестве $W^1(S)$. Функционал $\tau_r(f, S)$ можно выбирать достаточно произвольным, требуется лишь, чтобы он обладал некоторыми из указанных ниже свойств. При этом набор требуемых свойств будет, вообще говоря, различным в разных теоремах. В свойствах 1—3 встречаются числовые параметры r, t, m, ..., значения которых указываются позднее в формулировках теорем.

Свойство 1. *Функционал $\tau_r(f, S)$ неотрицателен и определен на множестве $W^1(S)$.*

Свойство 2. *Для всех функций $f\in V^{0,1}(S)$, у которых $\|f\|_t<\infty$, имеет место неравенство*

$$\|f\|_{\infty,S}\leqslant \varkappa \|f\|_{t,S}^{\alpha}\{\tau_r(f, S)\}^{1-\alpha}, \quad \alpha=\alpha(t, \infty, r, 0, 1),$$

где $\varkappa=\varkappa(t, r)$ не зависит от f.

Пусть m, $0<m\leqslant\infty$,— некоторое число. Построим на множестве $W^1(S)$ функционал $\tau_{r,m}(f, S)$.

Определение. *Для любой функции $f\in W^1(S)$*

$$\tau_{r,m}(f, S)=\begin{cases}\left(\sum\limits_{j\in\sigma}\tau_r^m(j)\right)^{\frac{1}{m}} & \text{при} \quad m<\infty,\\ \sup\limits_{j\in\sigma}\tau_r(j) & \text{при} \quad m=\infty,\end{cases}$$

где $T=\{x\in G: f(x)\neq 0\}=\bigcup\limits_{j\in\sigma}T_j$ — разложение вида (20), X_j — характеристическая функция множества $\overline{T}_j$, $\tau_r(j)=\tau_r(f\cdot X_j, S)$.

Свойство 3. *Для любой функции $f\in W^l(S)$, $\|f\|_p<\infty$, найдется функция $g\in W^l(S)$, у которой $g^{(l-1)}(x)$ имеет нуль на любой полупрямой $H\subset S$ и*

$$\|g\|_{p,S}\leqslant\delta\|f\|_{p,S}, \quad \|f^{(k)}\|_{q,S}\leqslant\delta\|g^{(k)}\|_{q,S},$$

$$\tau_{r,m}(g^{(l-1)}, S)\leqslant\delta\tau_{r,m}(f^{(l-1)}, S),$$

причем δ не зависит от f, $0<\delta<\infty$.

Сделаем некоторые пояснения к изложенному выше.

Замечание 1. В свойстве 1 допускается, что для некоторых функций $\tau_r(f, S)=\infty$. Свойство 3 нетривиально только тогда, когда среди T_j есть полупрямая или прямая. Для прочих функций можно полагать $g=f$. Определение $\tau_{r,m}(f, S)$ корректно, поскольку $f_j=f\cdot X_j\in W^1(S)$, при этом f_j не меняет знака на S. Легко проверить, что для неотрицательных и неположительных функций $\tau_{r,m}(f, S)=\tau_r(f, S)$.

ЛЕММА 1. *Если S — отрезок, полупрямая или прямая, $\overline{G}=S$, $f\in W^1(S)$, $H_1\subset G$ — интервал, $H=\overline{H}_1$, X_H — характеристическая функция множества H, то $f\cdot X_H\in W^1(S)$ тогда и только тогда, когда $f(x)=0$*

для $x \in \partial H_1 \setminus \partial G$. *Если* $f \cdot \mathrm{X}_H \in W^1(S)$, *то*

$$\tau_{r,m}(f \cdot \mathrm{X}_H, S) = \begin{cases} \left(\sum\limits_{j \in \sigma(H)} \tau_r^m(j)\right)^{\frac{1}{m}} & \text{при} \quad m < \infty, \\ \sup\limits_{j \in \sigma(H)} \tau_r(j) & \text{при} \quad m = \infty, \end{cases}$$

где $\sigma(H) = \{j \in \sigma : T_j \subset H\}$. *Если функционал* $\tau_r(f, S)$ *обладает свойствами* 1 *и* 2, *то этими свойствами с той же константой* $\varkappa$ *обладает функционал* $\tau_r(f, H)$, *где* $\tau_r(f, H) = \tau_r(f \cdot \mathrm{X}_H, S)$, *если* $f \cdot \mathrm{X}_H \in W^1(S)$, *и* $\tau_r(f, H) = \infty$, *если* $f \cdot \mathrm{X}_H \overline{\in} W^1(S)$.

Доказательство. Проверка условий, при которых $f \cdot \mathrm{X}_H \in W^1(S)$, т. е. $f \cdot \mathrm{X}_H$ абсолютно непрерывна на любом отрезке, не составляет труда. Чтобы получить формулу для $\tau_{r,m}(f \cdot \mathrm{X}_H, S)$, достаточно доказать, что $\tilde{H} = \{x \in H_1 : f(x) \neq 0\} = \bigcup\limits_{j \in \sigma(H)} T_j$. Действительно, по определению составляющего интервала (связной компоненты) каждый составляющий интервал (a, b) множества $\tilde{H}$ входит только в один из интервалов $T_j = (A, B)$. Предположим, что $(a, b) \neq (A, B)$, например, $A < a$. Очевидно, $a \overline{\in} \partial G$, $a \in \partial \tilde{H}$. С другой стороны, $a \in T_j$ и, согласно предложению VIII из § 1, $f(a) \neq 0$, а с учетом соотношения (21) и определения множества H_1 получаем: $a \in \partial H_1 \cap \partial G$. Мы пришли к противоречию. Итак, $(a, b) = (A, B)$. Перейдем к последнему утверждению. Очевидно, $\tau_r(f, H)$ обладает свойством 1, а также и свойством 2, если $\tau_r(f, H) = \infty$. Если же $\tau_r(f, H) < \infty$, то $f \cdot \mathrm{X}_H \in W^1(S)$ и следует воспользоваться свойством 2 для функционала $\tau_r(f \cdot \mathrm{X}_H, S)$.

Положим

$$\overline{m} = \begin{cases} \dfrac{1}{z+1}, & \text{если} \quad z = \dfrac{r \cdot l \cdot \Delta(p, q, r, k, l)}{k - \frac{1}{q} + \frac{1}{p}} > -1, \\ \infty, & \text{если} \quad z \leqslant -1. \end{cases}$$

ЛЕММА 2. *Если* $0 < m \leqslant n$, *то*

$$\tau_{r,m}(f, S) \geqslant \tau_{r,n}(f, S) \geqslant \tau_{r,\infty}(f, S). \tag{22}$$

Если $0 < p$, $q \leqslant \infty$, $r \geqslant 1$, $0 \leqslant k \leqslant l-1$, $\Delta(p, q, r, k, l) \leqslant 0$, *то*

$$k - \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \geqslant \frac{k}{l}\left(l - \frac{1}{r} + \frac{1}{p}\right) \geqslant 0, \quad \overline{m} \geqslant r. \tag{23}$$

Доказательство. Поскольку σ — не более чем счетное множество, $\tau_{r,m}$ есть норма последовательности $\{\tau_r(j)\}_{j \in \sigma}$ в метрике пространства последовательностей l_m и неравенство (22) следует из [([8]), стр. 140]. Неравенства (23) очевидны.

Одной из реализаций функционала $\tau_r(f, S)$ является построенный ниже функционал $\|f^{(1)}\|^{+}_{r,S}$ (ср. с (3)). Используя этот функционал, мы легко можем получить из общих теорем этого параграфа достаточность теоремы 1. Пусть $f \in W^1(S)$, $T_j = (a_j, b_j)$, $T = \bigcup\limits_{j \in \sigma} T_j$ — разложение вида (20), $\overline{T}_j$ — замыкание T_j. Построим нелинейный оператор $U_r: f \to \varphi$, где $f \in W^1(S)$, следующим способом. Если $x \in S \setminus \bigcup_{j \in \sigma} \overline{T}_j$, то $\varphi(x) = 0$. Если T_j — конечный интервал и $f(a_j) \neq 0$, $f(b_j) \neq 0$, то $\varphi(x) = f'(x)$ для $x \in \overline{T}_j$. Если множество T_j таково, что выполняется хотя бы одно из следующих условий:

а) $f(x) = 0 \ \forall x \in \partial T_j$, $\|f_+^{(1)}\|_{r,T_j} \leqslant \|f_-^{(1)}\|_{r,T_j}$;

б) $f(a_j) < 0$ и либо $f(b_j) = 0$, либо $b_j = \infty$;

в) $f(b_j) > 0$ и либо $f(a_j) = 0$, либо $a_j = -\infty$,

то на множестве $\overline{T}_j$ полагаем $\varphi(x) = f_+^{(1)}(x)$. Во всех остальных точках полагаем $\varphi(x) = f_-^{(1)}(x)$.

Положим

$$\|f^{(1)}\|_{r,S}^+ = \|U_r f\|_{r,S}, \quad \|f^{(l)}\|_{r,S}^+ = \|U_r f^{(l-1)}\|_{r,S}.$$

Покажем, что функционал $\|f^{(l)}\|_r^+$ обладает свойствами 1, 2, 3 и 4.

Стандартный символ S в обозначениях $\|f\|_{p,S}$, $\|f^{(l)}\|_{r,S}^+$ и т. д. мы в дальнейшем часто будем опускать и писать $\|f\|_p$, $\|f^{(l)}\|_r^+$ и т. д.

Выделим три группы условий, налагаемых на параметры:

$$0 < p, q, r \leqslant \infty, \quad \alpha = \alpha(p, q, r, k, l), \tag{24}$$

$$\left.\begin{array}{l} r \geqslant 1, \quad \mu(k, p, q) = k - \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} > 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant l-1, \\ \overline{m} = \begin{cases} \dfrac{1}{\eta+1}, & \text{если } \eta = \dfrac{r \cdot l\Delta(p, q, r, k, l)}{\mu(k, p, q)} > -1, \\ \infty, & \text{если } \eta \leqslant -1, \end{cases} \end{array}\right\} \tag{25}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \leqslant k \leqslant l-1, \quad \Delta(p, q, r, k, l) > 0, \quad \mu(k, p, q) > 0, \\ \gamma = \gamma(p, q, r, k, l) = \dfrac{l \cdot \Delta(p, q, r, k, l)}{l - \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{p}}. \end{array}\right\} \tag{26}$$

В следующей лемме вычисляются точные константы в неравенствах

$$\|f^{(k)}\|_{q,S} \leqslant K \|f\|_{p,S}^{\alpha} (\|f^{(l)}\|_{r,S}^+)^{1-\alpha}, \quad \alpha = \alpha(p, q, r, k, l), \tag{27}$$

при $l=1$. Это неравенство обобщает неравенство Б. С. Надя ([4]). Оно используется также в дальнейшем при доказательстве основных результатов.

ЛЕММА 3. *Если $l=1$, $k=0$, S — отрезок, полупрямая или прямая и выполнены условия* (24) *и* (25), *то для класса функций $f \in V^{0,1}(S)$, $\|f\|_p < \infty$, имеет место неравенство* (27) *с константой, не зависящей от f и S. Если S — полупрямая или прямая, то точная константа K связана с точной константой K_1 в неравенстве Надя, вычисленной в* ([4]), *соотношением*: $K = 2^{\alpha-1} K_1$.

Доказательство. Из условия (25) следует, что $1-\alpha>0$ и неравенство (27) тривиально, если $\|f^{(1)}\|_r^+=\infty$. Поэтому можно предполагать, что $\|f^{(1)}\|_r^+$, $\|f\|_p<\infty$. Доказательство леммы достаточно конспективно, поскольку оно частично повторяет доказательство неравенства Надя ([4]).

Пусть $f\in V^{0,1}(S)$, $T=\bigcup\limits_{j\in\sigma}T_j$. Так как f имеет нуль на S и, согласно предложению VIII из § 1, $f(x)=0$ для любого $x\in\partial T_j\diagdown\partial G$, то $f\in V^{0,1}(\overline{T}_j)$, $\overline{T}_j$ — замыкание T_j. Оценим сверху $\|f\|_{q,T_j}$. Так как $\|f^{(1)}\|_r^+=\|-f^{(1)}\|_r^+$, то можно считать, что $f(x)>0$ для $x\in T_j$. Положим $H(x)=(-\infty,x]\cap\overline{T}_j$, $\overline{\mu}=1$, если $\varphi(x)=f'_+(x)$ для $x\in T_j$, и $H(x)=\overline{T}_j\cap[x,\infty)$, $\overline{\mu}=-1$, если $\varphi(x)=f'_-(x)$ для $x\in T_j$, $\varphi=U_rf$. Обозначим через c отличный от x конец множества $H(x)$. Из определения φ и свойств множеств T_j следует, что $f(c)=0$, если $|c|<\infty$. Если же $|c|=\infty$, то из предположения $p<\infty$ и конечности $\|f\|_p$ вытекает, что $\underline{\lim}\,|f(y)|=0$, когда $y\to c$, $y\in H(x)$. Введем функцию $F_q(u)$:

$$F_q(u)=\int\limits_0^u\psi(s)\,ds,$$

где

$$\psi(s)=\begin{cases}(m+1)s^m, & \text{если } q=\infty,\\ (s^p-s^q)^{\frac{r-1}{r}}, & \text{если } q<\infty,\end{cases}$$

$m=p\cdot\dfrac{r-1}{r}$. В случае $q=\infty$ будем рассматривать произвольные функции f, а в случае $q<\infty$ ограничимся функциями, у которых $\|f\|_{\infty,T_j}=1$. При этих предположениях $\psi(f(y))\geqslant0$ для $y\in T_j$. Число $\overline{\mu}$, функция φ и интервал $H(x)$ таковы, что

$$\overline{\mu}f'(y)\leqslant\varphi(y)\quad\forall\,y\in H(x),$$

и либо $\underline{\lim\limits_{y\to c}}\,\psi(f(y))=0$, либо $\psi(f(c))=0$. Применяя вначале формулу Ньютона — Лейбница, а на последнем шаге неравенство Гёльдера, получаем:

$$F_q(f(x))=\overline{\mu}\int\limits_{H(x)}\frac{d}{dt}F_q(f(t))\,dt=\overline{\mu}\int\limits_{H(x)}\psi(f(t))f'(t)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{H(x)}\psi(f(t))\varphi(t)\,dt\leqslant\|\psi(f(t))\|_{\frac{r}{r-1},T_j}\|\varphi\|_{r,T_j}. \tag{28}$$

Если $q=\infty$, то для любого $x\in T_j$, $j\in\sigma$, имеем:

$$|f(x)|^{m+1}=F_q(f(x))\leqslant(m+1)\|f\|^m_{p,T_j}\|\varphi\|_{r,T_j}\leqslant(m+1)\|f\|_p^m\|f^{(1)}\|_r^+,$$

откуда легко следует доказываемое неравенство (27). Сопоставляя с константой K_1, получаем оценку $K\leqslant2^{\alpha-1}K_1$. Пусть $q<\infty$ и $x_n\in T_j$ такова, что $f(x_n)\to 1$ при $n\to\infty$. Так как неравенство (28) имеет место для любого x, то

$$F_q(1)\leqslant\|\psi(f(t))\|_{\frac{r}{r-1},T_j}\|\varphi\|_{r,T_j}\leqslant(\|f\|^p_{p,T_j}-\|f\|^q_{q,T_j})\|\varphi\|_{r,T_j}.$$

Повторяя с очевидными изменениями рассуждения на стр. 71—72 в работе ([4]), получаем для $\|f\|_{q,T_j}$ неравенство вида (27) со следующей оценкой для константы: $K\leqslant 2^{\alpha-1}K_1$. Освободимся от ограничения $\|f\|_{q,T_j}=1$. Так как $\|f\|_\infty<\infty$, то путем умножения на константу можно перейти от f к функции g, у которой $\|g\|_{\infty,T_j}=1$ и для которой, следовательно, имеет место неравенство (27). Для обратного перехода от g к f остается воспользоваться однородностью $\|f\|_p$, $\|f\|_q$ и $\|f^{(1)}\|^+_r$.

Так как $q<\infty$ и из условий (24), (25) следует, что $\alpha qp^{-1}+(1-\alpha)qr^{-1}\geqslant 1$, то из уже доказанного на множествах T_j неравенства (27) и неравенства (12) вытекает неравенство

$$\|f\|^q_q=\sum_{j\in\sigma}\|f\|^q_{q,T_j}\leqslant K^q\sum_{j\in\sigma}(\|f\|^p_{p,T_j})^{\frac{\alpha q}{p}}(\|\varphi\|^r_{r,T_j})^{\frac{(1-\alpha)q}{r}}\leqslant K^q\|f\|^{\alpha q}_p\|f^{(1)}\|^{(1-\alpha)q}_r.$$

Чтобы оценить константу K снизу, заметим, что в качестве экстремальной функции в неравенстве Надя можно взять неотрицательную, четную, неубывающую на $(-\infty, 0]$ функцию $z(t)$. Последовательность $z_n(t)$,

$$z_n(t)=\begin{cases} z(t) & \text{при } t\leqslant 0,\\ z(0)-nt & \text{при } 0<t\leqslant\dfrac{z(0)}{n},\\ 0 & \text{при } t>\dfrac{z(0)}{n},\end{cases}$$

такова, что при $n\to\infty$

$$\|z_n\|_{p,I}\to 2^{-\frac{1}{p}}\|z\|_{p,I},\quad \|z_n\|_{q,I}\to\|z\|_{q,I}\cdot 2^{-\frac{1}{q}},$$

и для достаточно больших n

$$\|z_n^{(1)}\|^+_{r,I}=\|z_n'\|_{r,(-\infty,0]}=2^{-\frac{1}{r}}\|z'\|_{r,I},$$

где $I=(-\infty,\infty)$. Легко проверить, что z_n является экстремальной последовательностью в неравенстве (27). Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Пусть S — отрезок, полупрямая или прямая, r, $1\leqslant r\leqslant\infty$, — некоторое число. Функционал $\tau_r(f,S)=\|f^{(1)}\|^+_{r,S}$ обладает свойством* 1, *свойством* 2 *при всех t, $0<t<\infty$, и свойством* 3, *если $l\geqslant 2$, $0<p$, $q\leqslant\infty$. В свойствах* 2 *и* 3 *константы $\varkappa$ и δ можно взять не зависящими от S. Если $S=(-\infty,\infty)$, то $\|f^{(l)}\|^+_r\leqslant\min\|f^{(l)}_+\|_r, \|f^{(l)}_-\|_r$.*

Доказательство. Свойство 1 следует из определения $\|f^{(1)}\|_r^+$, свойство 2 вытекает из леммы 3. Докажем, что $\|f^{(l)}\|_r^+$ обладает свойством 3. Пусть $f\in W^l(S)$, $T=\{x\in G: f(x)\neq 0\}=\bigcup T_j$ и среди T_j есть полупрямая или прямая. Положим для определенности, что есть только один интервал T_j, $\operatorname{mes} T_j=\infty$, и пусть $T_j=[c, \infty)$. Так как $f^{(l-1)}$ не меняет знака на T_j, то согласно предложению VII из § 1 найдется последовательность ξ_n, $\xi_n\to\infty$ при $n\to\infty$, такая, что $f^{(i)}(\xi_n)\to 0$ (исключение: $i=0$, $p=\infty$). В ([20]), стр. 535, указаны такие финитные функции $\Theta_i\in W^1(-\infty, \infty)$, что $\Theta_i^{(i)}(0)=1$, $\Theta_i^{(m)}(0)=0$ при $i\neq m$, $0\leqslant m\leqslant l-1$. Рассмотрим последовательность функций следующего вида:

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x) & \text{при } x\leqslant \xi_n,\\ f(\xi_n)\Phi_n(x-\xi_n)+\sum\limits_{i=1}^{l-1} f^{(i)}(\xi_n)\Theta_i(x-\xi_n) & \text{при } x>\xi_n,\end{cases}$$

где $\Phi_n(x)=\Theta_0(x)$ при $p<\infty$, $\Phi_n(x)=\Theta_0\left(\frac{x}{n}\right)$ при $p=\infty$. Если $p=\infty$ и $l\geqslant 2$, то

$$\|\Phi_n^{(l)}\|_r=n^{-l+\frac{1}{r}}\|\Theta_0^{(l)}\|_r\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Отсюда и из определения последовательности ξ_n вытекает, что

$$\varliminf_{n\to\infty}\|f_n^{(k)}\|_q\geqslant\|f^{(k)}\|_q,\quad \|f_n^{(l)}\|_{r,I_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

$$\|f_n^{(l)}\|_r^+\leqslant\|f^{(l)}\|_r^+ + \|f_n^{(l)}\|_{r,I_n},\quad \|f_n\|_p\to\|f\|_p,\quad p<\infty,$$

и

$$\varlimsup_{n\to\infty}\|f_n\|_{\infty,I_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\left\{\|f(\xi_n)\Phi_n\|_\infty+\left\|\sum_{i=1}^{l-1}f^{(i)}(\xi_n)\Theta_i\right\|_\infty\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\|f\|_\infty\|\Theta_0\|_\infty,\quad I_n=[\xi_n, \infty).$$

Нетрудно видеть, что при достаточно больших n все функции f_n удовлетворяют свойству 3, и любую из них можно взять в качестве функции g. Случай, когда среди T_j есть множества $(-\infty, b]$ или $(-\infty, \infty)$, рассматривается аналогично.

Если $S=(-\infty, \infty)$, то $f^{(l-1)}(x)=0$ для любого $x\in\partial T_j$ и поэтому

$$\|f^{(l)}\|_{r,T_j}^+=\min(\|f_+^{(l)}\|_{r,T_j}, \|f_-^{(l)}\|_{r,T_j})$$

и остается воспользоваться свойством 1 и элементарным неравенством: минимум двух сумм не меньше суммы минимумов слагаемых.

ЛЕММА 5. *Пусть* S — *отрезок, полупрямая или прямая,* $l=k=1$, $0\leqslant\alpha(p,q,r,k,l)<1$, $\gamma=\gamma(p,q,r,k,l)$, $\Theta=\left(1-\frac{1}{r}+\frac{1}{p}\right)^{-1}\neq 0$, $\mu=1-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\neq 0$ *и выполнены условия* (24). *Тогда для класса* $W^1(S)$ *име-*

ют место неравенства

$$\|f'\|_{q,S} \leqslant K\nu^{\gamma}(f')\|f\|^{\alpha}_{p,S}\|f'\|^{1-\alpha}_{r,S}, \tag{29}$$

$$\|f'\|_{L(S)} \leqslant 2\nu(f')\|f\|_{\infty,S} \tag{30}$$

с константой K, не зависящей от f и S.

Доказательство. Если f' не меняет знака на некотором отрезке $[c, d]$, то

$$\left|\int\limits_c^d f'(t)\,dt\right| = |f(d)-f(c)| \leqslant 2\|f\|_{\infty},$$

откуда легко следует неравенство (30).

Пусть $S=[a, b]$ — отрезок, $f\in W^1(S)$, $\nu(f')=1$. Тривиальный случай $q=r$ сразу исключим из рассмотрения. В остальных случаях α, $1-\alpha>0$, и из предложения VI в § 1 вытекает, что можно ограничиться функциями g вида

$$g(x) = \int\limits_{x_0}^{x} g'(t)\,dt,$$

где $g'(t)$ не возрастает на $\Gamma=[a, x_0]$ и не убывает на $Z=[x_0, b]$.

Оценим сначала $\|g'\|_{q,\Gamma}$. Без ограничения общности можно считать, что $a=0$. Пусть

$$\varepsilon = (\|g\|_{p,\Gamma}\|g'\|^{-1}_{r,\Gamma})^{\theta}, \quad \eta = \left(\|g\|^{-\frac{1}{r}}_{p,\Gamma}\|g'\|^{1+\frac{1}{p}}_{r,\Gamma}\right)^{\theta},$$

и пусть $x, y\in\Gamma$, $x\leqslant y$. Так как $g'(x)\geqslant g'(y)\geqslant 0$, то

$$|g(x)| = -g(x) \geqslant \int\limits_x^y g'(t)\,dt \geqslant g'(y)(y-x),$$

$$\|g'\|_{p,H} \geqslant g'(y)\|y-x\|_{p,H}; \quad |g'(y)| \leqslant cy^{-1-\frac{1}{p}}\|g\|_{p,\Gamma}, \quad H=[0, y], \tag{31}$$

где $c=(p+1)^{\frac{1}{p}}$ при $p<\infty$, $c=1$ при $p=\infty$. Разобьем множество Γ на три подмножества: R, U, V, где $R=[0, x_0]\cap[\varepsilon, \infty)$, $U=\{x\in\Gamma : g'(x)>\eta\}$, $V=\Gamma\setminus(U\cup R)$. Заметим, что при $r=\infty$ $\eta=\|g'\|_{r,\Gamma}$ и, следовательно, $\operatorname{mes} U=0$.

Пусть $\Theta>0$. Из условий леммы вытекает, что в этом случае $r\geqslant q$ и $\mu>0$. Используя для оценки $\|g'\|_{q,R}$ неравенство (31), а для оценки $\|g'\|_{q,V}$ соотношения $\operatorname{mes} V\leqslant\varepsilon$, $g'(x)\leqslant\eta$ при $x\in V$, получаем:

$$\|g'\|^q_{q,R} = \int\limits_{\varepsilon}^{x_0} |g'(t)|\,dt \leqslant c^{-q}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} t^{-q\left(1+\frac{1}{p}\right)}\,dt\right)\|g\|^q_{p,\Gamma} =$$

$$= c^{-q}\varepsilon^{-\mu q}\|g\|^q_{p,\Gamma} \leqslant c_1\|g\|^{\alpha q}_{p}\|g'\|^{(1-\alpha)q}_{r},$$

$$\|g'\|_{q,V} \leqslant \eta^q \operatorname{mes} V \leqslant \eta^q \varepsilon \leqslant \|g\|_p^{\alpha q} \|g'\|_r^{(1-\alpha)q}$$

и при $r<\infty$

$$\|g'\|_{q,U}^q = \eta^{q-r}\left(\int\limits_U |g'(t)|^q \eta^{r-q}\, dt\right) \leqslant \eta^{q-r} \|g'\|_{r,U}^r \leqslant \|g\|_p^{\alpha q} \|g'\|_r^{(1-\alpha)q}.$$

Из этих оценок вытекает неравенство

$$\|g'\|_{q,\Gamma} \leqslant K_1 \|g\|_p^{\alpha} \|g'\|_r^{1-\alpha}. \tag{32}$$

Пусть $\Theta<0$. Тогда $r\leqslant q$, $\mu<0$. Из (31) следует, что либо $R=\varnothing$, либо в точках $y\in R$

$$|g'(y)| \leqslant c\varepsilon^{-1-\frac{1}{p}} \|g\|_{p,\Gamma}. \tag{33}$$

Используя для оценки $\|g'\|_{q,\Gamma\setminus R}$, где $\Gamma\setminus R=\Gamma\cap[0,\varepsilon]$, неравенство (31), а для оценки $\|g'\|_{q,R}$ — неравенство (33), получаем:

$$\|g'\|_{q,\Gamma\setminus R}^q \leqslant c^q \|g\|_{p,\Gamma}^q \left\{\int\limits_0^{\varepsilon} t^{-q\left(1+\frac{1}{p}\right)} dt\right\} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \|g\|_{p,\Gamma}^q \varepsilon^{-\mu q} \leqslant c_1 \|g\|_p^{\alpha q} \|g'\|_r^{(1-\alpha)q},$$

$$\|g'\|_{q,R}^q \leqslant \|g'\|_{r,R}^r \|g'\|_{\infty,R}^{q-r} \leqslant \left(c\varepsilon^{-1-\frac{1}{p}} \|g\|_{p,\Gamma}\right)^{q-r} \|g'\|_{r,\Gamma}^q \leqslant c_2 \|g\|_p^{\alpha q} \|g'\|_r^{(1-\alpha)q}.$$

Как следствие получаем и в этом случае неравенство (32).

Чтобы оценить $\|g'\|_{q,Z}$, заметим, что функция $f(x)=-g(b-x)$ также принадлежит к рассматриваемому классу, причем

$$f(x) = \int\limits_t^x f'(s)\, ds, \quad t=b-x_0, \quad M=[0,t],$$

$$\operatorname{mes} M = \operatorname{mes} Z, \quad f'(s) \geqslant 0.$$

Аналогично предыдущему получаем, что

$$\|g'\|_{q,Z} < K_2 \|g\|_p^{\alpha} \|g'\|_r^{1-\alpha}. \tag{34}$$

Объединяя оценки (32) и (34), получим доказываемое неравенство при $\nu(f')=1$. Пусть $\nu=\nu(f')>1$. Тогда найдется ν интервалов S_i, на каждом из которых f' не меняет знака, и, согласно доказанному выше,

$$\|f'\|_{q,S_i} \leqslant K \|f\|_{p,S_i}^{\alpha} \|f'\|_{r,S_i}^{1\ \alpha}.$$

Так как $\alpha qp^{-1}+(1-\alpha)qr^{-1}<1$, то, согласно неравенству (13) при $A=\alpha qp^{-1}$, $B=(1-\alpha)qr^{-1}$,

$$\|f'\|_q^q = \sum_{i=1}^{\nu} \|f'\|_{q,S_i}^q \leqslant K^q \nu^{\gamma q} \|f\|_p^{\alpha q} \|f'\|_r^{(1-\alpha)q}.$$

В случае $\operatorname{mes} S=\infty$ неравенство (29) получается предельным переходом.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть действительные числа* p, q, r, α *и целые числа* k, l *удовлетворяют условиям* (24), (25), $0<m\leqslant\bar{m}$, *функционал* $\tau_r(f, S)$ *обладает свойством* 1 *и свойством* 2 *при всех* t, $0<t<\infty$.

а) *Если* S — *отрезок, то для любой функции* $f\in V^{j,l}(S)$, $j\leqslant k$, *имеет место неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_{q,S}\leqslant K\|f\|_{p,S}^{\alpha}\{\tau_{r,m}(f^{(l-1)}, S)\}^{1-\alpha},\qquad \alpha=\alpha(p,q,r,k,l). \tag{35}$$

б) *Если* S — *отрезок, то для любой* $f\in V^{j,l}(S)$, $j\leqslant k$, *и любого* h, $0<h<\operatorname{mes} S$, *имеет место неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_q\leqslant K\|f\|_p^{\alpha}\{\tau_{r,m}(f^{(l-1)}, S)\}^{1-\alpha}+A_2(\operatorname{mes}S)^{-\mu}\|f\|_p\leqslant$$
$$\leqslant A_1\{h^{-\mu}\|f\|_p+h^{\eta-\mu}\tau_{r,m}(f^{(l-1)}, S)\},\quad \eta=l-\frac{1}{r}+\frac{1}{p},\quad \mu=\mu(k,p,q). \tag{36}$$

в) *Если* S — *полупрямая или прямая, функционал* $\tau_r(f^{(l-1)}, S)$ *обладает свойством* 3, *если* $l\geqslant 2$, *то для любой функции* $f\in\tilde{W}_p^l(S)=\{f\in W^l(S):\|f\|_p<\infty\}$ *имеет место неравенство* (35).

Константы K, A_1 *и* A_2 *зависят только от* p, q, r, k, l *и от постоянных* $\varkappa$ *и* δ *в свойствах* 2 *и* 3.

Доказательство. Сделаем ряд общих замечаний. Так как $\mu>0$, $l-k$, l, $r\geqslant 1$, то необходимо $\alpha\geqslant 0$, $1-\alpha>0$, и поэтому можно ограничиться рассмотрением функций, у которых $\tau_{r,m}(f^{(l-1)})<\infty$. Если S — отрезок, то в силу непрерывности $\|f\|_p<\infty$. Если же $\operatorname{mes} S=\infty$, то по условию предполагается, что $\|f\|_p<\infty$. Впрочем, это условие существенно только при $\alpha=0$. В силу неравенства (22) достаточно доказать теорему только для $m=\bar{m}$.

Согласно утверждению V для любой функции $f\in V^{j,l}(S)$ найдется полином P степени не выше $j-1$ такой, что для $g=f-P$ будут выполнены соотношения (14), $g^{(i)}=f^{(i)}$ при $i\geqslant j$, $g\in V^{0,l}(S)$. Поэтому при доказательстве пункта а) можно рассматривать только функции из класса $V^{0,l}(S)$. Заметим, что $\alpha=\alpha(p,q,r,k,l)=0$ только тогда, когда $l-k-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=0$, т. е. при $k=l-1$, $r=1$, $q=\infty$. В этом случае неравенство (35)

$$\|f^{(l-1)}\|_\infty\leqslant K\tau_{1,\infty}(f^{(l-1)}, S)$$

легко следует из свойства 2. Во всех остальных случаях $\alpha\in(0, 1)$.

Докажем пункт а) индукцией по параметру l. Пусть $l=1$, $f\in V^{0,1}(S)$, $T=\bigcup_{j\in\sigma}T_j$. Из условия (25) следует, что $p<q\leqslant\infty$. Так как $f_j=f\cdot X_j\in V^{0,1}(S)$, где X_j — характеристическая функция множества $\bar{T}_j$, то по свойству 2 с учетом леммы 1 имеем:

$$\|f\|_{\infty,T_j}=\|f_j\|_\infty\leqslant K\|f_j\|_p^{\alpha}\{\tau_r(j)\}^{1-\alpha}\leqslant K\|f\|_p^{\alpha}\tau_{r,\infty}^{1-\alpha}(f, S).$$

Отсюда легко следует неравенство (35) при $q=\infty$, $m=\overline{m}=\infty$. Если $q<\infty$, то достаточно воспользоваться доказанным выше неравенством и известным неравенством

$$\|f\|_{q,S}\leqslant\|f\|_{p,S}^{\frac{p}{q}}\|f\|_{\infty,S}^{1-\frac{p}{q}},\quad q\geqslant p. \tag{37}$$

Предположим, что утверждение а) верно для всех $l\leqslant n$ и всех k, $0\leqslant k\leqslant l-1$, и докажем его для $l=n+1$. Для этого рассмотрим сначала случай $k=1$. Согласно предложению VIII (см. разложение (20)) множества $R=\{x\in(a,\ b):f'(x)\neq0\}$, $T=\{x\in(a,\ b):f^{(l-1)}(x)\neq0\}$ представимы в виде $R=\bigcup_{i\in\Theta}R_i$, $R_i=(a_i,\ b_i)$, $T=\bigcup_{j\in\sigma}T_j$, где Θ и σ—не более чем счетные множества. Построим по каждому интервалу R_i отрезок $\tilde{R}_i=[t_i,\ z_i]\supset R_i$ следующим способом. Выберем сначала точку $\overline{z}_i\geqslant b_i$, обладающую хотя бы одним из следующих свойств:

1) на отрезке $[b_i,\ \overline{z}_i]$ лежит точно n нулей функции f';

2) на отрезке $[b_i,\ \overline{z}_i]$ лежит не более n нулей функции f' и $\overline{z}_i$ — точка сгущения нулей f';

3) $\overline{z}_i=b$ и на отрезке $[b_i,\ b]$ не более n нулей функции f'.

Согласно III в случае 1) найдется такая точка ξ, что $f^{(l-1)}(\xi)=0$ и $f^{(j)}(x)$, $1\leqslant j\leqslant l-1$, имеет хотя бы один нуль на $[b_i,\ \xi]$. В этом случае положим $z_i=\xi$. В случае 2) положим $z_i=\overline{z}_i$. Согласно предложению IV $f^{(j)}(z_i)=0$, $1\leqslant j\leqslant l-1$. В случае 3) будем считать $z_i=b$. Точку t_i выберем аналогичным способом. Функция $f(x)$ на отрезке $\tilde{R}_i$ обладает следующими свойствами: f' имеет на $\tilde{R}_i$ не более $2n$ нулей и, следовательно, не более $2l-1$ перемены знака, т. е. $\nu(f')\leqslant2l$, $f\in V^{1,\,l}(\tilde{R}_i)$, $f^{(l-1)}(t_i)=0$, если $t_i\neq a$, $f^{(l-1)}(z_i)=0$, если $z_i\neq b$. Каждый отрезок $\tilde{R}_i$ пересекается не более чем с $2l-1$ отрезками $\tilde{R}_u$, соответствующими интервалам R_u, лежащим правее R_i, и не более чем с $2l-1$ отрезками $\tilde{R}_u$, соответствующими интервалам R_u, лежащим левее R_i. Поэтому R_i и $\tilde{R}_i$ пересекаются не более чем с $4l-1$ отрезками $\tilde{R}_u$. Из определения отрезка $\tilde{R}_i$ следует, что при $p<\infty$

$$\|f\|_{p,i}^{p}=\|f\|_{p,\tilde{R}_i}^{p}=\sum_{u\in\Theta(i)}\|f\|_{p,R_u}^{p},\qquad \Theta(i)=\{u\in\Theta:R_u\subset\tilde{R}_i\},$$

а согласно лемме 1 при $m<\infty$

$$\tau_{r,m}(f^{(l-1)},\tilde{R}_i)=\Big\{\sum_{j\in\sigma(i)}\tau_r^m(j)\Big\}^{\frac{1}{m}},$$

где $\sigma(i)=\{j\in\sigma:T_j\subset\tilde{R}_i\}$ (см. также определение $\tau_{r,m}$). Поскольку при $p,\ m<\infty$ в суммах

$$\tilde{A}=\sum_{i\in\Theta}\|f\|_{p,i}^{p}=\sum_{i\in\Theta}\sum_{u\in\Theta(i)}\|f\|_{p,R_u}^{p},$$

$$\tilde{B}=\sum_{i\in\Theta}\tau_{r,m}^{m}(f^{(l-1)},\tilde{R}_i)=\sum_{i\in\Theta}\sum_{j\in\sigma(i)}\tau_r^m(j)$$

слагаемое $\|f\|^p_{p,R_u}$ и соответственно $\tau^m_r(j)$ встречается не более $4l$ раз, то

$$\left.\begin{aligned} \tilde{A} &\leqslant 4l \sum_{i\in\Theta} \|f\|^p_{p,R_i} \leqslant 4l\|f\|^p_p, \\ \tilde{B} &\leqslant 4l \sum_{j\in\sigma} \tau^m_r(j) \leqslant 4l\tau^m_{r,m}(f^{(l-1)}, S). \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

При $p=\infty$, $m=\infty$, очевидно, имеем:

$$\|f\|_{p,i} \leqslant \|f\|_p, \quad \tau_{r,m}(f^{(l-1)}, \tilde{R}_i) \leqslant \tau_{r,m}(f^{(l-1)}, S).$$

Положим $\bar{q}=q$, если $q<\infty$, $\bar{q}=1$, если $q=\infty$. Согласно лемме 5 и выбору $\tilde{R}_i$ (заметим, что $\nu(f')\leqslant 2l$ на отрезке $\tilde{R}_i$) имеем:

$$\|f'\|_{\bar{q},\tilde{R}_i} = \|f'\|_{\bar{q},i} \leqslant K_1\|f\|^{\alpha_1}_{p,i}\|f'\|^{1-\alpha_1}_{\infty,i}, \tag{39}$$

причем K_1 не зависит от f и $\tilde{R}_i$, $\alpha_1=\alpha(p, \bar{q}, \infty, 1, 1)$. Так как $g(x)=$ $=f'(x)\in V^{0,n}(\tilde{R}_i)$, то для g по предположению индукции имеет место неравенство

$$\|f'\|_{\infty,i} \leqslant K_2\|f'\|^{\alpha_2}_{\bar{q},i}\{\tau_{r,m}(f^{(l-1)}, \tilde{R}_i)\}^{1-\alpha_2}, \quad m\leqslant\infty, \tag{40}$$

где $\alpha_2=\alpha(\bar{q}, \infty, r, 0, n)$, $n=l-1$. Если $q=\infty$, то оценивая в (40) $\|f'\|_{\bar{q}}$ с помощью (39), а если $q<\infty$, то оценивая $\|f'\|_\infty$ в (39) с помощью (40), приходим к неравенству

$$\|f'\|_{q,R_i} \leqslant \|f'\|_{q,i} \leqslant K_3\|f\|^{\alpha}_{p,i}(\tau_{r,\infty}(f^{(l-1)}, \tilde{R}_i))^{1-\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant K_3\|f\|^{\alpha}_{p,i}\{\tau_{r,\bar{m}}(f^{(l-1)}, \tilde{R}_i)\}^{1-\alpha}, \tag{41}$$

$\alpha=\alpha(p, q, r, 1, l)$. Так как $\|f'\|_\infty=\sup\limits_i\|f'\|_{\infty,i}$, то в случае $q=\infty$, $k=1$ доказываемое неравенство непосредственно следует из (41). Если $q<\infty$, то из условия (25) и равенств $A=\dfrac{\alpha q}{p}$, $B=\dfrac{(1-\alpha)q}{\bar{m}}$ следует, что $A+B\geqslant 1$, и, применяя последовательно неравенство (41), предложение II из § 1 и неравенства (38), получаем:

$$\|f'\|^q_q \leqslant \sum_{i\in\Theta}\|f'\|^q_{q,i} \leqslant K^q_3\sum_{i\in\Theta}(\|f\|^p_{p,i})^A(\tau^{\bar{m}}_{r,\bar{m}}(f^{(l-1)}, \tilde{R}_i))^B \leqslant$$
$$\leqslant K^q_3\left(\sum_{i\in\Theta}\|f\|^p_{p,i}\right)^A\left(\sum_{i\in\Theta}\tau^{\bar{m}}_{r,\bar{m}}(f^{(l-1)}, \tilde{R}_i)\right)^B \leqslant K^q\|f\|^{\alpha q}_p\{\tau_{r,\bar{m}}(f^{(l-1)}, S)\}^{(1-\alpha)q}.$$

Докажем утверждение а) при $k>1$, $l=n+1$. Пусть $\alpha=\alpha(p, q, r, k, l)$, $\beta=1-\alpha$, $\dfrac{1}{q_1}=\dfrac{k-1}{kp}+\dfrac{1}{kq}$. Из условия $\mu>0$ следует, что

E) $\mu(1, p, q_1)>0$, $\bar{m}=\bar{m}(p, q, r, k, l)=\bar{m}(p, q_1, r, 1, l)$,

F) $\mu(k-1, q_1, q)>0$, $\bar{m}(q_1, q, r, k-1, l-1)=\bar{m}$.

Согласно установленному выше при $k=1$ неравенству (35) с учетом условия E) имеем:

$$\|f'\|_{q_1} \leqslant K_2 \|f\|_p^{\alpha_2} \tau_{r,\overline{m}}^{1-\alpha_2},$$
$$\tau_{r,\overline{m}} = \tau_{r,\overline{m}}(f^{(l-1)}, S), \quad \alpha_2 = \alpha(p, q_1, r, 1, l) = 1 - \frac{\beta}{k}. \tag{42}$$

Так как $g(x) = f'(x) \in V^{j-1, l-1}(S)$, $l-1=n$, то по предположению индукции с учетом условия F) получаем:

$$\|f^{(k)}\|_q = \|g^{(k-1)}\|_q \leqslant K_1 \|f'\|_{q_1}^{\alpha_1} \tau_{r,\overline{m}}^{1-\alpha_1},$$
$$\alpha_1 = \alpha(q_1, q, r, k-1, n) = \frac{k\alpha}{k-\beta}. \tag{43}$$

Оценивая $\|f'\|_{q_1}$ в (43) с помощью неравенства (42), получаем нужное неравенство при $k>1$. В случае $k=0$ требуемое неравенство легко получается, если использовать уже доказанные при $k=1$, $l=n+1$ и $k=0$, $l=1$ неравенства (35) и соотношение (37).

Докажем пункт б) теоремы. Согласно утверждению V для функции $f \in V^{j,l}(S)$ существует полином P степени не выше $j-1$, обладающий свойствами (14). Так как $Q = f - P \in V^{0,l}(S)$, $\|Q\|_p \leqslant A\|f\|_p$, $Q^{(l-1)} = f^{(l-1)}$, $\tau_{r,m} \div \tau_{r,m}(f^{(l-1)}, S) = \tau_{r,m}(Q^{(l-1)}, S)$, то, применяя последовательно предложение 1 из § 1, неравенство (35) для функции Q и соотношения (14), получаем:

$$\|f^{(k)}\|_q \leqslant 2(\|Q^{(k)}\|_q + \|P^{(k)}\|_q) \leqslant K\|f\|_p^{\alpha} \tau_{r,m}^{1-\alpha} + B(\operatorname{mes} S)^{-\mu}\|f\|_p.$$

Чтобы завершить доказательство, воспользуемся легко проверяемыми соотношениями:

$$\inf_{0<h<\infty} \{h^{-\mu}\|f\|_p + h^{\eta-\mu}\tau_{r,m}\} = M\|f\|_p^{\alpha}\tau_{r,m}^{1-\alpha}, \qquad \alpha = \alpha(p, q, r, k, l),$$

где M не зависит от f, и неравенством

$$h^{-\mu} \geqslant (\operatorname{mes} S)^{-\mu}, \quad \text{если} \quad h \leqslant \operatorname{mes} S.$$

Докажем пункт в). Пусть $l=1$. Из условия (25) следует, что $p<\infty$. Из конечности $\|f\|_p$ вытекает, что $\inf\limits_{x\in S}|f(x)| = 0$, т. е. $f \in V^{0,1}(S)$. Остается повторить рассуждения, проведенные при доказательстве пункта а) в случае $l=1$.

Пусть $l \geqslant 2$. Так как $\alpha \geqslant 0$, $1-\alpha>0$, то согласно свойству 3 можно ограничиться функциями f, у которых $f^{(l-1)}$ имеет нуль на любой полупрямой $H \subset S$. Положим для определенности $S = [a, \infty)$. Для функции f найдется последовательность b_n, $b_n \to \infty$, такая, что $f^{(l-1)}(b_n) = 0$. Положим $H_n = [a_n, b_n]$. Способом, указанным в лемме 1, определим функционал $\tau_r(f^{(l-1)}, H_n)$. Согласно лемме 1

$$f^{(l-1)}\cdot\chi_{H_n}\in W^1(S),\quad \tau_{r,m}(f^{(l-1)}, H_n)\leqslant\tau_{r,m}(f^{(l-1)}, S).$$

Так как $f\in V^{l-1,l}(H_n)$, то для оценки $\|f^{(k)}\|_{q,H_n}$ можно использовать неравенство (36). Переходя к пределу при $n\to\infty$ и учитывая, что $(\operatorname{mes} H_n)^{-\mu}\to 0$, $\|f^{(k)}\|_{q,H_n}\to\|f^{(k)}\|_q$, получаем требуемое неравенство. Теорема доказана.

В рассматриваемых вопросах наиболее интересен тот случай, когда $n=r$. Именно этому случаю соответствуют неравенства теоремы 1 и теоремы 2.

Следующая теорема позволяет получать неравенства вида (4) при соответствующем выборе функционала $\tau_r(f, S)$. Неравенства, подобные указанным в этой теореме, ранее, по-видимому, не рассматривались.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть выполнены условия* (24) *и* (26), *функционал* $\tau_r(f, S)$ *обладает свойством* 1 *и свойством* 2 *при всех* t, $0<t<\infty$, *а функционал* $\tau_{r,r}(f^{(l-1)}, S)$ *обладает свойством* 3 *при* $l\geqslant 2$. *При этих условиях для класса* $V^{j,l}(S)$, *если* S — *отрезок*, $j\leqslant k$, *и для класса* $\widetilde{W}^l_p(S)$, *если* S — *полупрямая или прямая, имеет место неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_{q,S}\leqslant K\nu^{\gamma}(f^{(k)})\,\|f\|^{\alpha}_{p,S}\{\tau_{r,r}(f^{(l-1)}, S)\}^{1-\alpha},\tag{44}$$

причем K *зависит только от* p, q, r, k, l, $\varkappa$ *и* δ; $\alpha=\alpha(p, q, r, k, l)$.

Доказательство. Из условий (24) и (26) вытекает, что α, $\gamma>0$, $1-\alpha\geqslant 0$. Поэтому можно ограничиться функциями, у которых $\|f\|_p$, $\nu(f^{(k)})<\infty$, $\tau_{r,r}=\tau_{r,r}(f^{(l-1)}, S)<\infty$. Докажем теорему индукцией по параметру k. Пусть $k=1$, $l\geqslant 2$ — произвольное. Выберем $\bar q>0$ так, чтобы $\Delta(p, \bar q, r, 1, t)=0$. Из условия (26) следует, что $\bar q>q$. По теореме 3 (пункты а) и в)) имеем:

$$\|f'\|_{\bar q}\leqslant K\|f\|_p^{\frac{l-1}{l}}\{\tau_{r,r}\}^{\frac{1}{l}},$$

а согласно лемме 5

$$\|f'\|_q\leqslant K\nu^{\tilde\gamma}(f')\,\|f\|_p^{\alpha_2}\|f'\|_{\bar q}^{1-\alpha_2},$$

$$\alpha_2=\alpha(p, q, \bar q, 1, 1),\quad \tilde\gamma=\gamma(p, q, \bar q, 1, 1)=\gamma(p, q, r, 1, l).$$

Остается оценить $\|f'\|_{\bar q}$ во втором неравенстве с помощью первого.

Предположим, что теорема доказана при всех $k\leqslant n$ и всех l, $0\leqslant k\leqslant l-1$. Докажем ее при $k=n+1$. Заметим, что если $f^{(n+1)}$ не меняет знака на некотором отрезке $[c, d]$, то $f^{(n)}$ имеет на этом отрезке не более двух перемен знака (см. определение $\nu(f)$). Поэтому

$$\nu(f^{(n)})\leqslant 2\nu(f^{(n+1)}),\ \ldots,\ \nu(f')\leqslant 2^n\nu(f^{(n+1)}).$$

По условию $\mu(k, p, g)>0$, $k=n+1$. Возьмем такое $\bar p>0$, что $n+1+$

$+\frac{1}{p}>n+\frac{1}{\bar{p}}>\frac{1}{q}$. Тогда, очевидно, $1-\frac{1}{\bar{p}}+\frac{1}{p}>0$ и из уже доказанного при $k=1$ неравенства (44) с учетом соотношения между $\nu(f')$ и $\nu(f^{(n+1)})$ получаем:

$$\|f'\|_{\bar{p}}\leqslant K_1\nu^{\gamma_1}(f')\|f\|_p^{\alpha_1}\tau_{r,r}^{1-\alpha_1}\leqslant K_2\nu^{\gamma_1}(f^{(n+1)})\|f\|_p^{\alpha_1}\tau_{r,r}^{1-\alpha_1},$$

$\gamma_1=\gamma(p,\bar{p},r,1,l)$. Так как $\mu(n,\bar{p},q)>0$, то по предположению индукции для $g(x)=f'(x)$ имеем:

$$\|g^{(n)}\|_q=\|f^{(n+1)}\|_q\leqslant K\nu^{\gamma_2}(f^{(n+1)})\|f'\|_{\bar{p}}^{\alpha_2}\tau_{r,r}^{1-\alpha_2},$$

$$\alpha_2=\alpha(\bar{p},q,r,n,l-1),\qquad \gamma_2=\gamma(\bar{p},q,r,n,l-1).$$

Для завершения доказательства достаточно оценить $\|f'\|_{\bar{p}}$ во втором неравенстве с помощью первого и убедиться, что $\gamma=\gamma_2+\alpha_2\gamma_1$.

Следствие 1. *Пусть* $\overset{0}{W}{}^l(d)$ *— множество периодических с периодом* d *функций,* $\overset{0}{W}{}^l(d)\subset W^l(-\infty,\infty)$, $S=[a,a+b]$, $\tau_r(f,S)$ *— функционал, обладающий свойством* 1 *и свойством* 2 *при любом* t, $0<t<\infty$, x_0 *— точка, в которой*

$$|f(x_0)|=\min_{x\in S}|f(x)|,\quad \overset{0}{\tau}_{r,m}=\inf_{-\infty<c<\infty}\tau_{r,m}(f^{(l-1)}(x+c),S).$$

а) *Если выполнены условия* (24) *и* (25), $0<m\leqslant\bar{m}$, *то для класса функций* $\overset{0}{W}{}^l(d)$ *имеет место неравенство*

$$\|g^{(k)}\|_{q,S}\leqslant K\|f\|_{p,S}^{\alpha}(\overset{0}{\tau}_{r,m})^{1-\alpha},$$

где $g(x)=f(x)-f(x_0)$, $g^{(k)}=f^{(k)}$ *при* $k>0$.

б) *Если выполнены условия* (24) *и* (26), *то имеет место неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_{q,S}\leqslant K\nu^{\gamma}(f^{(k)})\|f\|_{p,S}^{\alpha}(\overset{0}{\tau}_{r,r})^{1-\alpha}.$$

Действительно, по определению g имеет нуль на S, $\|g\|_p\leqslant\|f\|_p$, и в силу периодичности каждая из $g^{(i)}$, $1\leqslant i\leqslant l-1$, имеет нуль, т. е. $g\in V^{0,l}(S)$. Применяя теорему 3 или теорему 4 и учитывая, что при любых i и любых c $\|f^{(i)}(x+c)\|_{t,S}=\|f^{(i)}(x)\|_{t,S}$, получаем требуемые неравенства.

Следствие 2. *В теореме* 3 *и* 4 *и в следствии* 1 *в качестве функционала* $\tau_{r,r}(f^{(l-1)},S)$ *можно взять* $\|f^{(l)}\|_{r,S}^{+}$ *или* $\|f^{(l)}\|_{r,S}$.

Следствие 3. Если $f\in\overset{0}{W}{}^l(d)$, $l\geqslant 2$, $\tau_{r,r}(f^{(l-1)},S)=\|f^{(l)}\|_{r,S}^{+}$, $S=[a,a+d]$ *— произвольный отрезок и функция* Φ *обладает свойством* (9) *или* (10), *то*

$$\overset{0}{\tau}_{r,r}\leqslant\min(\|f_+^{(l)}\|_{r,S},\ \|f_-^{(l)}\|_{r,S})\leqslant\|\Phi\|_{r,S}.$$

Возьмем такое c, что $f^{(l-1)}(a+c)=0$. Тогда из определения $\|f^{(l)}\|_r^+$, утверждения VIII и свойства I следует, что

$$\|f^{(l)}(x+c)\|_{r,S}^+ \leqslant \min(\|f_+^{(l)}(x+c)\|_{r,S}, \|f_-^{(l)}(x+c)\|_{r,S}).$$

Остается заметить, что $\|f_+^{(l)}\|_{r,S}$, $\|f_-^{(l)}\|_{r,S}$ не меняется при сдвиге и $\|f_+^{(l)}\|_r \leqslant \leqslant \|\Phi\|_r$, если выполнено условие (9), $\|f_-^{(l)}\|_r \leqslant \|\Phi\|_r$, если выполнено условие (10).

Следствие 4. *Пусть S—отрезок, $k>0$, $p, q>0$ и $q\leqslant 1$, если $k=1$, $p=\infty$, $q<\frac{p}{kp+1}$ —в остальных случаях. Тогда для функций $f\in W^k(S)$ имеет место неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_{q,S} \leqslant B\nu^k(f^{(k)})(\operatorname{mes} S)^{-\mu}\|f\|_{p,S} \tag{45}$$

с константой B, не зависящей от f, S и ν; $\mu=\mu(k, p, q)$.

Рассмотрим случай $k=1$. Если $p=\infty$, то неравенство (45) совпадает с неравенством (30). Поскольку f непрерывна, то всегда $\|f\|_\infty<\infty$ и, следовательно, $\|f'\|_L<\infty$, $\|f'\|_r<\infty$ при $0<r<1$. Выберем $r<q$ так, что $1-\frac{1}{r}+\frac{1}{p}<0$. Тогда по лемме 5

$$\|f'\|_q \leqslant K\|f\|_p^\alpha \|f'\|_r^{1-\alpha}\nu^\nu(f'), \quad \alpha=\alpha(p, q, r, 1, 1).$$

Оценивая $\|f'\|_r$ с помощью неравенства

$$\|f'\|_r \leqslant (\operatorname{mes} S)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}\|f'\|_q,$$

получим требуемое неравенство при $k=1$. Применяя последовательно это неравенство, получим неравенство (45) при произвольном k.

Замечание 2. Известно, что если R — рациональная дробь порядка n, то $\nu(R)\leqslant n+1$, при этом R' — рациональная дробь порядка не выше $2n$. Пользуясь этими соображениями, из следствия 4 легко получить теорему 1 работы ([22]).

Следствие 5 [см. ([19])]. *Если S — отрезок и выполнены условия (24) и (25), то при любом h, $0<h\leqslant \operatorname{mes} S$, для функции $f\in W^l(S)$ имеет место неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_{q,S} \leqslant A\{h^{-\mu}\|f\|_{p,S}+h^{\eta-\mu}\|f^{(l)}\|_{r,S}\},$$

где A не зависит от f, S и h, $\eta=l-\frac{1}{r}+\frac{1}{p}$.

Действительно, согласно предположению V из § 1 для функции f найдется полином P, $P^{(l)}\equiv 0$, такой, что выполняются соотношения (14), при этом $g=f-P\in V^{0,l}(S)$, $\|g^{(l)}\|_r=\|f^{(l)}\|_r$. Остается применить к функции g теорему 3 (пункт б)), следствие 2 и воспользоваться соотношениями (14).

Доказательство теорем 1 и 2. Согласно неравенству (23) $\overline{m} \geqslant r$ и $\mu(k, p, q) \geqslant 0$, если $\Delta(p, q, r, k, l) \leqslant 0$. Действительно, из условий $\frac{1}{q} - \frac{l-k}{lp} - \frac{k}{lr} \leqslant 0$, $l, r \geqslant 1$, следует:

$$\mu = k - \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \geqslant k - \frac{l-k}{lp} - \frac{k}{lr} + \frac{1}{p} = \frac{k}{l}\left(l - \frac{1}{r} + \frac{1}{p}\right) \geqslant 0.$$

При этом $\mu(k, p, q) = 0$ только при $k=0$, $q=p$. В этом случае достаточность теоремы 1 и теорема 2 тривиальны. В остальных случаях это следует из теоремы 3, следствия 2 и леммы 4.

Необходимость. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2 из работы [([16]), стр. 297—298], установим, что:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\ \alpha + \beta = 1; \\ &\text{б)}\ -\frac{\alpha}{p} + \beta\left(l - \frac{1}{r}\right) = k - \frac{1}{q}; \\ &\text{c)}\ \frac{\alpha q}{p} + \frac{\beta q}{r} \geqslant 1. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Покажем, что $\beta=0$ при $r<1$. Пусть $f \geqslant 0$ — произвольная суммируемая функция с носителем, лежащим в отрезке $[0, a]$. Определим оператор $I_a : f \to g$ следующим образом:

$$g(x) = \int_0^x \psi(t)\,dt,$$

где $\psi(t) = f(t)$ при $t \leqslant a$, $\psi(t) = -f(t-a)$ при $t > a$. Очевидно, g — финитная непрерывная функция с носителем в отрезке $[0, 2a]$. Пусть $F = I_a^l f = I_{2^{l-1}a}(\ldots I_a f)$ — результат последовательного применения операторов I_a, I_{2a}, ... Очевидно, F — финитная функция с носителем на отрезке $[0, 2^l a]$, $F \in W^l(-\infty, \infty)$, $F^{(l-1)}(x) \geqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant a$ и $f(x) \geqslant 0$, $|F^{(l)}(x)| = |f(x - ja)|$ при $ja \leqslant x \leqslant (j+1)a$, $j = 0, 1, \ldots, 2^l - 1$. По формуле Тэйлора с остаточным членом в интегральном виде имеем при $i \leqslant l-1$:

$$F^{(i)}(x) = \frac{1}{(l-2-i)!}\int_0^x F^{(l-1)}(s)(x-s)^{l-2-i}\,ds. \tag{47}$$

Пусть при $n = 1, 2, \ldots$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 2n+1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2n+1}, \\ 0 & \text{в остальных точках;} \end{cases}$$

$$\psi_n(x) = \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \varphi_n\left(x - \frac{j}{2n+1}\right).$$

Рассмотрим две последовательности функций: $\Phi_n = I_a^l \varphi_n$, $a = 2$, и $\Psi_n = I_a^l \psi_n$. Нетрудно видеть, что $\Phi_n^{(l-1)}(x) = \Psi_n^{(l-1)}(x) = 1$ при $1 \leqslant x < 2$, $\Phi_n^{(l-1)}(x)$,

$\Psi_n^{(l-1)}(x) \geqslant 0$ при $x \leqslant 1$,

$$\|\Phi_n^{(l)}\|_r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \|(\Psi_n)_+^{(l)}\|_r, \ \|(\Psi_n)_-^{(l)}\|_r \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Из формулы (47) следует, что существуют такие A, B, $0<A$, $B<\infty$, что

$$A \leqslant \|\Phi_n\|_p, \quad \|\Psi_n\|_p, \ \|\Phi_n^{(k)}\|_q, \ \|\Psi_n^{(k)}\|_q \leqslant B.$$

Так как Φ_n, $\Psi_n \in W^l(-\infty, \infty)$, то по предположению для них имеет место неравенство (8), но это возможно только при $\beta=0$.

Применяя последовательно соотношения а), б) и в) из (46), получаем: $\alpha=1$, $q \geqslant p$, $\mu(k, p, q)=0$, $q=p$. Но эта система совместна только при $k=0$, $q=p$. (Этот случай мы исключили из рассмотрения.) Таким образом, $r \geqslant 1$. Поскольку при l, $r \geqslant 1$ $l-\frac{1}{r}+\frac{1}{p}=0$ только для $l=r=1$, $p=\infty$, то в этом случае в силу б) $l-k-\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=0$, т. е. $k=0, q=p=$ $=\infty$. Но этот случай мы по условию не рассматриваем, впрочем, он тривиален. Во всех остальных случаях $l-\frac{1}{r}+\frac{1}{p}\neq 0$ и из (46) выводятся условия б) и с) теоремы 1. Теорема доказана.

Поступило
15.VII.1974

Литература

[1] **Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.**, Неравенства, М., ИЛ, 1948.

[2] **Бернштейн С. Н.**, Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение функций одной вещественной переменной, М., ОНТИ, 1937.

[3] **Ильин В. П.**, Некоторые неравенства в функциональных пространствах и их применение к исследованию сходимости вариационных процессов, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 53 (1959), 64—127.

[4] **Nagy B.**, Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung, Acta Univ. Szeged, Sect. Sci. Math., 10 (1941), 64—74.

[5] **Nagy B.**, Über Carlsonsche und verwandte Ungleichungen, Mat. Fiz. Lapok, 48 (1941), 162—175.

[6] **Гончаров В. Л.**, Теория интерполирования и приближения функций, М., Гостехиздат, 1954.

[7] **Hörmander L.**, A new proof and a generalization of an inequality of Bohr, Math. Scand., 2 (1954), 33—45.

[8] **Köthe G.**, Topologische lineare Räume. I, Berlin, Springer, 1960.

[9] **Натансон И. П.**, Теория функций вещественной переменной, М., ГИТТЛ, 1957.

[10] **Левин А. Ю.**, Оценки для функции с монотонно расположенными нулями последовательных производных, Матем. сб., 64, № 3 (1964), 396—409.

[11] **Баккенбах Э., Беллман Р.**, Неравенства, М., «Мир», 1965, гл. 5.

[12] **Зигмунд А.**, Тригонометрические ряды, М., «Мир», 1965.

[13] **Буренков В. И.**, Теоремы вложения и продолжения для классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных во всем пространстве, Итоги науки. Матем. анализ. 1965, М., ВИНИТИ, 1966.

[14] **Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.**, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., «Наука», 1967.

[15] **Никольский С. М.,** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., «Наука», 1969.
[16] **Габушин В. Н.,** Неравенства для норм функции и ее производных в метриках L_p, Матем. заметки, 1, № 3 (1967), 291—298.
[17] **Куратовский К.,** Топология, т. 2, М., «Мир», 1969.
[18] **Габушин В. Н.,** Оценка эстремумов функции и ее производных, Сб. «Поиск экстремума», Изд. Томского университета, 1969, стр. 243—244.
[19] **Габушин В. Н.,** О наилучшем приближении операторов, Тр. Центрального зонального объединения матем. кафедр, Вып. 1, Калинин, 1970.
[20] **Габушин В. Н.,** О наилучшем приближении оператора дифференцирования в метрике L_p, Матем. заметки, 12, № 5 (1972), 531—538.
[21] **Солонников В. А.,** О некоторых неравенствах для функций из классов $W_p^{\vec{m}}(R^n)$, Записки научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, 27 (1972), 194—210.
[22] **Севастьянов Е. А.,** Некоторые оценки производных рациональной функции в интегральных метриках, Матем. заметки, 13, № 4 (1973), 499—510.