А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость, *Функц. анализ и его прил.*, 2010, том 44, выпуск 4, 34–53

DOI: 10.4213/faa3022

Функциональный анализ и его приложения
2010, т. 44, вып. 4, с. 34–53

УДК 517.984.54

Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость*

© 2010. А. М. Савчук, А. А. Шкаликов

Посвящается памяти М. Ш. Бирмана

В работе изучаются две обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля $Ly = -y''+q(x)y$ на отрезке $[0,\pi]$. С первой из них при $\theta \geqslant 0$ связано отображение $F\colon W_2^\theta \to l_B^\theta$, $F(\sigma) = \{s_k\}_1^\infty$, где $W_2^\theta = W_2^\theta[0,\pi]$ — пространство Соболева, $\sigma = \int q$ — первообразная потенциала q, а l_B^θ — специально построенное конечномерное расширение весового пространства l_2^θ, куда помещаются регуляризованные спектральные данные $\mathbf{s} = \{s_k\}_1^\infty$ для задачи восстановления по двум спектрам. Основной результат состоит в доказательстве равномерных оценок и снизу и сверху нормы разности $\|\sigma-\sigma_1\|_\theta$ через норму разности регуляризованных спектральных данных $\|\mathbf{s}-\mathbf{s}_1\|_\theta$, где норма берется в l_B^θ. Аналогичный результат получен для второй обратной задачи, которая связана с восстановлением потенциала по спектральной функции оператора L, порожденного краевыми условиями Дирихле. Результат является новым и для классического случая $q \in L_2$, который отвечает значению $\theta = 1$.

В этой работе мы изучим две классические обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля

$$Ly = -y'' + q(x)y, \qquad x \in [0,\pi], \tag{0.1}$$

на конечном интервале. Первая задача связана с восстановлением потенциала по двум спектрам этого оператора, порожденного краевыми условиями Дирихле и Дирихле–Неймана соответственно (мы называем ее задачей Борга). Вторая задача связана с восстановлением потенциала по спектральной функции этого оператора, порожденного краевыми условиями Дирихле (далее такой оператор называем оператором Дирихле). Давно известно решение этих задач для вещественных потенциалов $q \in L_2$, в частности получена полная характеризация спектральных данных для потенциалов q из этого класса. Наша цель — решить эти задачи для потенциалов q из шкалы соболевских пространств W_2^α при всех фиксированных $\alpha \geqslant -1$ (включая случай $\alpha \in [-1,0)$, когда потенциал является сингулярной функцией-распределением). Важную роль при этом играют специальные гильбертовы пространства, которые мы конструируем для решения указанных задач. Эти пространства нужны для задания и изучения отображений, которые мы связываем с рассматриваемыми задачами, а также для полного описания (характеризации) спектральных данных, когда первообразная потенциала $\sigma = \int q(t)\,dt$ пробегает множество вещественных функций пространства $W_2^{\alpha+1}$.

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант №10-01-00423.

После решения обратных задач возникает важная задача об априорных оценках: насколько мало изменяется первообразная потенциала q в норме пространства $W_2^{\alpha+1}$ при малом изменении спектральных данных в норме соответствующего гильбертова пространства, куда эти данные помещены. Априорные оценки ранее были известны в классическом случае (при $\alpha = 0$). Но это были оценки локального типа, в которых постоянные вместе с радиусом окрестности, где оценки действуют, зависели от потенциала q. *Основная цель этой работы — получить равномерные двусторонние априорные оценки не только для классического случая* $\alpha = 0$, *но и при всех* $\alpha > -1$. Случай $\alpha = -1$ особый. Развиваемый нами метод при $\alpha = -1$ не работает. Одновременно мы выясним, для каких спектральных данных константы в априорных оценках могут «портиться» (т. е. становиться большими или малыми). Мы покажем, что константы в априорных оценках «ухудшаются» только по двум причинам: 1) из-за увеличения нормы регуляризованных спектральных данных, т. е. больших уклонений спектральных данных от нулевых значений (которые соответствуют нулевому потенциалу q); 2) из-за уменьшения зазора (расстояния) между парами соседних собственных значений или приближения к нулю одного из нормировочных чисел (уменьшения числа h, которое фигурирует в определении множеств регуляризованных спектральных данных $\Omega_B^\theta(h,r)$ и $\Omega_D^\theta(h,r)$, определяемых в §§ 2 и 3 работы). Отметим еще раз, что *эти оценки являются новыми и для классического случая потенциалов* $q \in L_2$, но метод доказательства оценок существенно использует предварительные результаты, полученные при изучении обратных задач для потенциалов q во всей шкале соболевских пространств W_2^α.

История изучения обратных задач для оператора Штурма–Лиувилля ведет начало от работы Амбарцумяна [3]. Но результат этой работы оказался не характерным для теории. Пионерскую роль сыграла фундаментальная работа Борга [4], основной результат которой — теорема единственности для восстановления потенциала по двум спектрам. Другую интерпретацию результатов Борга предложил Левинсон [27]. Тихонов [49] показал, что потенциал восстанавливается единственным образом по функции Вейля–Титчмарша. Марченко ([32], [33]) первым применил в исследовании обратных задач оператор преобразования и доказал единственность решения обратной задачи по спектральной функции для операторов Штурма–Лиувилля как на конечном интервале, так и на всей оси. Гельфанд и Левитан [13] нашли необходимые и достаточные условия для восстановления потенциала по спектральной функции и написали явные уравнения для решения задачи о восстановлении. Левитан [28], а также Гасымов и Левитан [12] получили аналогичные результаты для задачи Борга о восстановлении потенциала по двум спектрам. Полное решение задачи Борга для потенциалов из L_2 получил Марченко [34]. Другие формулы для решения обратных задач предложил Крейн [25], [26]. В серии работ Трубовица с соавторами был предложен метод для решения некоторых обратных задач на конечном интервале, использующий язык теории аналитических отображений. Детальное изложение имеется в книге Пошеля и Трубовица [40]. Из последних работ, развивающих этот метод, отметим работу Коротяева и Челкака [24]. Для решения нелинейных уравнений важную роль сыграла обратная задача по данным рассеяния, изучение которой было проведено Фаддеевым [9], [10], Дейфтом и Трубовицем [6], Марченко [34] (см. [34] для более полной информации). Большое число работ посвящено изучению прямых и обратных задач для операторов

Штурма–Лиувилля в импедансной форме. Отметим, что имеется связь между такими операторами и обычными операторами Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами. Работа Альбеверио, Гринива и Микитюка [1] — одна из последних на эту тему; в ней имеются многочисленные ссылки.

В работе [43] авторы предложили метод регуляризации для определения оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями $q \in W_2^{-1}$. Гринив и Микитюк ([18], [21]) доказали существование оператора преобразования для уравнений с такими потенциалами и дали решения классических обратных задач для потенциалов $q \in W_2^{-1}$ (см., в частности, [19], [20], [22]). Марченко и Островский ([36], [34]) дали описание спектральных данных задачи Борга для потенциалов q из пространств Соболева W_2^{α} при целых показателях гладкости $\alpha = 0, 1, 2, \dots$. Аналогичные результаты для обратных задач по спектральным функциям получили Фрайлинг и Юрко [11]. Авторы [45] ввели шкалу пространств $l_B^{\alpha+1}$ для изучения спектральных данных задачи Борга и в терминах этих пространств провели исследование этой задачи при всех показателях гладкости $\alpha \geqslant -1$. В других терминах и другим методом задачу Борга, а также обратную задачу по спектральной функции исследовали для показателей гладкости $\alpha \in [-1, 0]$ Гринив и Микитюк [23].

Различные априорные оценки локального характера для обратных задач получали многие авторы. Не вникая в детали, отметим, что в этом направлении результаты получили Марченко и Маслов [35], Рябушко ([41], [42]), Хохштадт [17], Хальд [15], Юрко [50] (см. также [11]), Мизутани [39], Алексеев [2], Мак-Лафлин [30], Хитрик [16], Марлетта и Вайкард [38], Маламуд [31].

Говоря об обратных задачах на конечном интервале, необходимо упомянуть задачу о восстановлении потенциала по двум спектрам периодической и антипериодической задач. Естественно, она связана с изучением оператора Хилла на всей прямой. С этой задачей связано много интересных работ, и изучена она наиболее полно. Выделим важные результаты Марченко и Островского [36] и [37]. Обратная задача для периодического случая является единственной, для которой получены равномерные априорные оценки разности потенциалов через разность спектральных данных (см. [37]). Из последних публикаций о периодической задаче отметим работу Джакова и Митягина [7], где наряду с новыми важными результатами имеется подробная информация и библиография для случая классических потенциалов, а также их работу [8], где рассматриваются сингулярные потенциалы. Для более подробных сведений по рассматриваемым здесь и другим обратным задачам мы отсылаем читателя к монографиям Марченко [34], Левитана [29], Фрайлинга и Юрко [11], а также к обзорной работе Гештези [14].

Настоящая работа является продолжением серии работ авторов [45]–[47], посвященных решению обратных задач с потенциалами из пространств Соболева. В этих работах уже были сконструированы пространства, в которые следует помещать регуляризованные спектральные данные рассматриваемых двух обратных задач, и изучены свойства отображений, ставящих в соответствие первообразной потенциала $\sigma = \int q(t)\,dt$ регуляризованные спектральные данные. Ключевой является формулируемая ниже в нужной форме теорема 1.3 о слабой нелинейности построенных отображений (эта теорема для разных задач доказана в работах [46], [47]). Как уже говорилось, решение задачи Борга для потенциалов $q \in W_2^\alpha$ во всей шкале $\alpha \geqslant -1$ было дано авторами [45]. Инъективность доказывалась модификацией метода Борга, а для описания образа и процедуры восстановления развивались идеи работ Трубовица и соавторов. В этой работе мы дополним исследования из [45] по задаче Борга, в частности докажем локальную устойчивость для всех индексов гладкости $\alpha \geqslant -1$. Мы покажем также, что решение в пространствах Соболева обратной задачи по спектральной функции оператора Дирихле для всех индексов $\alpha \geqslant -1$ может быть проведено по такой же схеме, как решение задачи Борга. Однако при реализации этой схемы доказательства некоторых похожих утверждений требуют новых подходов. *Но главная цель — равномерные априорные оценки, которые мы получаем при* $\alpha > -1$. Для их доказательства развивается новый метод, основанный на теоремах о слабой нелинейности построенных отображений.

Первый параграф работы носит вспомогательный характер. Мы напоминаем основные определения и конструкции пространств и формулируем в нужном виде необходимые для дальнейшего результаты работ [45]–[47]. Основным является §2. Здесь приводятся дополнения к результатам из [45] по задаче Борга, доказываются локальные и равномерные априорные оценки для этой задачи. В §3 все результаты для задачи Борга переносятся на обратную задачу по спектральной функции оператора Дирихле.

§1. Определения пространств и нелинейных отображений, связанных с обратными задачами. Теоремы о свойствах таких отображений

Сначала напомним, что определение оператора Штурма–Лиувилля с классическим потенциалом $q \in L_1[0,\pi]$ можно распространить на случай потенциалов-распределений из соболевского пространства $W_2^{-1}[0,\pi]$. Предположим, что комплекснозначный потенциал q принадлежит соболевскому пространству $W_2^\alpha[0,\pi]$ при некотором $\alpha \geqslant -1$. Положим $\sigma(x) = \int q(x)\,dx$, где первообразная понимается в смысле теории распределений. Согласно [43] (см. также [44], где даны альтернативные определения), определим оператор Дирихле равенством

$$L_D y = Ly = -(y^{[1]})' - \sigma(x)y^{[1]} - \sigma^2(x)y, \qquad y^{[1]}(x) := y'(x) - \sigma(x)y(x), \quad (1.1)$$

взяв в качестве области определения

$$\mathscr{D}(L_D) = \{y,\, y^{[1]} \in W_1^1[0,\pi] \mid Ly \in L_2[0,\pi],\, y(0) = y(\pi) = 0\}.$$

Оператор Дирихле–Неймана определим аналогично: $L_{DN}y = Ly$ на области

$$\mathscr{D}(L_{DN}) = \{y,\, y^{[1]} \in W_1^1[0,\pi] \mid Ly \in L_2[0,\pi],\, y(0) = y^{[1]}(\pi) = 0\}.$$

Для гладких функций σ правые части в (0.1) и (1.1) совпадают, и мы получаем в первом случае классический оператор Штурма–Лиувилля с краевыми условиями Дирихле, а во втором случае оператор с краевым условие $y(0) = 0$ и смешанным краевым условием $y'(\pi) - hy(\pi) = 0$, где $h = \sigma(\pi)$. В первом случае оператор не зависит от выбора константы в определении первообразной σ потенциала q, а во втором случае зависит. Если константу выбрать так, чтобы $\sigma(\pi) = 0$, то мы получим классический оператор Дирихле–Неймана.

Теперь определим спектральные данные для рассматриваемых в работе задач. Обозначим через $s(x,\lambda)$ единственное решение уравнения $Ly - \lambda y = 0$, удовлетворяющее условиям $s(0,\lambda)=0$ и $s^{[1]}(0,\lambda)=\sqrt{\lambda}$ (известно [43], что такое решение существует и единственно). Очевидно, что нули $\{\lambda_k\}_1^\infty$ и $\{\mu_k\}_1^\infty$ целых функций $s(\pi,\lambda)/\sqrt{\lambda}$ и $s^{[1]}(\pi,\lambda)/\sqrt{\lambda}$ являются собственными значениями операторов L_D и L_{DN} соответственно. В случае вещественного потенциала q все нули этих функций являются простыми и вещественными, и мы считаем их занумерованными так, чтобы обе последовательности были строго возрастающими. Для комплексных q нумерацию можно провести так, чтобы последовательности $\{|\lambda_k|\}_1^\infty$ и $\{|\mu_k|\}_1^\infty$ не убывали.

В задаче Борга потенциал восстанавливается по двум спектрам $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$ операторов L_D и L_{DN}. Задание этих двух спектров эквивалентно заданию чисел

$$s_{2k-1}=\sqrt{\mu_k}-(k-1/2),\quad s_{2k}=\sqrt{\lambda_k}-k,\qquad k=1,2,\dots,$$

т. е. последовательности $\{s_k\}_1^\infty=\{s_k(B)\}_1^\infty$. Будем говорить, что такая последовательность определяет *регуляризованные спектральные данные* задачи Борга. Здесь и далее мы подразумеваем, что в приведенных формулах ветвь квадратного корня выбрана так, что значения аргумента $\sqrt{\lambda}$ лежат в сегменте $(-\pi/2,\pi/2]$.

Известно [28, гл. 3], что спектральная функция оператора Дирихле однозначно восстанавливается по его собственным значениям и так называемым *нормировочным константам*, которые определяются равенствами

$$\alpha_k=\int_0^\pi s^2(x,\lambda_k)\,dx.$$

Такое определение нормировочных чисел мы сохраним и для комплексных потенциалов. Последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty\cup\{\alpha_k\}_1^\infty$ формируют спектральные данные оператора L_D. Задание этих данных эквивалентно заданию чисел

$$s_{2k}=\sqrt{\lambda_k}-k,\quad s_{2k-1}=\alpha_k-\pi/2,\qquad k=1,2,\dots. \tag{1.2}$$

Будем говорить,что последовательность $\{s_k\}_1^\infty=\{s_k(D)\}_1^\infty$ определяет *регуляризованные спектральные данные оператора* L_D.

Имеем две задачи: восстановить первообразную потенциала q по регуляризованным спектральным данным либо оператора L_D, либо задачи Борга. Ясно, что в сингулярном случае восстановление функции q невозможно и работать надо с ее первообразной $\sigma=\int q(x)\,dx$. При $q\in W_2^\alpha$, $\alpha\geqslant-1$, имеем $\sigma\in W_2^\theta$, где $\theta=\alpha+1\geqslant0$. Случай классического потенциала $q\in L_2$ соответствует показателю $\theta=1$. Нужно еще отметить, что переход к восстановлению первообразной меняет постановку задачи. Например, при восстановлении дифференцируемой функции σ по спектральным данным задачи Борга восстанавливается не только потенциал $q=\sigma'$, но и постоянная $h=\sigma(\pi)$ в смешанном краевом условии. Но по спектральным данным оператора L_D функция σ восстанавливается только с точностью до постоянной.

Чтобы далее использовать язык теории отображений, нужно понять, каким пространствам принадлежат определенные выше регуляризованные спектральные данные, когда первообразная σ пробегает соболевское пространство W_2^θ, $\theta\geqslant0$. Оказывается, что для обеих задач эти пространства можно выбрать как конечномерные расширения обычных весовых l_2-пространств. Как расширять, становится ясным после анализа асимптотических формул для собственных значений λ_n, μ_n и нормировочных констант α_n. Подробно это объяснено в

[46], [47]. Понять это можно также из формулируемой ниже теоремы 1.2 после интегрирования по частям формул, которыми определены операторы T_B и T_D.

Построим пространство для регуляризованных спектральных данных задачи Борга. Обозначим через l_2^θ весовое l_2-пространство, состоящее из последовательностей $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots\}$ комплексных чисел, таких, что

$$\|\mathbf{x}\|_\theta^2 := \sum_1^\infty |x_k|^2 k^{2\theta} < \infty.$$

Рассмотрим специальные последовательности

$$\mathbf{e}_{2s-1} = \{k^{-(2s-1)}\}_{k=1}^\infty, \quad \mathbf{e}_{2s} = \{(-1)^k\, k^{-(2s-1)}\}_{k=1}^\infty, \qquad s = 1, 2, \dots.$$

Пусть $m = [\theta/2 + 3/4]$, где $[a]$ — целая часть числа a. Положим

$$l_B^\theta = l_2^\theta \oplus \mathrm{span}\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{2m}.$$

Здесь мы учли, что при $k \leqslant 2m$ последовательности $\mathbf{e}_k$ не принадлежат пространству l_2^θ, а при $k > 2m$ принадлежат. Таким образом, l_B^θ состоит из элементов $\mathbf{x} + \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{e}_k$, где $\mathbf{x} \in l_2^\theta$, а $\{c_k\}_1^m$ — произвольные комплексные числа. Скалярное произведение элементов из l_B^θ определяется формулой

$$\left(\mathbf{x} + \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{e}_k, \mathbf{y} + \sum_{k=1}^m d_k \mathbf{e}_k\right) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})_\theta + \sum_{k=1}^m c_k \overline{d_k}.$$

Построенное пространство свяжем с регуляризованными спектральными данными для оператора L_B. Хотя это пространство определено как конечномерное расширение весового пространства l_2^θ, его элементы удобнее записывать в форме обычных последовательностей. Например, при $3/2 \leqslant \theta < 5/2$ пространство l_B^θ состоит из последовательностей $\mathbf{x} = \{x_k\}_1^\infty$ с координатами

$$x_k = y_k + \alpha_1 k^{-1} + \alpha_2 (-1)^k k^{-1}, \quad \text{где } \{y_k\}_1^\infty \in l_2^\theta,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}.$$

Из такого представления легко следует, что пространство l_D^η компактно вложено в пространство l_D^θ при $\eta > \theta$ (здесь мы принимаем во внимание компактность вложения $l_2^\eta \hookrightarrow l_2^\theta$ при $\eta > \theta$).

Для построения пространства l_D^θ регуляризованных спектральных данных для оператора Дирихле нужно вместо последовательностей $\mathbf{e}_k$ использовать последовательности $\widehat{\mathbf{e}}_{2s-1} = \{0, 2^{-(2s-1)}, 0, 4^{-(2s-1)}, 0, 6^{-(2s-1)}, \dots\}$, $\widehat{\mathbf{e}}_{2s} = \{2^{-(2s)}, 0, 4^{-(2s)}, 0, 6^{-(2s)}, \dots\}$. Пространство l_D^θ определим равенством $l_D^\theta = l_2^\theta \oplus \mathrm{span}\{\widehat{\mathbf{e}}_k\}_{k=1}^m$, где число m однозначно определено условием $m - 1/2 \leqslant \theta < m + 1/2$. Отметим, что в работе [47] конструкция пространства для регуляризованных спектральных данных оператора L_D^θ проводилась в пространстве двусторонних последовательностей. Здесь мы реализовали эквивалентную конструкцию в пространстве односторонних последовательностей, чтобы оба пространства выглядели единообразно.

Определим следующие нелинейные операторы:

$$F_B(\sigma) = \{s_k(B)\}_1^\infty, \qquad F_D(\sigma) = \{s_k(D)\}_1^\infty. \tag{1.3}$$

Из результатов работ [44] и [18] следует, что последовательности, образованные регуляризованными спектральными данными в правых частях равенств (1.3), являются последовательностями из l_2 для любой первообразной $\sigma = \int q(x)\, dx \in$

$L_2(0,\pi)$. Поэтому все выписанные в (1.3) операторы корректно определены как операторы из L_2 в l_2. Более того, согласно результатам из [45] и [47], образы сужений этих операторов на соболевские пространства W_2^θ, $\theta > 0$, лежат в пространствах l_B^θ и l_D^θ соответственно. Именно для этой цели мы проводили расширения пространств l_2^θ. Без присоединения к l_2^θ специальных последовательностей соответствующий результат неверен.

Далее будут использоваться результаты работ [45]–[47], которые приведем в нужном нам виде.

Теорема 1.1. *При любом фиксированном $\theta \geqslant 0$ нелинейные операторы F_B и F_D корректно определены как операторы из пространства W_2^θ в l_B^θ и l_D^θ соответственно. Эти операторы дифференцируемы по Фреше в каждой точке (функции) σ при условии, что эта функция вещественнозначна и все собственные значения $\lambda_k(\sigma)$, $\mu_k(\sigma)$ не обращаются в нуль (для отображения F_D достаточно, чтобы не обращались в нуль только $\lambda_k(\sigma)$). В частности, эти операторы дифференцируемы по Фреше в точке $\sigma = 0$, причем производные по Фреше в этой точке суть линейные операторы T_B и T_D, которые определяются формулами*

$$(T_B\sigma)_k = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sigma(t)\sin(kt)\,dt, \qquad k = 1,2,\dots,$$

$$\begin{cases} (T_D\sigma)_{2k-1} = -\displaystyle\int_0^\pi (\pi - t)\sigma(t)\cos(2kt)\,dt, & k = 1,2,\dots, \\ (T_D\sigma)_{2k} = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sigma(t)\sin(2kt)\,dt, & k = 1,2,\dots. \end{cases}$$

Доказательство этого утверждения для оператора F_B получается из предложения 1 и теоремы 6.1 работы [46], а для второго оператора — из предложения 1 и теоремы 4.2 работы [47]. □

Теорема 1.2. *Пространства l_B^θ и l_D^θ образуют шкалу компактно вложенных друг в друга пространств, замкнутых относительно интерполяции, т. е. $[l^0, l^\theta]_\tau = l^{\theta\tau}$ при всех $\theta \geqslant 0$, $\tau \in [0,1]$ (здесь для краткости опущены нижние индексы B или D). При любом $\theta \geqslant 0$ оператор T_B изоморфно отображает пространство W_2^θ на l_B^θ. Оператор T_D изоморфно отображает пространство $W_2^\theta \ominus \{1\}$ на l_D^θ.*

Доказательство. Первое утверждение этой теоремы для пространства l_B^θ доказано в предложении 4 работы [46]. Доказательство для пространства l_D^θ проходит без изменений. Второе утверждение для оператора T_B доказано в лемме 1 работы [46], а для оператора T_D — в предложении 3 работы [47]. □

Следующая теорема является наиболее существенным звеном в доказательстве основных результатов этой работы. В частности, она говорит, что рассматриваемые отображения F_B и F_D являются слабо нелинейными, т. е. компактными возмущениями линейных отображений. Важна также точная зависимость от θ показателя $\tau = \tau(\theta)$, который характеризует «качество» компактности.

Теорема 1.3. *При любом фиксированном $\theta \geqslant 0$ оператор F_B отображает пространство W_2^θ в l_B^θ и допускает представление вида*

$$F_B(\sigma) = T_B\sigma + \Phi_B(\sigma).$$

Здесь T_B — *линейный оператор, определенный в теореме* 1.1, *а* Φ_B *отображает пространство* W_2^θ *в* l_B^τ, *где*

$$\tau = \begin{cases} 2\theta, & \text{если } 0 \leqslant \theta \leqslant 1, \\ \theta + 1, & \text{если } 1 \leqslant \theta < \infty. \end{cases}$$

Кроме того, отображение $\Phi_B \colon W_2^\theta \to l_B^\tau$ *является ограниченным в любом шаре, т.е.* $\|\Phi(\sigma)_B\|_\tau \leq C(R)$, *если* $\|\sigma\|_\theta \leqslant R$, *где постоянная* C *зависит только от радиуса шара* R. *Аналогичное утверждение справедливо для оператора* F_D. *А именно,* $F_D(\sigma) = T_D\sigma + \Phi_D(\sigma)$ *и отображение* $\Phi_D \colon W_2^\theta \ominus \{1\} \to l_D^\tau$ *обладает тем же свойством, что и* Φ_B.

Доказательство этой теоремы для оператора F_B проведено в работе [46], а для второго оператора — в работе [47]. В случае $\theta > 0$ компактность нелинейных слагаемых в представлениях операторов F_B и F_D вытекает из компактности вложений $l^\eta \hookrightarrow l^\theta$ при условии $\eta > \theta$ (здесь мы опускаем для краткости индекс B или D). Случай $\theta = 0$ особый. При $\theta = 0$ из сформулированной теоремы не вытекает компактность нелинейных слагаемых. □

§2. Задача Борга. Характеризация спектральных данных для первообразных σ вещественных потенциалов $q \in W_2^\alpha$. Равномерные априорные оценки

В этом параграфе и в §3 мы используем следующие обозначения. Через $W_{2,\mathbb{R}}^\theta$ обозначаем множество вещественных функций в пространстве W_2^θ, через $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}^\theta(R)$ — замкнутый шар радиуса R в $W_{2,\mathbb{R}}^\theta$, через Γ_B^θ — множество всех функций в $W_{2,\mathbb{R}}^\theta$, для которых $\mu_1(\sigma) \geqslant 1/4$, и через $\mathscr{B}_\Gamma^\theta(R)$ — пересечение множества Γ_B^θ и шара $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}^\theta(R)$. Здесь $\mu_1(\sigma)$ — первое собственное значение оператора L_{DN}. Число $1/4$ взято для определенности и простоты, вместо $1/4$ может фигурировать любое число $\eta > 0$, но тогда в (2.2) и (2.3) нужно писать $s_1 \geqslant \sqrt{\eta} - 1/2$.

Известно, что для вещественных потенциалов спектры $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$ операторов L_D и L_{DN} удовлетворяют условию перемежаемости

$$\mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \lambda_2 < \dots < \mu_n < \lambda_n < \mu_{n+1} < \dots . \tag{2.1}$$

Для классических потенциалов этот факт известен давно (см., например, [33]), а для сингулярных потенциалов-распределений он доказан в [20] и в [45]. Заметим, что для положительных λ_k и μ_k неравенства (2.1) эквивалентны неравенствам для корней из этих чисел. Поэтому условия (2.1) вместе с условием $\mu_1 \geqslant 1/4$ (т.е. условием $\sigma \in \Gamma_B^0$) эквивалентны неравенствам

$$s_1 \geqslant 0, \qquad s_k - s_{k+1} < 1/2, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{2.2}$$

где $\{s_k\} = \{s_k(B)\}$ — регуляризованные спектральные данные для задачи Борга. Последовательность $\{s_k\}_1^\infty$ принадлежит l_2, поэтому для любой фиксированной вещественной функции $\sigma \in L_2$ найдется число $h = h(\sigma) > 0$, такое, что

$$s_1 \geqslant 0, \qquad s_k - s_{k+1} \leqslant 1/2 - h, \qquad k = 1, 2, \dots . \tag{2.3}$$

Фиксируем произвольные числа $r > 0$ и $h \in (0, 1/2)$. Обозначим через $\Omega_B^\theta(r, h)$ совокупность вещественных последовательностей $\{s_k\}_1^\infty$, для которых выполняются неравенства (2.3) и которые лежат в замкнутом шаре радиуса r

пространства l_B^θ, т. е. $\|\{s_k\}\|_\theta \leqslant r$. Через Ω_B^θ обозначим множество всех вещественных последовательностей $\{s_k\}_1^\infty \in l_B^\theta$, для которых справедливы неравенства (2.2).

Напомним, что с задачей Борга мы связали оператор $F_B\colon W_2^\theta \to l_B^\theta$, $F_B(\sigma) = \{s_k\}_1^\infty$, где $\{s_k\}_1^\infty$ — регуляризованные спектральные данные задачи Борга. Из сказанного выше и теоремы 1.3 следует, что F_B отображает Γ_B^θ в Ω_B^θ.

Далее в этом параграфе там, где это удобно, *мы будем опускать индекс* B, так как будем работать только с задачей Борга. В частности, операторы F_B, T_B и Φ_B из теоремы 1.3 обозначаем через F, T и Φ соответственно. Всюду вместо Γ_B^θ, Ω_B^θ и $\Omega_B^\theta(r,h)$ пишем Γ^θ, Ω^θ и $\Omega^\theta(r,h)$. Однако обозначение l_B^θ для пространств регуляризованных спектральных данных сохраняем прежним.

Теорема 2.1. *При любом фиксированном* $\theta \geqslant 0$ *отображение* $F\colon \Gamma^\theta \to \Omega^\theta$ *есть биекция.*

Доказательство. Инъективность отображения $F\colon \Gamma^\theta \to \Omega^\theta$ доказана в лемме 6 работы [45]. В лемме 5 этой же работы проведено доказательство и сюръективности этого отображения, но оно нуждается в дополнении в случае $\theta \geqslant 1/2$. При $\theta < 1/2$ пространство l_B^θ совпадает с l_2^θ, а при $\theta \geqslant 1/2$ содержит еще состоящее из специальных последовательностей подпространство $\mathscr{L}^{2m}$ размерности $2m$, где $m = [\theta/2 + 3/4]$. Познакомившись с доказательством леммы 5 из [45], приходим к выводу, что для полного его завершения нужно уметь восстанавливать функцию σ (или доказывать ее существование), если варьируются только координаты подпространства $\mathscr{L}^{2m}$, а все координаты в l_2^θ остаются неизменными. Авторы не видят простого прямого решения этой задачи, без использования трудоемких теорем. Здесь мы приведем доказательство сюръективности с использованием теоремы 1.3, основываясь на том, что при $\theta \in [0, 1/2)$ это свойство уже доказано.

Нам известно, что отображение $F\colon \Gamma^\theta \to \Omega^\theta$ сюръективно при $\theta \leqslant 1/4$. Покажем, что оно сюръективно при любом $\theta \in (1/4, 1/2]$. Возьмем произвольный элемент $\mathbf{y} \in \Omega^\theta \subset l_B^\theta$, $\theta \in (1/4, 1/2]$. Поскольку при $\theta = 1/4$ рассматриваемое отображение есть биекция, найдется единственная функция $\sigma \in \Gamma^{1/4}$, такая, что $F\sigma = \mathbf{y}$ (здесь мы учитываем вложение $l_B^\theta \hookrightarrow l_B^{1/4}$). В силу теоремы 1.3 имеем $T\sigma = -\Phi\sigma + \mathbf{y} \in l_B^\theta$, так как $\mathbf{y} \in l_B^\theta$, а из условия $\sigma \in W_2^{1/4}$ следует, что $\Phi\sigma \in l_B^{1/2} \hookrightarrow l_B^\theta$. Но в силу теоремы 1.2 линейный оператор $T\colon W_2^\theta \to l_B^\theta$ есть изоморфизм. Следовательно, $\sigma \in W_{2,\mathbb{R}}^\theta$, а потому с учетом включения $\mathbf{y} \in \Omega^\theta$ имеем $\sigma \in \Gamma^\theta$. Тем самым мы доказали, что отображение F сюръективно при $\theta \in (1/4, 1/2]$. Теперь, зная, что $F\colon \Gamma^\theta \to \Omega^\theta$ сюръективно при $\theta \in [0, 1/2]$, с помощью такого же приема докажем сюръективность при $\theta \in (1/2, 1]$. Повторив этот же прием, с помощью теоремы 1.3 покажем сюръективность при $\theta \in (1, 2]$. На $k+1$-м шаге получим сюръективность при $\theta \in (k-1, k]$. Здесь число k произвольно, поэтому утверждение справедливо при всех $\theta \geqslant 0$. □

Обозначим через $\widehat{\Omega}_B^\theta$ множество последовательностей $\{s_k\}_1^\infty \in l_B^\theta$, для которых числа $\mu_k = (s_{2k-1} + k - 1/2)^2$, $\lambda_k = (s_{2k-1} + k - 1/2)^2$ вещественны и подчинены условиям (2.1).

Заметим, что если к функции σ, которой определяются операторы L_D и L_{DN}, добавить функцию $c(x-\pi)$, то эти операторы перейдут в $L_D + c$ и $L_{DN} + c$

соответственно, т. е. их спектры сдвинутся на c. Положим

$$s_{2k-1}(c) = \sqrt{\mu_k + c} - (k - 1/2), \qquad s_{2k}(c) = \sqrt{\lambda_k + c} - k. \tag{2.4}$$

Поскольку $c(x-\pi) \in W_2^\theta$ при всех $\theta \geqslant 0$, то $\{s_k(c)\}_1^\infty \in l_B^\theta$, если и только если $\{s_k(0)\}_1^\infty \in l_B^\theta$. Следовательно, $\{s_k\}_1^\infty \in \widehat{\Omega}^\theta$, если и только если найдется $c \geqslant 0$, такое, что $\{s_k(c)\}_1^\infty \in \Omega^\theta$. Из сделанных замечаний следует

Теорема 2.2. *Отображение $F\colon W_{2,\mathbb{R}}^\theta \to \widehat{\Omega}^\theta$ есть биекция. Последовательности чисел $\{\mu_k\}_1^\infty$ и $\{\lambda_k\}_1^\infty$ являются спектрами операторов L_D и L_{DN}, если и только если они удовлетворяют условиям перемежаемости* (2.1) *и $\{s_k\}_1^\infty \in l_B^\theta$.*

Отметим, что при натуральных $\theta = 1, 2, \ldots$ Марченко и Островский ([36], [34]) привели характеризацию спектральных данных для задачи Борга в другой форме, без использования пространств l_B^θ. Можно показать, что для таких значений θ их результат с учетом теоремы единственности Борга эквивалентен сформулированной теореме.

Далее существенно будут использоваться аналитические свойства отображения F. Мы предполагаем, что читатель знаком с определением производных по Фреше и Гато для отображения $F\colon U \to H$, где U — открытое множество в E, а E и H — сепарабельные гильбертовы пространства. Для комплексных гильбертовых пространств производная по Фреше естественно определяется в комплексном смысле. Отображение $F\colon U \to H$ называется аналитическим, если существует комплексная производная по Фреше в каждой точке $x \in U$. Производную по Фреше в точке x далее обозначаем через $F'(x)$. Естественным образом определяется понятие вещественного аналитического отображения, см., например, [40]. Отображение $F\colon U \to H$ называется слабо аналитическим, если в комплексном смысле дифференцируемы по Гато координатные функции $(F(x), e_k)$, где $\{e_k\}_1^\infty$ — ортонормированный базис пространства H. Известен результат [40], который значительно упрощает проверку аналитичности отображения.

Предложение 2.3. *Если $F\colon U \to H$ — слабо аналитическое отображение, которое локально ограничено в каждой точке $x \in U$, то F — аналитическое отображение.*

Далее мы будем работать с отображениями замкнутых множеств. Чтобы не делать дополнительных объяснений, всюду считаем, что отображение $F\colon D \to H$ аналитично на D, если найдется открытое множество U, такое, что $U \supset D$ и $F\colon U \to H$ аналитично.

Теорема 2.4. *Пусть $\theta \geqslant 0$ и $\sigma \in \Gamma^\theta$. Тогда найдется комплексная окрестность $U \in W_2^\theta$ точки σ, такая, что отображение $F\colon U \to l_B^\theta$ дифференцируемо в комплексном смысле во всех точках этой окрестности. Таким образом, отображение $F\colon \Gamma^\theta \to l_B^\theta$ является вещественно-аналитическим. Этим же свойством обладает отображение $\Phi = F - T\colon \Gamma^\theta \to l_B^\tau$, где $T = T_B$ и τ определены в теореме* 1.3. *Производная в точке $\sigma \in \Gamma$ определяется равенством*

$$[F'(\sigma)]f = \left\{ -\frac{(y_k'(x)y_k(x), \overline{f(x)})}{\rho_k\,(y_k^2(x), 1)} \right\}_{k=1}^\infty. \tag{2.5}$$

Здесь $\rho_{2n-1}=\sqrt{\mu_n}$, $\rho_{2n}=\sqrt{\lambda_n}$, $y_{2n-1}(x)$ *— собственные функции оператора* L_{DN}, y_{2n} *— собственные функции оператора* L_D, *а* $f\in W_2^\theta$ *— функция, на которую действует оператор* $F'(\sigma)$.

Доказательство. Утверждения этой теоремы доказаны в §5 работы [46]. Доказательства основаны на теореме 1.3 и предложении 2.2, если предварительно вычислить производные координат. Здесь важно, что знаменатели в формуле (2.5) в случае вещественной функции σ не обращаются в нуль. Согласно [43], собственные функции непрерывно зависят от первообразной потенциала σ, а потому числа $(y_k^2(x),1)$ не обращаются в нуль в некоторой комплексной окрестности (нужно еще учесть асимптотики функций y_k при $k\to\infty$). Теорема остается справедливой, если вместо условия $\sigma\in\Gamma^\theta$ потребовать, чтобы σ была вещественной и среди чисел ρ_k не было равных нулю. Однако в этом случае вместо вещественной аналитичности будет обычная. □

Лемма 2.5. *Пусть функции* $y_k(x)$, *участвующие в теореме* 2.4, *нормированы условиями* $y_k^{[1]}(0)=1$. *Тогда система функций*

$$\varphi_k(x)=\frac{2}{\pi}\,y_k'(x)y_k(x),\qquad k=1,2,\dots,\tag{2.6}$$

является базисом Рисса в пространстве $L_2(0,\pi)$. *Биортогональная к* $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ *система имеет вид*

$$\psi_k(x)=\pi\rho_k^{1/2}y_k(x)w_k(x),\tag{2.7}$$

где при $k=2n$ *функция* w_k *— решение уравнения* $-y''+\sigma'y=\lambda_n y$ *с начальными условиями*

$$w_k^{[1]}(\pi)=0,\qquad w_k(\pi)=\left(\int_0^\pi y_k^2(x)\,dx\cdot y_k^{[1]}(\pi)\right)^{-1},$$

а при $k=2n-1$ *функция* w_k *есть решение уравнения* $-y''+\sigma'y=\mu_n y$ *с начальными условиями*

$$w_k(\pi)=0,\qquad w_k^{[1]}(\pi)=-\left(\int_0^\pi y_k^2(x)\,dx\cdot y_k(\pi)\right)^{-1}.$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы о базисности Рисса системы $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ доказано в лемме 6 работы [45]. Там же доказаны соотношения $(\varphi_k(x),\psi_m(x))=0$ при $k\ne m$. Доказательство равенств $(\varphi_k(x),\psi_k(x))=1$ проводится прямыми вычислениями, которые мы здесь опускаем, так как далее конкретный вид функций φ_k и ψ_k не используется. □

Теорема 2.6. *Пусть* $\theta\geqslant 0$. *Для каждой точки* $\mathbf{y}_0\in\Omega^\theta=F(\Gamma^\theta)$ *существует ее комплексная окрестность* $U(\mathbf{y}_0)$, *в которой определено обратное отображение* $F^{-1}(\mathbf{y})$ *и в которой это отображение имеет комплексную производную по Фреше. Эта производная имеет вид*

$$(F^{-1})'(\mathbf{y})=(F')^{-1}(\mathbf{y})=\sum_{k=1}^\infty s_k\widetilde{\psi}_k(x),\qquad \mathbf{y}=(s_1,s_2,\dots).\tag{2.8}$$

Здесь $\widetilde{\psi}_k(x)=\gamma_k\psi_k(x)$, *где* $\{\psi_k(x)\}_1^\infty$ *— биортогональная система из леммы* 2.6, *а* $\gamma_k=\rho_k\int_0^1 y_k^2(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть сначала $\theta > 0$. Имеем

$$F'(\sigma_0) = T + \Phi'(\sigma_0), \qquad \mathbf{y}_0 = F(\sigma_0).$$

Согласно теореме 1.2, оператор $T\colon W_2^\theta \to l_B^\theta$ — изоморфизм, а в силу теоремы 2.4 оператор $\Phi'(\sigma_0)\colon W_2^\theta \to l_B^\tau$ ограничен, поэтому оператор $\Phi'(\sigma_0)\colon W_2^\theta \to l_B^\theta$ компактен. Следовательно, $F'(\sigma_0)$ — фредгольмов оператор, а потому он обратим, если его ядро нулевое. Из формул (2.5) и полноты системы (2.6) в пространстве L_2 следует, что равенство $F'(\sigma_0)f = 0$ при $f \in L_2$ влечет за собой равенство $f = 0$. Тем более это так, если $f \in W_2^\theta$ при $\theta > 0$. Формула (2.8) теперь получается непосредственной проверкой. Достаточно проверить равенство $F'(\sigma_0)(F^{-1})'(\mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0$. Оно сразу следует из (2.5) и (2.8) с учетом взаимной биортогональности систем $\{\gamma_k^{-1}\varphi_k\}_1^\infty$ и $\{\gamma_k\psi_k\}_1^\infty$.

Пусть теперь $\theta = 0$. Из асимптотических формул для собственных значений ρ_k^2 и собственных функций y_k, полученных в [44, теоремы 2.6 и 2.7], сразу следует, что $\gamma_k \asymp 1$, если функции y_k нормированы условием $y_k^{[1]}(0) = 1$. Поэтому из леммы 2.5 вытекает, что система $\{\widetilde{\psi}_k\}_1^\infty$ — базис Рисса. Тогда ограниченность оператора $(F')^{-1}(\mathbf{y}_0)$, определенного формулой (2.8), следует из определения базиса Рисса. Существование обратного оператора при любом $\theta \geqslant 0$ в малой комплексной окрестности точки $\mathbf{y}_0$ и его комплексная дифференцируемость следуют из теоремы об обратном отображении. $\square$

Отметим, что из теоремы 2.6 сразу получаются локальные оценки разности потенциалов через разность спектральных данных и наоборот. Как отмечено во введении, для классического случая $\theta = 1$ ($q \in L_2$) имеется много работ на эту тему с различными методами и в разной форме. Однако изучались отображения $q \to \{\text{спектральные данные}\}$, мы же изучаем отображение $\int q(t)\,dt = \sigma \to \{\text{спектральные данные}\}$, поэтому возникающие у нас системы и формулы имеют другой вид.

Далее мы покажем, что при $\theta > 0$ с помощью теоремы 1.3 можно получить существенно более сильный результат, избегая технической работы с системами функций.

Лемма 2.7. *Зафиксируем $\theta > 0$. Для любого $R > 0$ найдутся положительные числа $r = r(R)$, $h = h(R)$, такие, что*

$$F(\mathscr{B}_\Gamma^\theta(R)) \subset \Omega^\theta(r,h), \quad \text{где } \mathscr{B}_\Gamma^\theta(R) = \Gamma \cap \mathscr{B}_\mathbb{R}^\theta(R).$$

Доказательство. Если $\|\sigma\|_\theta \leqslant R$, $\sigma \in \Gamma^\theta$, то из теоремы 1.3 следует, что $F\sigma = \mathbf{y} \in \Omega^\theta(r)$, где $r = r(R)$ зависит от R, но не от σ. Остается показать, что для всех элементов $\mathbf{y} = F\sigma$, $\sigma \in \mathscr{B}_\Gamma^\theta(R)$, выполняются неравенства (2.3) при некотором $h = h(R) > 0$, зависящем от R, но не от σ.

Заметим, что найдется число $N = N(\theta, r)$, такое, что для всех $\mathbf{y} = (s_1, s_2, \dots) \in \Omega^\theta(r)$ и всех $k \geqslant N$ выполняются неравенства $s_{k+1} - s_k \leqslant 1/4$ (здесь вместо $1/4$ можно взять любое число $\varepsilon > 0$). Это утверждение сразу следует из определения нормы в l_B^θ при $\theta > 0$ (см. подробнее §5 работы [46]; при $\theta = 0$ это утверждение не справедливо). Теперь допустим, что утверждение теоремы неверно и найдутся элементы $\mathbf{y}^n = F\sigma_n$, $\sigma_n \in \mathscr{B}_\Gamma^\theta(R)$, такие, что $s_k^n - s_{k+1}^n \to 1/2$ при $n \to \infty$ и некотором фиксированном k, $1 \leqslant k < N$ (здесь s_k^n — координаты элементов $\mathbf{y}^n$). Шар в пространстве W_2^θ слабо компактен, поэтому из последовательности функций σ_n можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, считаем, что сама эта последовательность слабо сходится к функции $\sigma \in W^\theta_{2,\mathbb{R}}$. Так как пространство W_2^θ компактно вложено в L_2, то последовательность σ_n сильно сходится к σ в норме L_2. Пусть индекс k, при котором $s_k^n - s_{k+1}^n \to 1/2$, является, например, четным, $k = 2p$. Тогда $\lambda_p(\sigma_n) - \mu_{p+1}(\sigma_n) \to 0$. Согласно теореме 2 работы [43], сходимость функций σ_n в L_2 влечет за собой сходимость собственных значений, т. е. $\lambda_p(\sigma_n) \to \lambda_p(\sigma)$, $\mu_{p+1}(\sigma_n) \to \mu_{p+1}(\sigma)$. Поэтому $s_k^n - s_{k+1}^n \to 1/2$ влечет за собой $\lambda_p(\sigma) = \mu_{p+1}(\sigma)$, что невозможно в силу условия перемежаемости (2.1). □

Лемма 2.8. *Пусть $\theta > 0$. Справедливо обратное утверждение к лемме 2.7: для любых чисел r и h найдется число $R > 0$, такое, что*

$$F^{-1}(\,\Omega^\theta(r,h)) \subset \mathscr{B}^\theta_\Gamma(R).$$

Справедливо представление $F^{-1} = T^{-1} + \Psi$, $\Psi\colon \Omega^\theta \to W_2^\tau$, где число τ определено в теореме 1.3. Отображение $\Psi\colon \Omega^\theta \to W_2^\tau$ аналитично, причем

$$\|\Psi \mathbf{y}\|_\tau \leqslant C\|\mathbf{y}\|_\theta \quad \text{для всех } \mathbf{y} \in \Omega^\theta(r,h), \tag{2.9}$$

где постоянная C зависит только от r и h.

Доказательство. Если первое утверждение леммы неверно, то найдутся элементы $\mathbf{y}^n \in \Omega^\theta(r,h)$, такие, что $F^{-1}\mathbf{y}^n = \sigma_n$, $\|\sigma_n\|_\theta \to \infty$. Для определенности будем считать, что $\theta \in (0,1]$. При $\theta > 1$ доказательство не меняется, нужно только, согласно теореме 1.3, число $\theta/2$ заменить на $\theta - 1$. Выделим из последовательности $\mathbf{y}^n$ слабо сходящуюся в пространстве l_B^θ подпоследовательность. Считаем что сама последовательность слабо сходится к некоторому элементу $\mathbf{y} \in l_B^\theta$. Из слабой сходимости следует покоординатная сходимость. Тогда из определения множества $\Omega^\theta(h,r)$ и его замкнутости следует, что $\mathbf{y} \in \Omega^\theta(h,r)$. В силу теоремы 2.1 найдется функция $\sigma \in \Gamma^\theta$, такая, что $F\sigma = \mathbf{y}$. Из слабой сходимости $\mathbf{y}^n \rightharpoonup \mathbf{y}$ в l_B^θ следует сильная сходимость $\mathbf{y}^n \to \mathbf{y}$ в норме $l_B^{\theta/2}$, а из аналитичности (достаточно непрерывности) отображения $F^{-1}\colon \Omega^{\theta/2} \to \Gamma^{\theta/2}$ следует, что $\|\sigma_n - \sigma\|_{\theta/2} \to 0$. В силу теоремы 1.3 имеем $\|\Phi\sigma_n\|_\theta \leqslant \|\sigma_n\|_{\theta/2} \leqslant C$. Но тогда (опять используем теорему 1.3 и свойство ограниченности слабо сходящейся последовательности) имеем

$$\|T\sigma_n\|_\theta \leqslant \|\Phi\sigma_n\|_\theta + \|\mathbf{y}^n\|_\theta \leqslant C + C = 2C.$$

Поскольку оператор $T\colon W_2^\theta \to l_B^\theta$ есть изоморфизм, $\|\sigma_n\|_\theta \leqslant 2C$. Это противоречие завершает доказательство первого утверждения леммы.

Очевидно, что $\Psi = -T^{-1}\Phi F^{-1}$. Следовательно, отображение $\Psi\colon \Omega^\theta \to W_2^\tau$ является аналитическим как композиция аналитических отображений. Из первого утверждения леммы и равномерной ограниченности в каждом шаре отображения $\Phi\colon \Omega^\theta \to W_2^\tau$ получаем оценку $\|\Psi\mathbf{y}\|_\tau \leqslant C$ для всех $\mathbf{y} \in \Omega^\theta(r,h)$. Из равенства $\Psi(0) = 0$ и аналитичности отображения Ψ получаем оценку (2.9). □

Следующее утверждение является совсем простым, но нам удобно его отдельно сформулировать.

Лемма 2.9. *Пусть X, X_1 — метрические пространства, X полно и функция $\Phi\colon X \to X_1$ непрерывна на X. Если множество $U \subset X$ предкомпактно в X, то $\Phi\colon U \to X_1$ равномерно непрерывна и равномерно ограничена.*

Доказательство. В условиях леммы замыкание $\overline{U}$ является компактом в X, а функция $\Phi\colon \overline{U} \to X_1$ непрерывна. Поэтому утверждение следует из свойств непрерывных функций на компактах. □

Лемма 2.10. *Пусть $\theta > 0$. При любом $R > 0$ справедлива оценка*

$$\|F'(\sigma)\|_\theta \leqslant C \quad \text{для всех } \sigma \in \mathscr{B}^\theta_\Gamma(R), \tag{2.10}$$

где постоянная C зависит от R, но не зависит от σ.

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $\theta \in (0,1]$. Если $\theta > 1$, то далее число $\theta/2$ нужно заменять на $\theta - 1$. Поскольку $F' = \Phi' + T$, достаточно доказать оценку (2.10), в которой вместо F участвует Φ. Согласно теореме 2.3, отображение $\Phi\colon W^{\theta/2} \to l^\theta_B$ аналитично на замкнутом множестве $\mathscr{B}^{\theta/2}_\Gamma(R_1)$ при любом $R_1 > 0$, а потому числовая функция $\|\Phi'(\sigma)\|_\theta$ непрерывна на этом множестве. Из непрерывности вложения $W^\theta_2 \hookrightarrow W^{\theta/2}_2$ следует, что найдется число $R_1 = R_1(R,\theta)$, такое, что $\mathscr{B}^\theta_\Gamma(R) \subset \mathscr{B}^{\theta/2}_\Gamma(R_1)$. Здесь первое множество компактно во втором, поэтому из леммы 2.9 следует оценка (2.10), в которой F надо заменить на Φ. □

Лемма 2.11. *Пусть $\theta > 0$. При любых $r > 0$ и $h \in (0,1/2)$ для обратного отображения справедлива оценка*

$$\|(F^{-1})'(\mathbf{y})\| \leqslant C \quad \text{для всех } \mathbf{y} \in \Omega^\theta(r,h), \tag{2.11}$$

где постоянная C зависит от r и h, но не зависит от $\mathbf{y}$.

Доказательство. Для определенности рассматриваем случай $\theta \in (0,1]$. Рассуждаем аналогично. Фиксируем числа $r > 0$, $h \in (0,1/2)$. Используя непрерывность вложения $l^\theta_B \hookrightarrow l^{\theta/2}_B$, найдем число r_1, такое, что $\Omega^\theta(r,h) \subset \Omega^{\theta/2}(r_1,h)$. Согласно лемме 2.8, отображение $\Psi = -F^{-1}\Phi T^{-1}\colon \Omega^{\theta/2}(r_1,h) \to W^\theta_2$ аналитично. Поэтому числовая функция $\|\Psi'(\mathbf{y})\|_\theta$ непрерывна при $\mathbf{y} \in \Omega^{\theta/2}(r_1,h)$. Воспользовавшись леммой 2.9 и компактностью вложения $\Omega^\theta(r,h) \subset \Omega^{\theta/2}(r_1,h)$, получим оценку (2.11), в которой F^{-1} заменено на Ψ. Поскольку $F^{-1} = T^{-1} + \Psi$, оценка сохраняется для F^{-1}. □

Теперь мы можем доказать основной результат этого параграфа.

Теорема 2.12. *Фиксируем $\theta > 0$. Пусть последовательности $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}_1$ регуляризованных спектральных данных лежат в $\Omega^\theta_B(r,h)$. Тогда прообразы $\sigma = F_B^{-1}\mathbf{y}$, $\sigma_1 = F_B^{-1}\mathbf{y}_1$ лежат в $\mathscr{B}^\theta_\Gamma(R)$ и справедливы оценки*

$$C_1\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1\|_\theta \leqslant \|\sigma - \sigma_1\|_\theta \leqslant C_2\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1\|_\theta, \tag{2.12}$$

где число R и постоянные C_1, C_2 зависят только от r и h. Число R и постоянные C_2, C_1^{-1} увеличиваются при $r \to \infty$ или $h \to 0$. Обратно, если σ, σ_1 лежат в шаре $\mathscr{B}^\theta_{\mathbb{R}}(R)$, то последовательности $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}_1$ регуляризованных спектральных данных этих функций лежат в $\Omega^\theta(r,h)$ и справедливы оценки

$$C_1\|\sigma - \sigma_1\|_\theta \leqslant \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1\|_\theta \leqslant C_2\|\sigma - \sigma_1\|_\theta. \tag{2.13}$$

Здесь числа $r > 0$, $h \in (0,1/2)$ и постоянные C_1 и C_2 зависят только от R. Числа r, h^{-1}, C_2 и C_1^{-1} увеличиваются при $R \to \infty$.

Доказательство. Заметим, что множество $\Omega^\theta(r,h)$ выпукло. Для дифференцируемых функций на выпуклых множествах справедлив аналог теоремы

Лагранжа (см., например, [5, следствие 12.2.8 гл. 12])

$$\|\sigma-\sigma_1\| \leqslant \sup_{0<t<1} \|(F^{-1})'(t\mathbf{y}+(1-t)\mathbf{y}_1)\| \cdot \|\mathbf{y}-\mathbf{y}_1\|.$$

Тогда лемма 2.11 влечет за собой оценку сверху в неравенстве (2.12). Оценки сверху в (2.13) получаются аналогично из леммы 2.10. Оценки снизу в (2.12) и (2.13) теперь следуют из оценок сверху и лемм 2.7 и 2.8. □

Множества $\mathscr{B}^\theta_\Gamma(R)$ в теореме 2.12 можно заменить обычными шарами $\mathscr{B}^\theta_\mathbb{R}(R)$, но тогда регуляризованные спектральные данные нужно определить формулой (2.4), где постоянная c такова, что для всех $\sigma\in\mathscr{B}^\theta_\mathbb{R}(R)$ выполнена оценка $c\geqslant -\mu_1(\sigma)-1/4$. В силу теоремы 3.1 такая постоянная, зависящая только от R, существует. Это замечание вытекает из того, что при добавлении к σ функции $c(x-\pi)$ спектры операторов L_D и L_{DN} сдвигаются на c, а разность функций $\sigma,\sigma_1\in\mathscr{B}^\theta_\mathbb{R}(R)$ совпадает с разностью функций $\sigma+c(x-\pi)$, $\sigma_1+c(x-\pi)\in\mathscr{B}^\theta_\Gamma(R)$.

§3. Задача восстановления оператора L_D по его спектральной функции. Характеризация спектральных данных и равномерные априорные оценки

Общая схема доказательства аналогичных результатов для задачи восстановления оператора L_D по спектральной функции остается прежней, хотя доказательства схожих по формулировке лемм проводятся по-другому. В ходе изложения мы сформулируем две леммы (леммы 3.1 и 3.6), доказательство которых носит технический характер. Ввиду ограниченности объема статьи мы укажем только путь, на котором получаются доказательства, а детали и подробные выкладки читатель может найти в нашей электронной публикации [48].

Далее удобнее работать не с пространством $W^\theta_2\ominus\{1\}$, а с факторпространством $W^\theta_2/\{1\}$, считая, что все функции из W^θ_2 определены с точностью до константы. Подразумевается, что скалярное произведение функций $f,g\in W^\theta_2/\{1\}$ определено равенством $(f,g)_\theta=(f_0,g_0)_\theta$, где $f_0,g_0\in W^\theta_2\ominus\{1\}$. Обозначим через Γ^θ_D множество вещественных функций $\sigma\in W^\theta_2/\{1\}$, для которых $\lambda_1(\sigma)\geqslant 1/2$, а через $\mathscr{B}^\theta_\Gamma(R)$ — пересечение множества Γ^θ_D с замкнутым шаром $\mathscr{B}^\theta_\mathbb{R}(R)$. Если $\sigma\in\Gamma^\theta_D$, то собственные значения оператора L_D подчинены условиям $1/2\leqslant\lambda_1<\lambda_2<\dots$. Для регуляризованных спектральных данных эти неравенства эквивалентны следующим:

$$s_2\geqslant 0,\qquad s_{2k}-s_{2k+2}<1,\qquad k=1,2,\dots. \tag{3.1}$$

Условия неотрицательности всех нормировочных чисел эквивалентны условиям

$$s_{2k-1}>-\pi/2,\qquad k=1,2,\dots. \tag{3.2}$$

Последовательность $\{s_k\}_1^\infty$ принадлежит l_2, поэтому для любой вещественной функции $\sigma\in\Gamma^\theta_D$ найдется число $h=h(\sigma)>0$, такое, что

$$s_2\geqslant 0,\qquad s_{2k}-s_{2k+2}\leqslant 1-h,\qquad s_{2k-1}\geqslant-\pi/2+h,\qquad k=1,2,\dots. \tag{3.3}$$

Фиксируем произвольные числа $r>0$ и $h\in(0,1)$. Обозначим через $\Omega^\theta_D(r,h)$ совокупность вещественных последовательностей $\{s_k\}_1^\infty$, для которых выполнены неравенства (3.3) и которые лежат в замкнутом шаре радиуса r пространства l^θ_D, т. е. $\|\{s_k\}\|_\theta\leqslant r$. Через Ω^θ_D обозначим множество всех вещественных последовательностей $\{s_k\}_1^\infty\in l^\theta_D$, для которых справедливы неравенства (3.1) и

(3.2). Далее мы работаем только с отображением F_D и, когда это удобно, *будем опускать индекс* D. Вместо Γ^θ_D, Ω^θ_D и $\Omega^\theta_D(r,h)$ всегда будем писать Γ^θ, Ω^θ и $\Omega^\theta(r,h)$ соответственно.

Для доказательства аналогов теорем 2.1 и 2.2 нам понадобится следующий важный результат, который дает явное описание прообраза отображения F_D при изменении только одной из координат в пространстве l^θ_D. Похожие формулы для задачи восстановления по одному спектру имеются в книге [40]. Но доказательство нашего результата проводится иначе.

Лемма 3.1. *Пусть $\{\lambda_k\}$ и $\{\alpha_k\}$ — собственные значения и нормировочные числа оператора L_D с вещественной функцией $\sigma \in W^\theta_2 \in \Gamma^\theta$, $\theta \geqslant 0$. Тогда для любого фиксированного $n \geqslant 1$ и для любого $t \in (\lambda_{n-1} - \lambda_n, \lambda_{n+1} - \lambda_n)$ существует функция $\sigma(x,t) \in W^\theta_2$, такая, что соответствующий оператор $L_D = L_D(\sigma)$ имеет спектр $\{\lambda_k + t\delta_{kn}\}_1^\infty$ (здесь δ_{kn} — символ Кронекера) и нормировочные числа $\{\alpha_k\}$. Далее, для любого фиксированного $n \geqslant 1$ и для любого $t \in (-\alpha_n, +\infty)$ существует функция $\sigma(x,t) \in W^\theta_2$, такая, что оператор L_D, построенный по этой функции, имеет спектр $\{\lambda_k\}_1^\infty$ и нормировочные числа $\{\alpha_k + t\delta_{kn}\}_1^\infty$.*

Доказательство. Потенциал $\sigma(x,t)$ можно выписать в явном виде. В первом случае, когда меняется собственное значение λ_n, а нормировочные числа и все другие собственные значения остаются неизменными, положим

$$\sigma_n(x,t) = \sigma(x) - 2\frac{d}{dx}\ln G(x,t), \tag{3.4}$$

$$G(x,t) = \left(1 + \alpha_n^{-1}\int_0^x y^2(\xi,\lambda_n+t)\,d\xi\right)\left(1 - \alpha_n^{-1}\int_0^x y^2(\xi,\lambda_n)\,d\xi\right) + \left(\alpha_n^{-1}\int_0^x y(\xi,\lambda_n+t)y(\xi,\lambda_n)\,d\xi\right)^2. \tag{3.5}$$

Здесь $y(x,\lambda)$ — решение уравнения $-y'' + \sigma' y = \lambda y$ с начальными условиями $y(0,\lambda) = 0$, $y^{[1]}(0,\lambda) = \sqrt{\lambda}$. Во втором случае, когда меняется только одно нормировочное число α_n, положим

$$\sigma_n(x,t) = \sigma(x) - 2\frac{d}{dx}\ln G(x,t), \quad \text{где } G(x,t) = 1 + ((\alpha_n+t)^{-1} - \alpha_n^{-1})\int_0^x y^2(\xi,\lambda_n)\,d\xi. \tag{3.6}$$

Выписанные формулы получаются, если записать уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко в том виде, в котором оно получено для потенциалов-распределений Гринивым и Микитюком [19]. Если искать решения этого уравнения, удовлетворяющие условиям леммы, в виде линейной комбинации двух функций (ср. [29, с. 49–50]), то получается система двух линейных уравнений, которая решается явно. Подробности можно найти в [48]. □

Лемма 3.2. *При любых $\theta \geqslant 0$ отображение $F_D\colon \Gamma^\theta \to \Omega^\theta_D$ сюръективно.*

Доказательство. Сначала докажем лемму при $\theta < 1/2$, когда пространство l^θ_D совпадает с l^θ_2. Воспользуемся приемом из [40]. Согласно теоремам 1.1 и 1.2, производная по Фреше отображения F_D в точке $\sigma = 0$ совпадает с оператором T_D, который является изоморфизмом. Поэтому для любого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что образ шара $\|\sigma\|_\theta < \delta$ при отображении F_D накрывает шар $\|s\|_\theta < \varepsilon$. При $\theta < 1/2$ пространство l^θ_D совпадает с пространством l_2^θ. Для данного $\mathbf{s}=\{s_k\}\in\Omega^\theta$ рассмотрим последовательность

$$\mathbf{s}^n=\{0,0,\dots,0,s_n,s_{n+1},\dots\},$$

выбрав число n так, чтобы $\|\mathbf{s}^n\|_\theta<\varepsilon$. Тогда найдется единственная функция $\sigma_n\in W_2^\theta$, образ $F(\sigma_n)$ которой совпадает с $\mathbf{s}^n$. Применив $n-1$ раз лемму 3.1, построим функцию $\sigma\in\Gamma^\theta\subset W_{2,\mathbb{R}}^\theta$, для которой $F\sigma=\mathbf{s}$. Это и означает, что образ отображения F содержит Ω^θ. Теперь при $\theta\geqslant 1/2$ доказательство завершается с помощью приема, примененного в доказательстве теоремы 2.1. □

Лемма 3.3. *При любых $\theta\geqslant 0$ отображение $F\colon\Gamma^\theta\to\Omega^\theta$ инъективно.*

Доказательство. Инъективность этого отображения при $\theta=0$ (а тогда при всех $\theta\geqslant 0$) доказана в работе Гринива и Микитюка [19]. Отметим также, что инъективность следует из формулируемой ниже леммы 3.6 (для доказательства нужно повторить рассуждения из леммы 6 работы авторов [45]). □

Обозначим через $\widehat{\Omega}^\theta$ множество последовательностей $\{s_k\}_{k=1}^\infty\in l_D^\theta$, для которых числа $\lambda_k=(s_k+k)^2$ вещественны. Повторив рассуждения, проведенные перед доказательством теоремы 2.2, из лемм 3.2 и 3.3 получаем аналог теоремы 2.2.

Теорема 3.4. *При любых $\theta\geqslant 0$ отображение $F_D\colon W_{2,\mathbb{R}}^\theta/\{1\}\to\widehat{\Omega}^\theta$ есть биекция. В частности, числа $\{\lambda_k\}_1^\infty$ и $\{\alpha_k\}_1^\infty$ являются собственными значениями и нормировочными числами оператора L_D, порождаемого функцией $\sigma\in W_{2,\mathbb{R}}^\theta$, если и только если последовательность $\{\lambda_k\}$ строго монотонна, числа $\{\alpha_k\}$ положительны и $\{s_k\}_1^\infty\in l_D^\theta$.*

Из сформулированного утверждения следует также, что отображение $F_D\colon\Gamma^\theta\to\Omega^\theta$ есть биекция. Отметим, что при натуральных $\theta=1,2,\dots$ аналог теоремы 3.4, сформулированный на другом языке, имеется в книге Фрайлинга и Юрко [11].

Аналитичность и явный вид производной по Фреше дает следующая теорема.

Теорема 3.5. *Пусть $\theta\geqslant 0$ и $\sigma\in\Gamma^\theta$. Тогда найдется комплексная окрестность $U\in W_2^\theta$ точки σ, такая, что отображение $F\colon U\to l_D^\theta$ является вещественно аналитическим. В этой окрестности отображение $\Phi_D=F_D-T_D\colon U\to l_D^\tau$, где τ определено в теореме 1.3, также является вещественно-аналитическим. Производная в точке $\sigma\in U$ определяется равенством*

$$F_D'(\sigma)f=\{(\varphi_k(x),\overline{f(x)})\}_{k=1}^\infty, \tag{3.7}$$

где

$$\varphi_{2k-1}(x)=2\alpha_k\lambda_k\frac{d}{d\lambda}(z(x,\lambda)z'(x,\lambda))\bigg|_{\lambda=\lambda_k},\quad \varphi_{2k}(x)=-\frac{y_k'(x)y_k(x)}{\alpha_k\sqrt{\lambda_k}},\quad k=1,2,\dots. \tag{3.8}$$

Здесь $f\in W_2^\theta$ — функция, на которую действует оператор $F_D'(\sigma)\colon W_2^\theta\to l_D^\theta$, $y_n=y(x,\lambda_n)$ — собственные функции оператора L_D, нормированные условиями $y^{[1]}(0,\lambda_n)=\sqrt{\lambda_n}$, а $z(x,\lambda)$ — решение уравнения $-y''+\sigma'(x)y=\lambda y$ с начальным условием $z(\pi,\lambda)=0$, нормированное условием $\int_0^\pi z^2(x,\lambda)\,dx=1/\lambda$. Утверждение об аналитичности (обычной) сохраняется, если условие $\sigma\in\Gamma^\theta$ заменить условием $\sigma\in W_{2,\mathbb{R}}^\theta$ и потребовать, чтобы нуль не был собственным значением оператора L_D.

Доказательство. Локальная дифференцируемость отображения F_D доказана в §6 нашей работы [47]. В этой же работе приведены явные формулы для производной по Фреше, но они менее удобны, нежели (3.8). Переход от старых формул к новым требует некоторой технической работы, см. [48]. $\square$

Лемма 3.6. *Система функций* $\{\varphi_k\}_1^\infty$, *определенная равенствами* (3.8), *является базисом Рисса в пространстве* $L_2(0,\pi)/\{1\}$. *Биортогональная к ней система имеет вид*

$$\psi_{2k-1}(x) = \frac{2}{\alpha_k^2}\, y_k^2(x), \quad \psi_{2k}(x) = -\frac{2\sqrt{\lambda_k}}{\alpha_k}\frac{d}{d\lambda}(y^2(x,\lambda))\bigg|_{\lambda=\lambda_k}, \qquad k=1,2,\dots, \tag{3.9}$$

а потому также является базисом Рисса.

Доказательство соотношений $(\varphi_k(x), \psi_n(x)) = \delta_{kn}$ при $k \neq n$ проводится так же, как в лемме 6 из [47]. При $k=n$ проверка равенств усложняется, см. [48].

Доказательства следующих двух теорем получаются дословным повторением доказательств теорем 2.6 и 2.11 соответственно.

Теорема 3.7. *Пусть* $\theta \geqslant 0$. *Для каждой точки* $\mathbf{y}_0 \in \Omega^\theta = F_D(\Gamma^\theta)$ *существует ее комплексная окрестность* $U(\mathbf{y}_0)$, *в которой определено обратное отображение* $F_D^{-1}(\mathbf{y})$ *и в которой это отображение имеет комплексную производную по Фреше. Эта производная имеет вид*

$$(F_D^{-1})'(\mathbf{y}) = (F_D')^{-1}(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^\infty s_k\psi_k(x), \qquad \mathbf{y} = (s_1, s_2, \dots).$$

Здесь $\{\psi_k(x)\}_1^\infty$ *— система, биортогональная к системе* (3.8).

Теорема 3.8. *Утверждение теоремы* 2.12 *сохраняет силу, если отображение* $F = F_B$ *и множество* $\Omega^\theta(r,h) = \Omega_B^\theta(r,h)$ *в ее формулировке заменить на* F_D *и* $\Omega_D^\theta(r,h)$ *соответственно.*

Авторы благодарят проф. Р. О. Гринива за прочтение рукописи работы и полезные замечания.

Литература

[1] S. Albeverio, R. Hryniv, Ya. Mykytyuk, *Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators in impedance form*, J. Funct. Anal., **222** (2005), 147–177.

[2] А. А. Алексеев, *Устойчивость обратной задачи Штурма–Лиувилля на конечном интервале*, Докл. АН СССР, **287**:1 (1986), 11–13.

[3] V. Ambarzumian, *Über eine Frage der Eigenwerttheorie*, Z. Phys, **53**:9–10 (1929), 690–695.

[4] G. Borg, *Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte*, Acta Math., **78** (1946), 1–96.

[5] В. И. Богачев, О. Г. Смолянов, *Действительный и функциональный анализ*, РХД, Ижевск, 2009.

[6] P. Deift, E. Trubowitz, *Inverse scattering on the line*, Comm. Pure Appl. Math., **32**:2 (1979), 121–251.

[7] П. Б. Джаков, Б. С. Митягин, *Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака*, УМН, **61**:4 (2006), 77–182.

[8] P. Djakov, B. Mityagin, *Fourier method for one dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials*, `http://arxiv.org/abs/0710.0237v1`.

[9] Л. Д. Фаддеев, *Обратная задача квантовой теории рассеяния*, УМН, **14**:4 (1959), 57–119.

[10] Л. Д. Фаддеев, *Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шрёдингера*, Труды МИАН им. В. А. Стеклова, **73** (1964), 314–336.

[11] G. Freiling, V. Yurko, *Inverse Sturm–Liouville Problems and Their Applications*, Nova Sci. Publ. Corporation, 2001.

[12] М. Г. Гасымов, Б. М. Левитан, *Определение дифференциального уравнения по двум спектрам*, УМН, **19**:2 (1964), 3–63.

[13] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, *Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции*, Изв. АН СССР, сер. матем., **15**:4 (1951), 309–360.

[14] F. Gesztesy, *Inverse spectral theory as influenced by Barry Simon*, in: Spectral Theory and Mathematical Physics, A Festschrift in Honor of Barry Simon's 60th Birthday, Ergodic Shrödinger Operators, Singular Spectrum, Orthogonal Polynomials, and Inverse Spectral theory, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 76, part. 2 (eds. F. Gesztesy, P. Deift, C. Galvez, P. Perry, W. Schlag), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 741–820; http://arxiv.org/abs/1002.0388v1.

[15] O. H. Hald, *The inverse Sturm-Liouville problem with symmetric potentials*, Acta Math., **141**:3–4 (1978), 263–291.

[16] M. Hitrik, *Stability of the inverse problem in potential scattering on the real line*, Comm. Partial Differential Equations, **25**:5–6 (2000), 925–955.

[17] H. Hochstadt, *The inverse Sturm–Liouville problem*, Comm. Pure Appl. Math., **26** (1973), 715–729.

[18] R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, 1*D Schrödinger operators with periodic singular potentials*, Methods Func. Anal. Topol., **7**:4 (2001), 31–42; http://arxiv.org/abs/math/0109129v1.

[19] R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, *Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials*, Inverse Problems, **19**:3 (2003), 665–684.

[20] R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, *Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials, II. Reconstruction by two spectra*, in: Functional Analysis and its Applications, North-Holland Mathematical Studies, vol. 197 (eds. V. Kadets, W. Zelazko), North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2004, 97–114.

[21] R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, *Transformation operators for Sturm–Liouville operators with singular potentials*, Math. Phys. Anal. Geom., **7**:2 (2004), 119–149.

[22] R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, *Eigenvalue asymptotics for Sturm–Liouville operators with singular potentials*, J. Funct. Anal., **238**:1 (2006), 27–57.

[23] R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, *Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials. IV. Potentials in the Sobolev space scale*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2), **49**:2 (2006), 309–329.

[24] Е. Л. Коротяев, Д. С. Челкак, *Обратная задача Штурма–Лиувилля со смешанными краевыми условиями*, Алгебра и анализ, **21**:5 (2009), 114–137.

[25] М. Г. Крейн, *Решение обратной задачи Штурма–Лиувилля*, Докл. АН СССР, **76** (1951), 21–24.

[26] М. Г. Крейн, *О методе эффективного решения обратной краевой задачи*, Докл. АН СССР, **94** (1954), 987–990.

[27] N. Levinson, *The inverse Sturm–Liouville problem*, Mat. Tidsskr. B., 1949, 25–30.

[28] Б. М. Левитан, *Об определении дифференциального уравнения Штурма–Лиувилля по двум спектрам*, Изв. АН СССР, сер. матем., **28**:1 (1964), 63–78.

[29] Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма–Лиувилля*, Наука, М., 1984.

[30] J. R. Mclaughlin, *Stability theorems for two inverse spectral problems*, Inverse Problems, **4** (1988), 529–540.

[31] M. M. Malamud, *Spectral analysis of Volterra operators and inverse problems for systems of ordinary differential equations*, SfB Preprint No. 269, Berlin, June 1997.

[32] В. А. Марченко, *Некоторые задачи в теории дифференциального оператора второго порядка*, Докл. АН СССР, **72** (1950), 457–460.

[33] В. А. Марченко, *Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка*, Труды ММО, **1** (1951), 328–420.

[34] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977.

[35] В. А. Марченко, К. В. Маслов, *Устойчивость задачи восстановления оператора Штурма–Лиувилля по спектральной функции*, Матем. сб., **81**:4 (1970), 525–551.

[36] В. А. Марченко, И. В. Островский, *Характеризация спектра оператора Хилла*, Матем. сб., **97**:4 (1975), 540–606.

[37] В. А. Марченко, И. В. Островский, *Аппроксимация периодических потенциалов конечнозонными*, Вестник Харьк. ун-та №205. Прикл. матем. и механика, вып. 45, 1980, 4–40.

[38] M. Marletta, R. Weikard, *Weak stability for an inverse Sturm–Liouville problem with finite spectral data and complex potential*, Inverse Problems, **21**:4 (2005), 1275–1290.

[39] A. Mizutani, *On the inverse Sturm–Liouville problem*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math, **31**:2 (1984), 319–350.

[40] J. Pöschel, E. Trubowitz, *Inverse Spectral Theory*, Acad. Press, Orlando, 1987.

[41] Т. И. Рябушко, *Устойчивость восстановления оператора Штурма–Лиувилля по двум спектрам*, Теор. функц., функц. анализ и его прилож., **18** (1973), 176–185.

[42] Т. И. Рябушко, *Оценки нормы разности двух потенциалов граничной задачи Штурма–Лиувилля*, Теория функций, функц. анализ и его прилож., **39** (1983), 114–117.

[43] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами*, Матем. заметки, **66**:6 (1999), 897–912.

[44] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями*, Труды ММО, **64** (2003), 159–219.

[45] A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, *Inverse problem for Sturm–Liouville operators with distribution potentials: Reconstruction from two spectra*, Russian J. Math. Phys., **12**:4 (2005), 507–514.

[46] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *О собственных значениях оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева*, Матем. заметки, **80**:6 (2006), 864–884.

[47] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *О свойствах отображений, связанных с обратными задачами Штурма–Лиувилля*, Труды МИАН им. В. А. Стеклова, **260** (2008), 227–247.

[48] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *Свойства отображения, связанного с восстановлением оператора Штурма–Лиувилля по спектральной функции. Равномерная устойчивость в шкале соболевских пространств*, `http://arxiv.org/abs/1010.5344v1`.

[49] А. Н. Тихонов, *О единственности решения задачи электропроводимости*, Докл. АН СССР, **69** (1949), 797–800.

[50] В. А. Юрко, *Об устойчивости восстановления оператора Штурма–Лиувилля*, Дифференциальные уравнения и теория функций (Саратовский университет), **3** (1980), 113–124.

МГУ имени М. В. Ломоносова,
e-mail: artem_savchuk@mail.ru

МГУ имени М. В. Ломоносова,
e-mail: ashkalikov@yahoo.com

Поступило в редакцию
17 мая 2010 г.