Е. С. Голод, А. А. Туганбаев, Аннуляторы и конечно порождённые модули, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2016, том 21, выпуск 1, 79–82

Аннуляторы и конечно порождённые модули*

Е. С. ГОЛОД
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: 7012002@inbox.ru

А. А. ТУГАНБАЕВ
Национальный исследовательский
университет «МЭИ»,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.55

Ключевые слова: аннулятор модуля, строго регулярное кольцо, арифметическое кольцо, инвариантное кольцо.

Аннотация

Доказывается, что $B + \operatorname{Ann} M = \operatorname{Ann}(M/MB)$ для каждого конечно порождённого правого модуля M над строго регулярным кольцом A и каждого идеала B кольца A.

Abstract

E. S. Golod, A. A. Tuganbaev, Annihilators and finitely generated modules, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 1, pp. 79—82.

We prove that $B + \operatorname{Ann} M = \operatorname{Ann}(M/MB)$ for every finitely generated right module M over a strongly regular ring A and every ideal B of the ring A.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули предполагаются правыми и унитарными. Если X — правый модуль над кольцом A, то через $\operatorname{Ann} X$ обозначается его правый аннулятор $\{a \in A \mid Xa = 0\}$. Ясно, что $B + \operatorname{Ann} M \subseteq \operatorname{Ann}(M/MB)$ для любого правого модуля M над произвольным кольцом A и каждого идеала B кольца A.

В [1] доказано, что коммутативное кольцо A является арифметическим в точности тогда, когда $B + \operatorname{Ann} M = \operatorname{Ann}(M/MB)$ для каждого конечно порождённого A-модуля M и каждого идеала B кольца A. (Кольцо A называется *арифметическим*, если решётка его двусторонних идеалов дистрибутивна, т. е. $(B + C) \cap (B + D) = B + C \cap D$ для любых идеалов B, C, D кольца A.)

Основным результатом данной работы является теорема 1.

*Первый автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, проект 14-01-00416. Второй автор поддержан Российским научным фондом, проект 16-11-10013.

Теорема 1. *$B + \operatorname{Ann} M = \operatorname{Ann}(M/MB)$ для каждого конечно порождённого правого модуля M над строго регулярным кольцом A и каждого идеала B кольца A.*

Доказательство теоремы 1 разбито на несколько утверждений, некоторые из которых представляют самостоятельный интерес.

Кольцо A называется *строго регулярным*, если $a \in a^2A$ для любого элемента $a \in A$. Кольцо называется *инвариантным справа* (*инвариантным слева*), если все его правые (соответственно левые) идеалы являются идеалами. Правый модуль M над кольцом A называется *циклически представимым*, если $M \cong A_A/aA$ для некоторого элемента $a \in A$.

Лемма 1. *Пусть A — арифметическое кольцо и $B, C_1, \ldots, C_n$ — идеалы кольца A.*

1. *$B + C_1 \cap \ldots \cap C_n = (B + C_1) \cap \ldots \cap (B + C_n)$.*
2. *Если $A_1, \ldots, A_n$ — копии кольца A и M — правый A-модуль $A_1/C_1 \oplus \ldots \oplus A_n/C_n$, то $B + \operatorname{Ann} M = \operatorname{Ann}\bigl(M/(MB)\bigr)$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Так как A — арифметическое кольцо, то утверждение проверяется непосредственно, с помощью индукции по n.

Докажем утверждение 2. В нашем случае $B + \operatorname{Ann} M = B + C_1 \cap \ldots \cap C_n$ и $\operatorname{Ann}\bigl(M/(MB)\bigr) = (B+C_1)\cap\ldots\cap(B+C_n)$. Теперь применяем утверждение 1. □

Лемма 2. *Пусть A — кольцо и $(B+AcA)\cap(B+AdA) = B+(AcA)\cap(AdA)$ для каждого идеала B и любых элементов c, d кольца A. Тогда A — арифметическое кольцо.*

Доказательство. Пусть B, C, D — идеалы кольца A и $b_1 + c = b_2 + d \in (B + C) \cap (B + D)$, где $b_1, b_2 \in B$, $c \in C$ и $d \in D$. По условию $b_1 + c \in B + (AcA) \cap (AdA) \subseteq B + C \cap D$. Поэтому $(B + C) \cap (B + D) \subseteq B + C \cap D$. Следовательно, A — арифметическое кольцо. □

Лемма 3. *Пусть A — инвариантное справа кольцо. Тогда равносильны следующие условия:*

1) *A — арифметическое кольцо;*
2) *$B + \operatorname{Ann} M = \operatorname{Ann}\bigl(M/(MB)\bigr)$ для любого правого A-модуля M, являющегося прямой суммой конечного числа циклических модулей;*
3) *$B + \operatorname{Ann} M = \operatorname{Ann}\bigl(M/(MB)\bigr)$ для любого правого A-модуля M, являющегося прямой суммой двух циклически представимых модулей.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Так как A — инвариантное справа кольцо, то каждый циклический правый A-модуль изоморфен модулю A_A/C для некоторого двустороннего идеала C кольца A. Поэтому утверждение вытекает из утверждения 2 леммы 1.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) проверяется непосредственно.

Докажем импликацию $3) \Longrightarrow 1)$. По лемме 2 достаточно доказать, что $(B + AcA) \cap (B + AdA) = B + (AcA) \cap (AdA)$ для каждого идеала B и любых элементов c, d кольца A. Обозначим через M модуль $A_A/cA \oplus A_A/dA$, являющийся прямой суммой двух циклически представимых модулей. Так как A — инвариантное справа кольцо, то $AcA = cA$ и $AdA = A$. Непосредственно проверяется, что $B + \operatorname{Ann} M = B + (AcA) \cap (AdA)$ и $(B + AcA) \cap (B + AdA) = \operatorname{Ann}\bigl(M/(MB)\bigr)$. Кроме того, $B + \operatorname{Ann} M = \operatorname{Ann}\bigl(M/(MB)\bigr)$ по условию. Поэтому $(B + AcA) \cap (B + AdA) = B + (AcA) \cap (AdA)$. $\square$

Если A — кольцо, то любая прямая сумма изоморфных копий модуля A_A называется *свободным* (правым) A-модулем. Модуль X называется *конечно представимым*, если $X \cong F/N$, где F — конечно порождённый свободный модуль и N — конечно порождённый подмодуль в F.

Лемма 4. *Пусть A — кольцо. Если $B + \operatorname{Ann} X = \operatorname{Ann}(X/XB)$ для каждого конечно представимого правого A-модуля X и каждого идеала B кольца A, то $B + \operatorname{Ann} M = \operatorname{Ann}\bigl(M/(MB)\bigr)$ для каждого конечно порождённого правого A-модуля M и каждого идеала B кольца A.*

Доказательство. Пусть M — конечно порождённый правый A-модуль. Тогда $M \cong F/N$, где F — конечно порождённый свободный A-модуль и N — некоторый подмодуль в F. Пусть $\{N_i\}$ — множество всех конечно порождённых подмодулей в N. Тогда $N = \bigcup\limits_i N_i$ и $M/MB \cong F/(N+FB) = F/\bigcup\limits_i(N_i+FB)$. Для каждого $i \in I$ обозначим через X_i конечно представимый модуль F/N_i. По условию $B + \operatorname{Ann} X_i = \operatorname{Ann}\bigl(X_i/(X_iB)\bigr)$ для каждого конечно представимого модуля X_i. Кроме того, непосредственно проверяется, что $\operatorname{Ann}(F/N) = \bigcup\limits_i \operatorname{Ann}(F/N_i)$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ann}(M/MB) &= \operatorname{Ann}\bigl(F/(N+FB)\bigr) = \\
&= \bigcup_i \operatorname{Ann}\bigl(F/(N_i+FB)\bigr) = \bigcup_i \bigl(B + \operatorname{Ann}(F/N_i)\bigr) = \\
&= B + \bigcup_i \operatorname{Ann}(F/N_i) = B + \operatorname{Ann}(F/N) = B + \operatorname{Ann} M. \qquad \square
\end{aligned}$$

Нам потребуется несколько хорошо известных утверждений, собранных вместе в следующих леммах 5—8. Кольцо A называется *регулярным по фон Нейману*, если $a \in aAa$ для любого элемента $a \in A$.

Лемма 5 [2, теоремы 3.2, 3.4, 3.5]. *Каждое строго регулярное кольцо является регулярным по фон Нейману инвариантным справа и слева арифметическим кольцом.*

Лемма 6 [2, утверждение 2.6]. *Каждый конечно порождённый проективный правый или левый модуль над регулярным по фон Нейману кольцом является прямой суммой конечного числа циклических модулей.*

Лемма 7 [3, 37.6]. *Каждый конечно представимый правый или левый модуль над регулярным по фон Нейману кольцом является проективным модулем.*

Лемма 8. *Каждый конечно представимый правый или левый модуль над регулярным по фон Нейману кольцом является прямой суммой конечного числа циклических модулей.*

Лемма 8 вытекает из лемм 6 и 7.

Окончание доказательства теоремы 1. Пусть A — строго регулярное кольцо. Надо доказать, что $B + \operatorname{Ann} M = \operatorname{Ann}(M/MB)$ для каждого конечно порождённого правого A-модуля M и каждого идеала B кольца A. По лемме 4 достаточно доказать, что $B + \operatorname{Ann} X = \operatorname{Ann}(X/XB)$ для каждого конечно представимого правого A-модуля X и каждого идеала B кольца A. По лемме 5 A является регулярным по фон Нейману инвариантным справа и слева арифметическим кольцом. По лемме 8 конечно представимый модуль X является прямой суммой конечного числа циклических модулей. По лемме 3 $B + \operatorname{Ann} X = \operatorname{Ann}\big(X/(XB)\big)$. □

Литература

[1] Голод Е. С. Замечание о коммутативных арифметических кольцах // Фундамент. и прикл. матем. — 2014. — Т. 19, вып. 2. — С. 21—23.

[2] Goodearl K. R. Von Neumann Regular Rings. — London: Pitman, 1979.

[3] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. — Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.