А. А. Махнев, М. С. Нирова, О дистанционно регулярных графах с $c_2 = 2$, *Дискрет. матем.*, 2020, том 32, выпуск 1, 74–80

DOI: 10.4213/dm1595

Дискретная математика

том 32 выпуск 1 * 2020

УДК 519.172 DOI https://doi.org/10.4213/dm1595

О дистанционно регулярных графах с $c_2 = 2$

© 2020 г. А. А. Махнев*, М. С. Нирова**

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 с $c_2 = 2$ (любые две вершины, расстояние между которыми равно 2, имеют ровно 2 общих соседей). Тогда окрестность Δ вершины w в Γ является частичным пространством прямых. Ввиду результата Броувера-Ноймайера либо Δ является объединением изолированных $(\lambda+1)$-клик, либо степень вершин $k \geqslant \lambda(\lambda+3)/2$, причем в случае равенства имеем $k = 5, \lambda = 2$ и Γ является графом икосаэдра.

А.А. Махнев, М.П. Голубятников и Го Вэнь-бинь изучали дистанционно регулярные графы Γ диаметра 3, для которых граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом сети. Ими была найдена новая бесконечная серия $\{2u^2-2m^2+4m-3, 2u^2-2m^2, u^2-m^2+4m-2; 1, 2, u^2-m^2\}$ допустимых массивов пересечений для таких графов с $c_2 = 2$. В работе доказано несуществование некоторых дистанционно регулярных графов из этой серии. Доказано также, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{22, 16, 5; 1, 2, 20\}$ не существует.

Работа выполнена при поддержке г/б проекта № 18-1-1-17 программы УрО РАН и при поддержке соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, частичное пространство прямых, граф с $c_2 = 2$

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы степени k без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений

*Место работы: Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, e-mail: makhnev@imm.uran.ru

**Место работы: Кабардино-Балкарский госуниверситет, e-mail: nirova_m@mail.ru

$\{b_0, ..., b_{d-1}; c_1, ..., c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i (см. [1]). Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u).

Порядок клики в дистанционно регулярном графе степени k, имеющем наименьшее собственное значение $-m$ не больше $1 + k/m$. Клика K с $1 + k/m$ вершинами называется кликой Дельсарта. Дистанционно регулярный граф называется *геометрическим*, если окрестность любой его вершины является объединением изолированных клик Дельсарта.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *частичным пространством прямых*, если любые две точки лежат не более чем на одной прямой.

Для вершины u графа Δ и натурального числа i через $\Delta_{\geqslant i}(u)$ обозначим $\{w \in \Delta \mid d(u,w) \geqslant i\}$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с $c_2 = 2$, Δ — окрестность вершины a в Γ. Тогда любые две несмежные вершины из Δ имеют в Δ не более одного общего соседа, поэтому любое ребро из Δ лежит в единственной максимальной клике из Δ и Δ — граф коллинеарности частичного пространства прямых, имеющий обхват по крайней мере 5. Далее, Δ — регулярный граф степени a_1 на k вершинах. Броувер иНоймайер [3] получили следующее утверждение

Предложение 1. *Связное частичное пространство прямых обхвата по крайней мере 5 и с более чем одной прямой, в котором каждая точка имеет λ соседей, содержит $k \geqslant \lambda(\lambda+3)/2$ точек. Равенство выполняется только в случае $k = 5, \lambda = 2$.*

С помощью предложения 1 в [4] доказано, что дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$ и $\{36, 28, 4; 1, 2, 24\}$ не существуют. В [5] доказано, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$ не существует.

Автоморфизмы некоторых дистанционно регулярных графов с $c_2 = 2$ найдены в [6], [7], [8].

В [9] найдена бесконечная серия допустимых массивов пересечений $\{2u^2 - 2m^2 + 4m-3, 2u^2-2m^2, u^2-m^2+4m-2; 1, 2, u^2-m^2\}$, неглавные собственные значения этих графов, отличные от -1, равны $2m + 2u - 3$, $-(2u - 2m + 3)$, а их кратности равны $(2m^2-2u^2-4m+3)(m+u)(m-u-1)^2/(2u)$, $(2m^2-2u^2-4m+3)(m+u-1)^2(m-u)/(2u)$ соответственно, и u делит $(2m^2 - 4m + 3)m(m-1)^2$. В теореме 1 найдены новые необходимые условия существования дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{2(u^2 - m^2) + 4m - 3, 2(u^2 - m^2), (u^2 - m^2) + 4m - 2; 1, 2, u^2 - m^2\}$.

Теорема 1. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{2u^2 - 2m^2 + 4m - 3, 2u^2 - 2m^2, u^2 - m^2 + 4m - 2; 1, 2, u^2 - m^2\}$. Тогда u делит $(2m^2 - 4m + 3)m(m-1)^2$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *окрестность любой вершины в Γ является объединением изолированных $(4m-3)$-клик, $4m - 3$ делит $16u^2 - 9$, $2m - 1$ делит $(4u^2 - 3)(4u^2 - 1)^2$ и $1 + (2u^2 - 2m^2 + 4m - 3)/(2u - 2m + 3) \geqslant 4m - 2$,*

(2) *$2u^2 > 10m^2 + 14m + 5$.*

При $m = 1$ получим массив пересечений $\{2u^2 - 1, 2u^2 - 2, u^2 + 1; 1, 2, u^2 - 1\}$, для которого выполнено утверждение (1) из заключения теоремы 2. При $m = 2$ допустимых массивов пересечений нет.

Следствие 1. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{2u^2-2m^2+4m-3, 2u^2-2m^2, u^2-m^2+4m-2; 1, 2, u^2-m^2\}$, $m>1$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) $m \geqslant 3$ *и в случае* $m=3$ *граф с массивом пересечений* $\{63, 54, 37; 1, 2, 27\}$ *не существует*;

(2) *если* $m = 4$, *то графы с массивами пересечений* $\{53, 40, 34; 1, 2, 20\}$ *и* $\{143, 130, 79; 1, 2, 65\}$ *не существуют*;

(3) *если* $m = 5$, *то графы с массивами пересечений* $\{95, 78, 57; 1, 2, 39\}$, $\{167, 150, 93; 1, 2, 75\}$ *и* $\{255, 238, 137; 1, 2, 119\}$ *не существуют.*

Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{22, 16, 5; 1, 2, 20\}$ имеет $v = 1+22+176+44 = 243$ вершин и спектр $22^1, 7^{66}, -2^{132}, -5^{44}$. Граф $\bar{\Gamma}_2$ сильно регулярен с параметрами $(243, 66, 9, 21)$ и спектром $66^1, 3^{198}, -15^{44}$. Ввиду границы Дельсарта [1, предложение 4.4.6] порядок клики в Γ не больше 5.

Теорема 2. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{22, 16, 5; 1, 2, 20\}$ *не существует.*

2. Доказательство теоремы 1

В этом разделе мы докажем теорему 1 и следствие 1.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{2u^2-2m^2+4m-3, 2u^2-2m^2, u^2-m^2+4m-2; 1, 2, u^2-m^2\}$. Тогда неглавные собственные значения графа Γ, отличные от -1, равны $2m+2u-3$, $-(2u-2m+3)$, с кратностями $(2m^2-2u^2-4m+3)(m+u)(m-u-1)^2/(2u)$, $(2m^2-2u^2-4m+3)(m+u-1)^2(m-u)/(2u)$ соответственно. Поэтому u делит $(2m^2-4m+3)m(m-1)^2$. Далее, граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для сети $pG_{u^2-m^2}(2u^2-2m^2+4m-3, u^2-m^2)$, поэтому $v = (2u^2-2m^2+4m-2)^2$.

Лемма 1. *Если окрестность каждой вершины графа* Γ *является объединением изолированных* $(4m-3)$*-клик, то* $4m-3$ *делит* $16u^2-9$, $2m-1$ *делит* $(4u^2-3)(4u^2-1)^2$ *и* $1+(2u^2-2m^2+4m-3)/(2u-2m+3) \geqslant 4m-2$.

Доказательство. Число $(4m-3)$-клик в окрестности вершины графа Γ равно $(2u^2-2m^2+4m-3)/(4m-3)$, поэтому $4m-3$ делит $16u^2-16m^2$ и $4m-3$ делит $16u^2-9$.

Число $(4m-2)$-клик в Γ равно $kv/(4m-2) = (2u^2-2m^2+4m-3)(2u^2-2m^2+4m-2)^2/(4m-2)$, поэтому $2m-1$ делит $(4u^2-4m^2)^2(4u^2-4m^2-2)$ и $2m-1$ делит $(4u^2-1)^2(4u^2-3)$.

Порядок клики в Γ не больше $1+(2u^2-2m^2+4m-3)/(2u-2m+3)$ ввиду границы Дельсарта, следовательно, $1+(2u^2-2m^2+4m-3)/(2u-2m+3) \geqslant 4m-2$. □

Лемма 2. *Если окрестность некоторой вершины графа* Γ *не является объединением изолированных* $(4m-3)$*-клик, то* $2u^2 > 10m^2+14m+5$.

Доказательство. Пусть окрестность некоторой вершины a графа Γ не является объединением изолированных $(4m-3)$-клик и вершина $w \in [a]$ лежит в двух максимальных кликах графа $[a]$. Пусть Δ — связная компонента графа $[a]$, содержащая вершину w. По предложению 1 имеем $|\Delta| \geqslant \lambda(\lambda+3)/2 = (2m-2)(4m-1)$.

Так как $4m-4 \neq 2$, то $2u^2-2m^2+4m-3 > (2m-2)(4m-1)$ и $2u^2 > 10m^2+14m+5$. Лемма доказана. $\square$

Из лемм 1, 2 следует теорема 1.

Докажем следствие 1.

Лемма 3. *Либо $m \leqslant 3$, либо $2u^2 > 10m^2 + 14m + 5$.*

Доказательство. Если окрестность любой вершины графа Γ является объединением изолированных $(4m-3)$-клик, то $(2u^2 - 2m^2 + 4m - 3)/(2u - 2m + 3) \geqslant 4m - 3$ по лемме 1. Отсюда $2u^2-2m^2+4m-3 \geqslant 8um-6u-8m^2+18m-9$ и $u^2-u(4m-3)+3m^2-7m+3 \geqslant 0$. Таким образом, $u \geqslant 4m - 3 + \sqrt{16m^2 - 24m + 9 - 12m^2 + 28m - 12}/2$ и $u \geqslant 3m - 1$.

Далее, $2u^2 \geqslant 18m^2 - 12m + 2$. Если $2u^2 \leqslant 10m^2 + 14m + 5$, то $18m^2 - 12m + 2 \leqslant 10m^2 + 14m + 5$ и $8m^2 - 26m - 3 \leqslant 0$, поэтому $m \leqslant 3$. $\square$

Лемма 4. *Если $m > 1$, то верно неравенство $m \geqslant 3$ и в случае $m = 3$ граф с массивом пересечений $\{63, 54, 37; 1, 2, 27\}$ не существует.*

Доказательство. При $m = 2$ получим массив пересечений $\{2u^2 - 3, 2u^2 - 8, u^2 + 2; 1, 2, u^2 - 4\}$, u делит 6. Отсюда $u = 6$ и кратность некоторого собственного значения графа не целая.

При $m = 3$ получим массив пересечений $\{2u^2 - 9, 2u^2 - 18, u^2 + 1; 1, 2, u^2 - 9\}$, u делит $4 \cdot 27$, и если выполняется утверждение (1) из заключения теоремы 1, то $(2u^2 - 9)/(2u - 3) \geqslant 10$ и $u \geqslant 9$. С другой стороны, при $u \geqslant 9$ выполняется утверждение (2) из заключения теоремы 1. Значит, в случае $u = 6$ граф не существует. $\square$

Лемма 5. *Если $m = 4$, то графы с массивами пересечений $\{53, 40, 34; 1, 2, 20\}$ и $\{143, 130, 79; 1, 2, 65\}$ не существуют.*

Доказательство. При $m = 4$ получим массив пересечений $\{2u^2-19, 2u^2-32, u^2-2; 1, 2, u^2 - 16\}$, u делит $19 \cdot 36$, и если выполняется утверждение (1) из заключения теоремы 1, то $(2u^2 - 19)/(2u - 5) \geqslant 13$ и $u \geqslant 12$. Если же выполняется утверждение (2) из заключения теоремы 1, то $2u^2 > 221$ и $u \geqslant 11$. Значит, в случаях $u = 6$ и $u = 9$ граф не существует. $\square$

Лемма 6. *Если $m = 5$, то графы с массивами пересечений $\{95, 78, 57; 1, 2, 39\}$, $\{167, 150, 93; 1, 2, 75\}$ и $\{255, 238, 137; 1, 2, 119\}$ не существуют.*

Доказательство. При $m = 5$ получим массив пересечений $\{2u^2-33, 2u^2-50, u^2-7; 1, 2, u^2 - 25\}$, u делит $33 \cdot 80$. Если выполняется утверждение (1) из заключения теоремы 1, то $(2u^2 - 33)/(2u - 7) \geqslant 17$ и $u \geqslant 14$. Если же выполняется утверждение (2) из заключения теоремы 1, то $2u^2 > 325$ и $u \geqslant 13$. Значит, в случаях $u = 8, 10$ и $u = 12$ граф не существует. $\square$

Из лемм 3–6 получаем следствие 1.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть до конца раздела Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{22,16,5;1,2,20\}$, a — вершина графа Γ и $\Delta=[a]$. Тогда Δ — регулярный граф степени 5 на 22 вершинах. Максимальную клику C из Δ с $|C|=i$ назовем i-прямой. Фиксируем вершину $b\in\Delta$ и пусть число i-прямых, проходящих через b, равно x_i.

Лемма 7. *Справедливы следующие утверждения*:

(1) $\sum x_i(i-1)=5$, *число вершин в* $\Delta_{\geqslant 2}(b)$ *равно* $\sum x_i(i-1)(6-i)$ *и* $i\leqslant 4$,

(2) *некоторая вершина графа* Δ *не лежит на* 4*-прямых*,

(3) $x_2\leqslant 2$ *и* Δ *содержит* 2*-прямую*.

Доказательство. По [1, теорема 4.4.3] наименьшее собственное значение графа Δ не меньше $-1-b_1/(\theta_1+1)=-1-6/7=-13/7$.

Допустим, что любая вершина графа Δ лежит на 4-прямой. Тогда число 4-прямых равно 22/4, противоречие.

Фиксируем вершину $b\in\Delta$ и пусть число i-прямых, проходящих через b, равно x_i. Тогда $\sum x_i(i-1)=5$ и $i\leqslant 4$. Число вершин в $\Delta_{\geqslant 2}(b)$ равно $\sum x_i(i-1)(6-i)$, но не больше $22-1-5=16$, поэтому $x_2\leqslant 3$. Пусть $x_2=3$, $\Delta(b)$ содержит 3 изолированных вершины c_1,c_2,c_3 и ребро $\{d,e\}$. Тогда $\Delta_2(b)$ содержит по 4 вершины из $\Delta(c_i)$, 2 вершины из $\Delta(d)\cap\Delta(e)$ и по одной вершине из $\Delta(d)-\Delta(e)$, $\Delta(e)-\Delta(d)$. Противоречие с тем, что для вершины $f\in\Delta(d)\cap\Delta(e)$ подграф $\Delta(b)\cap\Delta(f)$ содержит вершины d,e.

Если Δ не содержит 2-прямых, то через любую вершину в Δ проходит одна 3-прямая и одна 4-прямая, противоречие с утверждением (2). □

Лемма 8. *Справедливы одно из следующих утверждений*:

(1) $x_2=2$, $x_4=1$ *и* $|\Delta_{\geqslant 3}(b)|=2$,

(2) $x_2=1$, $x_3=2$ *и* $|\Delta_{\geqslant 3}(b)|=0$,

(3) $x_3=1$, $x_4=1$ *и* $|\Delta_{\geqslant 3}(b)|=4$.

Доказательство. Если $x_2=2$, то $x_4=1$ и $|\Delta_{\geqslant 3}(b)|=2$.

Если $x_2=1$, то $x_3=2$ и $|\Delta_{\geqslant 3}(b)|=0$.

Если $x_2=0$, то $x_3=x_4=1$ и $|\Delta_{\geqslant 3}(b)|=4$. □

Лемма 9. *Пусть* y_i *— число вершин типа* (i), $i\in\{1,2,3\}$, z_j *— число* j*-прямых*, $j\in\{2,3,4\}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) $y_1+y_2+y_3=22$,

(2) $z_4=(y_1+y_3)/4$ *и* $z_3=(2y_2+y_3)/3$,

(3) $z_2=(2y_1+y_2)/2$.

Доказательство. Вершина типа (1) или (3) лежит на единственной 4-прямой, поэтому $z_4=(y_1+y_3)/4$.

Вершина типа (3) лежит на единственной 3-прямой, вершина типа (2) лежит на двух 3-прямых, поэтому $z_3=(2y_2+y_3)/3$.

Вершина типа (2) лежит на единственной 2-прямой, вершина типа (1) лежит на двух 2-прямых, поэтому $z_2=(2y_1+y_2)/2$. □

Лемма 10. *Справедливы следующие утверждения*:

(1) *число y_2 сравнимо с 2 по модулю 4*,

(2) *если вершины b, c типа* (2) *находятся на расстоянии 2 в Δ и $d \in \Delta(b) \cap \Delta(c)$, то $|\Delta(b) \cap \Delta(d)| = |\Delta(c) \cap \Delta(d)|$ и либо d — вершина типа* (1) *и $|\Delta(b) \cap \Delta(d)| = 0$, либо d — вершина типа* (2) *и $|\Delta(b) \cap \Delta(d)| = 1$*,

(3) $y_2 = 2$.

Доказательство. По лемме 9 число $y_1 + y_3$ делится на 4, поэтому y_2 сравнимо с 2 по модулю 4.

Пусть вершины b, c типа (2) находятся на расстоянии 2 в Δ и $d \in \Delta(b) \cap \Delta(c)$. По лемме 8 имеем $|\Delta_3(b)| = |\Delta_3(c)| = 0$, поэтому любая вершина из $\Delta(b) - d^{\perp}$ смежна с единственной вершиной из $\Delta(c) - d^{\perp}$, поэтому $|\Delta(b) \cap \Delta(d)| = |\Delta(c) \cap \Delta(d)|$ и либо d — вершина типа (1) и $|\Delta(b) \cap \Delta(d)| = 0$, либо d — вершина типа (2) и $|\Delta(b) \cap \Delta(d)| = 1$.

Пусть $y_2 \geqslant 6$ и b — вершина типа (2).

Если $y_2 \geqslant 10$, то $\Delta_2(b)$ содержит 4 или 5 вершин типа (2). В последнем случае для вершины c типа (2), смежной с b, подграф $\Delta_2(c)$ содержит не менее 6 вершин типа (2), противоречие. Значит, $\Delta(b)$ состоит из вершин типа (2). Пусть Δ_0 — подграф, индуцированный вершинами типа (2). Тогда Δ_0 — связная компонента графа Δ, противоречие с предложением 1. Значит, $y_2 = 6$.

По лемме 9 имеем $z_4 = 4$ и Δ является объединением шести вершин $b, b_2, ..., b_6$ типа (2) и четырех 4-клик $K_1, ..., K_4$. Допустим, что $\Delta_2(b)$ содержит 3 вершины типа (2). Ввиду утверждения (2) можно считать, что вершины b_4, b_5 из $\Delta_2(b)$ смежны с b_2, b_3 соответственно и что b_6 смежна с вершиной d, изолированной в $\Delta(b)$. Далее, множество вершин типа (2) в Δ индуцирует шестиугольник.

Если же степень некоторой вершины типа (2) в Δ равна 3, то множество вершин типа (2) в Δ индуцирует 3-призму или полный многодольный граф $K_{3,3}$, противоречие. Пусть b, b_2 — смежные вершины типа (2). Тогда $\Delta(b)$ и $\Delta(b_2)$ содержат по 3 вершины типа (1) или (3). Поэтому $\Delta(b)$ и $\Delta(b_2)$ содержат вершины, лежащие в общей клике K_i. Противоречие с тем, что Δ содержит четырехугольник. Лемма доказана. □

Завершим доказательство теоремы 2. Пусть b, c — вершины типа (2) в Δ. Тогда Δ является объединением вершин b, c и пяти 4-клик $K_1, ..., K_5$. Если вершины b, c смежны, то $\Delta(b)$ и $\Delta(c)$ содержат по 4 вершины типа (1) или (3). Тогда $\Delta(b)$ и $\Delta(b_2)$ содержат вершины, лежащие в общей клике K_i. Противоречие с тем, что Δ содержит четырехугольник.

Если же вершины b, c не смежны, то $\Delta(b) \cap \Delta(c)$ содержит вершину $d \in K_i$. Положим $\{e_1, e_2, e_3\} = K_i - \{d\}$. Тогда $\Delta(e_j)$ содержит две вершины вне K_i, поэтому $\Delta(e_j)$ и $\Delta(e_l)$ содержат вершины, лежащие в общей клике K_s, $s \neq i$. Противоречие с тем, что Δ содержит четырехугольник. Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1989.

2. А.Л. Гаврилюк, А.А. Махнев, “Об автоморфизмах дистанционно регулярных графов с массивом пересечений $\{56,45,1;1,9,56\}$”, *Доклады Академии наук*, **432**:5 (2010), 512–515.
3. A.E. Brouwer, A. Neumaier, “A remark on partial linear spaces with girth 5 with an application to strongly regular graphs”, *Combinatorica*, **8** (1998), 57–61.
4. A.E. Brouwer, S Sumaloj, C. Worawannotai, “The nonexistence of distance-regular graphs with intersection arrays $\{27,20,10;1,2,18\}$ and $\{36,28,4;1,2,24\}$”, *Australasian J. Comb.*, **66**:2 (2016), 330–332.
5. А.А. Махнев, М.П. Голубятников, “Граф Шилла с массивом пересечений $\{12,10,2;1,2,8\}$ не существует”, *Матем. заметки*, **106**:5 (2019), 797–800; англ. пер.: A.A. Makhnev, M.P. Golubyatnikov, “A Shilla graph with intersection array $\{12,10,2;1,2,8\}$ does not exist”, *Math. Notes*, **106**:5 (2019), 850–853.
6. В.И. Белоусова, А.А. Махнев, “Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{30,27,24;1,2,10\}$”, *Сибирские электрон. матем. известия*, **16** (2019), 493–500.
7. А.А. Махнев, М.М. Хамгокова, “Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{39,36,22;1,2,18\}$”, *Сибирские электрон. матем. известия*, **16** (2019), 638–647.
8. А.А. Махнев, А.А. Токбаева, “О дистанционно регулярном графе с массивом пересечений $\{35,28,6;1,2,30\}$”, *Владикавказский матем. журнал*, **21**:2 (2019), 27–37.
9. A.A. Makhnev, M.P. Golubyatnikov, Wenbin Guo, “Inverse problems in graph theory: nets”, *Comm. Math. Statist.*, **7**:1 (2019), 69–83.

Статья поступила 24.10.2019.