Д. Г. Мещанинов, Замкнутые классы полиномов по модулю p^2, *Дискрет. матем.*, 2017, том 29, выпуск 3, 54–69

DOI: 10.4213/dm1452

Дискретная математика

том 29 выпуск 3 * 2017

УДК 519.716 DOI https://doi.org/10.4213/dm1452

Замкнутые классы полиномов по модулю p^2

© 2017 г. Д. Г. Мещанинов*

Описываются все замкнутые классы реализуемых полиномами над кольцом $\mathbb{Z}_{p^2}$ функций p^2-значной логики (число p простое), содержащие все линейные функции. Множество всех таких классов оказалось счетным. Построена их решетка по отношению включения.

Ключевые слова: $k-$значная логика, замкнутый класс, полином над кольцом вычетов, решетка замкнутых классов

Алгебра P_k функций k-значной логики с операциями суперпозиции является важнейшей функциональной системой и традиционным средством моделирования дискретных управляющих систем. Для нее, как и для других универсальных алгебр, весьма актуальны задачи классификации элементов. Существенным отличием многозначных логик ($k \geqslant 3$) от двузначной является несчетность множества всех замкнутых классов (подалгебр) [1], что осложняет описание решетки $\mathcal{L}_k$ классов по отношению включения (решетка $\mathcal{L}_2$ построена Э. Постом еще в 1921–1941 гг. [2]).

В связи с этим актуальным становится анализ фрагментов решетки, в частности, окрестностей достаточно обширных классов. В качестве одного из таких классов привлекает внимание класс $Polyn$ всех функций, реализуемых полиномами по составному модулю k (если число k простое, то $Polyn = P_k$). Вычислена мощность класса $Polyn$ [3–7], установлены критерии принадлежности функций классу $Polyn$ [8–16]. Найдены критерии полноты в P_k системы функций, содержащей все полиномы по модулю $k = p^n$ [17] и $k = p_1 \cdots p_s$ [18] ($p_1, \ldots, p_s$ — попарно различные простые числа, $s \geqslant 2$, p простое). Изучены и исследованы надклассы класса $Polyn$ и их решетка [12, 13, 16, 18–23]. Изучены и подклассы класса $Polyn$, в частности, в [24] для $k = 4$ (4 — наименьшее составное число) построена решетка всех подклассов в $Polyn$, содержащих класс L линейных (по модулю k) функций. Эта решетка оказалась счетно-бесконечной, на основании чего сделан вывод о сохранении ее бесконечности и при других составных значениях k. При простом k классы, содержащие целиком класс L^1 одноместных линейных функций, описаны в [25], все подклассы класса L^1 — в [26]. Подклассы в L при составных k проанализированы в [27–32] (см. обзор в гл. 13 книги [33]).

Исследовались также классы полиномов над другими кольцами и алгебрами, в частности, над $GF(q)$ [34], $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ [35–44], множеством $\mathbb{N}_0$ неотрицательных целых чисел с операциями сложения и умножения [35, 36, 39–42, 44].

*Место работы: Национальный исследовательский университет "МЭИ", e-mail: MeshchaninovDG@mpei.ru

В настоящей работе анализируется решетка всех классов, находящихся между $Polyn$ и L, при $k = p^2$, где число p простое. Тем самым обобщаются результаты [24]. При выводе результатов существенным образом использовались свойства сохранения функциями p-разностей [45,46]. Они позволили охарактеризовать $Polyn$ как класс $R(p)$ сохранения p-разностей, а также его максимальные подклассы $L(p)$ и $S(p)$. Результаты анонсированы в [47].

В работе используются (кроме уже указанных) следующие обозначения:

$E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ для $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$,

$\tilde{x} = \tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$, $\tilde{0} = \tilde{0}^n = (0, \ldots, 0)$ — наборы длины n из E_k^n,

$[\Phi]$ — замыкание относительно суперпозиции системы функций Φ из P_k,

(a, b) — наибольший общий делитель целых a и b,

$\mathbb{Z}_k$ — кольцо вычетов по модулю k.

Буквой p обозначается простое число, символами $+, -, \cdot$ (если это не вызывает разночтений) — операции кольца $\mathbb{Z}_k$.

При $k = p^\alpha$ одна и та же функция класса $Polyn$ как отображение $E_k^n \mapsto E_k$ может быть реализована несколькими полиномами над $\mathbb{Z}_k$. Всегда будут рассматриваться только *приведенные полиномы*, т. е. такие, в которые каждая переменная входит в степени не выше $p\alpha - 1$, однако и приведенный полином не единствен, например, $px^p \equiv px \pmod{p^2}$.

1. Классы K_m

Положим $K_1 = L$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, определим K_m как класс функций, представимых приведенными полиномами, в которых каждый нелинейный моном имеет степень не выше m и коэффициент, кратный p. Легко проверяемые свойства классов K_m следуют из их определения.

Следствие 1. *Классы K_m обладают следующими свойствами.*

1. *Если $m \geqslant 2$, $m_1 < m$, то $K_{m_1} \subset K_m$. Включение строгое, так как полином*

$$\phi_m(x_1, \ldots, x_m) = px_1 \cdots x_m$$

принадлежит разности классов $K_m \setminus K_{m_1}$.

2. *Введение и удаление фиктивных переменных не изменяет свойство функции принадлежать или не принадлежать классу K_m.*

3. *Линейная комбинация функций класса K_m принадлежит K_m.*

4. *Если $f(\tilde{x}) \in K_1$, то $\phi_1(f(\tilde{x})) \in K_1$. Если $m \geqslant 2$ и $f(\tilde{x}) \in K_m$, то $\phi_m(f(\tilde{x}), y_2, \ldots, y_m) \in K_m$.*

Утверждение 1. *Для каждого $m \in \mathbb{N}$ класс K_m замкнут и система функций*

$$A_m = \{1,\ x + y,\ \phi_m(x_1, \ldots, x_m)\}$$

является базисом этого класса.

Доказательство. Покажем, что $K_m \subseteq [A_m]$. Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из K_m реализуется приведенным полиномом $\Pi(f)$, то каждый нелинейный моном в $\Pi(f)$ имеет вид $apx_{i_1} \cdots x_{i_r}$, где $2 \leqslant r \leqslant m$, $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n$, $(a, p) = 1$. Его можно получить сложением a одинаковых слагаемых $\phi_m(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}, 1, \ldots, 1)$. Складывая такие мономы, получим нелинейную часть полинома $\Pi(f)$, его линейная часть порождается подсистемой $\{1, x+y\}$. Таким образом, $f(x_1, \ldots, x_n) \in [A_m]$ и требуемое включение выполнено.

Обратное включение легко проверяется индукцией по сложности формулы над A_m, задающей функцию из $[A_m]$. Индуктивный переход осуществляется с применением свойств, перечисленных в следствии 1.

Полнота системы A_m в классе K_m установлена. Покажем, что любая ее собственная подсистема не полна в K_m. Подсистема $A_m \setminus \{1\}$ порождает только функции, сохраняющие константу 0, подсистема $A_m \setminus \{x+y\}$ — только мономы, подсистема $A_m \setminus \{\phi_m\}$ — только собственный подкласс L в K_m. Таким образом, A_m есть базис в K_m.

Следствие 2 (из леммы 2 статьи [24]). *Если полином f над $\mathbb{Z}_p$ имеет степень $m \geqslant 2$, то система $\{1, \;\; x+y \pmod p, \;\; f\}$ порождает полином $x_1 \cdots x_m$.*

Для полиномов над $\mathbb{Z}_{p^2}$ совершенно аналогично выводится

Утверждение 2. *Если $m \geqslant 2$ и полином над $\mathbb{Z}_{p^2}$ принадлежит разности классов $K_m \setminus K_{m-1}$, то система $\{1,\; x+y,\; f\}$ порождает полином $\phi_m(x_1, \ldots, x_m)$.*

Следствие 3. *Если $m \geqslant 2$, то каждый класс K_{m-1} является предполным в K_m и существует неуплотняемая бесконечная возрастающая цепь*

$$L = K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_{m-1} \subset K_m \subset \cdots$$

Предел этой цепи — замкнутый класс

$$K_\infty = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m,$$

он не имеет базиса и порождается системой $A_\infty = \{1, x+y\} \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} \{\phi_m\}$.

2. Классы Λ_m

Для каждого $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant p$, определим Λ_m как класс функций, представимых приведенными полиномами, в которых каждый моном либо принадлежит классу K_m, либо имеет вид ax^p, где $(a, p) = 1$. Легко проверяемые свойства классов Λ_m следуют из их определения.

Следствие 4. *Классы Λ_m обладают следующими свойствами.*

1. *Справедливо включение $K_m \subset \Lambda_m$.*
2. *Если $p \leqslant m_1 < m$, то $\Lambda_{m_1} \subset \Lambda_m$.*
3. *Введение и удаление фиктивных переменных не изменяет свойство функции принадлежать или не принадлежать классу Λ_m.*
4. *Линейная комбинация функций класса Λ_m принадлежит Λ_m.*
5. *Если $f(\tilde{x}) \in \Lambda_m$, то $\phi_m(f(\tilde{x}), y_2, \ldots, y_m) \in \Lambda_m$.*
6. *Если $f(\tilde{x}) \in \Lambda_m$, то $(f(\tilde{x}))^p \in \Lambda_m$.*

Последнее свойство проверяется с помощью тождеств

$$px^p \equiv px, \quad x^{p^2} \equiv x^p \pmod{p^2}. \tag{1}$$

Утверждение 3. *Для каждого $m \geqslant p$ класс Λ_m порождается системой функций*

$$B_m = \{1,\ x+y,\ \phi_m(x_1,\ldots,x_m),\ x^p\} \text{ при } m \in \mathbb{N}.$$

Эта система является базисом класса Λ_m при $m \geqslant p+1$, а базис класса Λ_p составляет система

$$C = \{1, x+y, x^p\}.$$

Доказательство. Включение $\Lambda_m \subseteq [B_m]$ обосновывается так же, как при доказательстве утверждения 1. Обратное включение доказывается индукцией по сложности формулы над B_m, задающей функцию из $[B_m]$; индуктивный переход проводится с использованием свойств, перечисленных в следствии 4. Таким образом, $\Lambda_m = [B_m]$ при всех $m \geqslant p$.

Рассмотрим собственные подсистемы системы B_m. Подсистема $B_m \setminus \{1\}$ порождает только функции, сохраняющие константу 0; подсистема $B_m \setminus \{x+y\}$ — только мономы; подсистема $B_m \setminus \{x^p\} = A_m$ порождает не весь класс Λ_m, а только его собственный подкласс K_m. Рассмотрим подсистему $B_p \setminus \{\phi_p\} = C$. Покажем, что $[C] \subseteq \Lambda_p$, индукцией по сложности формулы над C, задающей функцию из $[C]$. Базис индукции составляет очевидное включение $C \subseteq \Lambda_p$. Индуктивный переход осуществляется с помощью свойств 3–6 следствия 4. Таким образом, любая собственная подсистема системы B_m не является полной в Λ_m, система B_m — базис этого класса.

Установлено, что $[C] \subseteq \Lambda_p$. Докажем обратное включение, выразив полином $\phi_p(x_1,\ldots,x_p)$ через элементы системы C. Сделаем это по аналогии со следствием 2 и утверждением 2. Рассмотрим полином

$$f(x_1,\ldots,x_p) = (x_1+\cdots+x_p)^p - x_1^p - \cdots - x_p^p,$$

принадлежащий $[C]$. Представим его в виде

$$f(x_1,\ldots,x_p) = p!x_1\cdots x_p + g(x_1,\ldots,x_p),$$

где каждый моном суммы $g(x_1,\ldots,x_p)$ не содержит хотя бы одну из переменных $x_1,\ldots,x_p$. Тогда

$$p!x_1\cdots x_p = f(x_1,\ldots,x_p) -$$
$$- f(0,x_2,\ldots,x_p) - f(x_1,0,x_3,\ldots,x_p) - \cdots - f(x_1,\ldots,x_{p-1},0).$$

Имеем $p! = ap$, $a = (p-1)!$, $(a,p) = 1$. Складывая $a^{-1} \pmod p$ одинаковых слагаемых $p!x_1\cdots x_p$, получим $px_1\cdots x_p = \phi_p(x_1,\ldots,x_p)$. Итак, система C полна в классе Λ_p. Легко проверить, что она является и базисом этого класса.

Следствие 5. *Если $m \geqslant p+1$, то каждый класс Λ_{m-1} является предполным в Λ_m и существует неуплотняемая бесконечная возрастающая цепь*

$$\Lambda_p \subset \Lambda_{p+1} \subset \cdots \subset \Lambda_{m-1} \subset \Lambda_m \subset \cdots.$$

Предел этой цепи — замкнутый класс

$$\Lambda_\infty = \bigcup_{m=p}^{\infty} \Lambda_m$$

не имеет базиса, он порождается системой

$$B_\infty = \{1, x+y, x^p\} \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} \{\phi_m\}.$$

Следствие 5 доказывается аналогично следствию 3. Легко проверить справедливость следующего утверждения.

Утверждение 4. *При $m = p, p+1, \ldots, \infty$ класс K_m является предполным в классе Λ_m.*

Следствие 6. *Классы K_m и Λ_m образуют решетку, изображённую на рис.* 1.

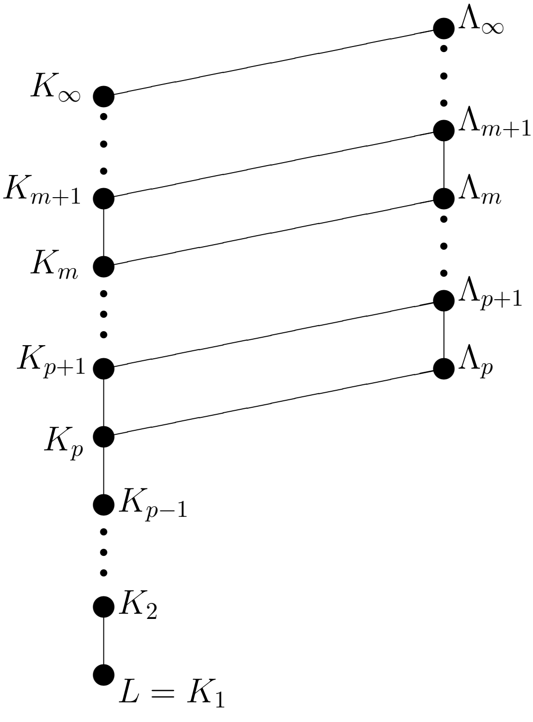

Рис. 1.

3. Сохранение d-разностей. Классы $R(d)$ и $L(d)$

В [45,46] для произвольных k и d, $d|k$, рассмотрены замкнутые классы $R(d)$ и $L(d)$ функций k-значной логики, сохраняющих и абсолютно сохраняющих d-разности. Приведем основные определения и результаты этих работ, они будут существенным образом использоваться далее.

Пусть $d|k$, $f(\tilde{x}) \in P_k$. Фиксируем j из множества $\{1, \ldots, n\}$. Для различных $\tilde{x}$ из E_k^n рассмотрим величины

$$\Delta_j f(\tilde{x}) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + d, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(\tilde{x}),$$

которые называются *d-разностями функции $f(\tilde{x})$ по переменной x_j*, вычисленными *в точке $\tilde{x}$*. Если функция f зависит только от одной переменной, то ее d-разности в точках x будут обозначаться символом $\Delta f(x)$.

Функция $f(\tilde{x})$ *сохраняет d-разности*, если для всех $j = 1, \ldots, n$, всех $\tilde{\mu}$ из E_d^n и всех таких $\tilde{x}$, что $\tilde{x} \equiv \tilde{\mu} \pmod d$, разности $\Delta_j f(\tilde{x}) = \Delta(j, \tilde{\mu})$ не зависят от $\tilde{x}$. Если при этом разности $\Delta_j f(\tilde{x}) = \Delta(j)$ не зависят и от $\tilde{\mu}$, то будем говорить, что функция $f(\tilde{x})$ *абсолютно сохраняет d-разности.*

Обозначим через $R(d)$ и $L(d)$ классы функций, сохраняющих и абсолютно сохраняющих d-разности.

Пусть $d|k$. Функция $f(\tilde{x})$ из P_k называется *d-периодической*, если она удовлетворяет условию

$$\tilde{\alpha} \equiv \tilde{\beta} \pmod d \quad \Rightarrow \quad f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta}).$$

Введем функции

$$g_d(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \tilde{x} \equiv \tilde{0} \pmod d, \\ 0, & \tilde{x} \not\equiv \tilde{0} \pmod d, \end{cases} \qquad \delta_d(x) = d\lfloor x/d \rfloor, \qquad \chi_d(\tilde{x}) = x_1 g_d(\tilde{x}),$$

$$\chi_{d,j}(\tilde{x}) = x_j g_d(\tilde{x}) = \chi_d(x_j, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_1, x_{j+1}, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Утверждение 5 (см. [45, 46]). *Классы $R(d)$ и $L(d)$ замкнуты и обладают следующими свойствами.*

1. *Справедливы соотношения*

$$L = L(1) = R(1) \subseteq L(d) \subseteq R(d) \subseteq L(k) = R(k) = P_k.$$

2. *Любая d-периодическая функция принадлежит классу $L(d)$.*

3. *Введение и удаление фиктивных переменных не изменяет свойство функции принадлежать или не принадлежать классу $R(d)$ (классу $L(d)$).*

4. *Линейная комбинация функций класса $R(d)$ (класса $L(d)$) принадлежит этому классу.*

5. *Класс $R(d)$ состоит из всех функций вида*

$$f(\tilde{x}) = l(\tilde{x}) + g(\tilde{x}) + h(\tilde{x}), \tag{2}$$

где линейная функция $l(\tilde{x})$, d-*периодическая функция* $g(\tilde{x})$ *и функция* $h(\tilde{x})$, $h(\tilde{x}) \equiv 0 \pmod d$, *однозначно определяются условиями*

$$l(\tilde{x}) = f(\tilde{0}) + \sum_{j=1}^{n}(f(\underbrace{0,\ldots,0}_{j-1},1,0,\ldots,0) - f(\tilde{0}))x_j, \tag{3}$$

$$g(\tilde{x}) = f(\tilde{\mu}) - l(\tilde{\mu}) = \sum_{\tilde{\mu}\in E_d^n} a(\tilde{\mu})g_d(\tilde{x}-\tilde{\mu}), \quad a(\tilde{\mu}) \in E_k, \tag{4}$$

$$h(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) - l(\tilde{x}) - g(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{\mu}\in E_d^n}\sum_{j=1}^{n} b_j(\tilde{\mu})\chi_{d,j}(\tilde{x}-\tilde{\mu}),$$

$$b_j(\tilde{\mu}) = h(\mu_1,\ldots,\mu_{j-1},\mu_j+d,\mu_{j+1},\ldots,\mu_n) - h(\tilde{\mu}).$$

6. *Класс* $L(d)$ *состоит из всех функций вида* (2), *где*

$$h(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^{n} b_j\delta_d(x_j), b_j \in E_k. \tag{5}$$

7. *Система* $\{x+y, g_d(x,y)\}$ *является базисом класса* $L(d)$, *при* $d > 2$ *базисом является также система* $\{x+y, g_d(x)\}$.

8. *Система функций* $\{1, x+y,\ g_d(x,y),\ \chi_d(x)\}$ *является полной в классе* $R(d)$.

9. *Если* $k = p^2$, *то* $R(p) = Polyn$.

10. *Если* $k = pd$, *то класс* $L(d)$ *является предполным в* $R(d)$.

4. Классы Λ_∞ и $L(p)$ при $k = p^2$

Утверждение 6. *Справедливо включение* $\Lambda_\infty \subset L(p)$.

Доказательство. Нелинейная часть полинома класса Λ_∞ является p-периодической функцией p^2-значной логики и поэтому принадлежат классу $L(p)$. Включение строгое, так как, например, $x^p y^p \in L(p) \setminus \Lambda_\infty$.

Мы часто будем использовать следующие простые факты.

Лемма 1. *Если* $k = p^2$, *то* $g_p(x) = 1 - x^{p(p-1)}$.

Это следствие малой теоремы Ферма.

Лемма 2. *Если* $k = p^2$ *и*

$$\psi_n(x_1,\ldots,x_n) = x_1^p \cdots x_n^p \text{ при } n \in \mathbb{N},$$

то любой полином $\psi_n(x_1,\ldots,x_n)$ *порождается системой* $\{1, \psi_2(x_1,x_2)\}$.

Это следует из соотношений $\psi_1(x) = \psi_2(x,1)$ и $\psi_{n+1}(\tilde{x},y) = \psi_2(\psi_n(\tilde{x}),y)$ при $n \geqslant 2$.

Утверждение 7. *При $k = p^2$ система*

$$C_p = \{1, x + y, \psi_2(x, y)\}$$

является базисом класса $L(p)$.

Доказательство. В силу свойства 7 из утверждения 5 достаточно установить, что $g_p(x, y) \in [C_p]$.

При $p = 2$ имеем $g_2(x, y) = \psi_2(1 + x, 1 + y)$.

Если $p \geqslant 3$, то

$$g_p(x, y) = g_p^{(1)}(g_p^{(1)}(x) + g_p^{(1)}(y) - 2)$$

и $g_p^{(1)}(x) = 1 - \psi_{p-1}(x, x, \ldots, x)$ в силу леммы 1. Тогда $g_p(x, y) \in [1, x + y, \psi_2(x, y)] = [C_p]$ согласно лемме 2. Нетрудно проверить, что любая собственная подсистема системы C_p не является полной в $L(p)$.

Следующий факт усиливает лемму 10 из [46]. Приводимое ниже доказательство проще и короче, чем в [46].

Лемма 3. *Пусть $n \geqslant 1$ и $(n + 1)$-местная функция $f(\tilde{x}^n, y)$ не сохраняет d-разности абсолютно. Тогда подстановкой констант и отождествлением переменных из функции f можно получить одноместную функцию, также не сохраняющую d-разности абсолютно.*

Доказательство. Без ограничения общности полагаем, что не сохраняются абсолютно d-разности по переменной y, т. е. величины $\Delta_{n+1} f(\tilde{x}, y)$ зависят от $\tilde{x}$ и y. Рассмотрим эти разности как функции переменных $\tilde{x}, y$.

Если $\Delta_{n+1} f(\tilde{x}, y)$ зависит существенно от y, то требуемая одноместная функция $h(y)$ получается подстановкой в функцию $f(\tilde{x}, y)$ констант вместо всех переменных $\tilde{x}$.

Если $\Delta_{n+1} f(\tilde{x}, y)$ не зависит существенно от y, а зависит только от $\tilde{x}$, то, отождествляя переменную y с какой либо из переменных $\tilde{x}$, получим функцию меньшего числа аргументов, также не сохраняющую d-разности абсолютно. Повторим такие же рассуждения для нее и будем продолжать их, пока не получим требуемую одноместную функцию.

Лемма 4. *Пусть $p \geqslant 3$, $k = p^2$ и все значения нелинейной p-периодической одноместной функции $H(x)$ принадлежат E_p. Тогда суперпозициями $H(x)$ и линейных функций можно получить функцию $g_p(x)$.*

Доказательство. Дальнейшие построения аналогичны доказательству теоремы 7 из [19], теоремы 9 из [45] и теоремы 3 из [46]. Пусть $y_i = H(i)$ при $i = 0, 1, \ldots, p - 1$. Будем считать, что $y_0 = 0$, в противном случае добьемся этого вычитанием из $H(x)$ константы y_0. Пусть $\sigma(H) = y_1 + \cdots + y_{p-1}$ (сумма вычисляется в кольце $\mathbb{Z}$) и пусть $W(H)$ есть количество ненулевых значений среди $y_1, \ldots, y_{p-1}$. Число $W(H)$ будем называть *весом функции* $H(x)$. В силу нелинейности $H(x)$ имеем $W(H) \geqslant 1$ и $y_t \neq 0$ при некотором t. Полагаем $y_t = t$, иначе умножим $H(x)$ на константу. Построим функцию $g_p(x)$. Для этого рассмотрим четыре случая.

1. Пусть $W(H) = 1$. Тогда $H(x) = t g_p(x - t)$ и $g_p(x) = s H(x + t)$, где $s \equiv t^{-1} \pmod{p^2}$.

2. Пусть $W(H) > 1, (\sigma(H), p) = 1$. Рассмотрим функцию

$$F(x) = H(x) + H(2x) + \dots + H((p-1)x).$$

Имеем $F(0) = 0, F(i) = \sigma(H) \not\equiv 0 \pmod p$, при $i = 1, \dots, p-1$. Тогда $\sigma - F(x) = \sigma g_p(x)$, $g_p(x) = \tau(\sigma - F(x))$, где $\sigma = \sigma(H)$, $\tau \equiv \sigma^{-1} \pmod{p^2}$.

3. Пусть $p|\sigma(H)$, $1 < W(H) \leqslant p-2$. Будем последовательно уменьшать вес функции, пока не придем к одному из случаев 1 или 2. Возможны три подслучая.

3.1. Имеется такое y_j, что $H(y_j) \neq y_j$. Пусть $F(x) = H(x) - H(H(x))$. Тогда функция F сохраняет нули функции H, кроме того, $F(t) = 0$ и $F(j) \neq 0$. Значит, $1 \leqslant W(F) < W(H)$.

3.2. Для каждого i выполнено условие $H(y_i) = y_i$, и среди ненулевых значений y_i есть одинаковые. Можно считать, что одинаковые значения y_{i_1} и y_{i_2} равны 1, иначе умножим $H(x)$ на константу. Пусть $i_2 - i_1 = l, l \in \{1, \dots, p-1\}$, $j \equiv i_1 l^{-1} \pmod p$, $F(x) = H(lx)$. Тогда для некоторого r, $r \geqslant 2$, получаем

$$F(j) = F(j+1) = \dots = F(j+r-1) = 1, \quad F(j+r) \neq 1.$$

Положим $G(x) = F(x + F(x)) - F(x)$. Функция F принимает те же значения, что и функция H, но в других точках (если $l \neq 1$), поэтому $W(F) = W(H)$. Далее, если $F(x_0) = 0$, то и $G(x_0) = 0$. Кроме того, $G(j) = 0$ и $G(j+r-1) \neq 0$. Следовательно, $1 \leqslant W(G) < W(H)$.

3.2. Для каждого i выполнено условие $H(y_i) = y_i$ и среди ненулевых значений y_i нет одинаковых. Тогда при всех i из E_p либо $y_i = 0$, либо $y_i = i$. Из условий $p|\sigma(H)$, $1 < W(H) \leqslant p-2$ следует, что функция H не может принимать все $W(H)$ ненулевых значений в точках $x = 1, 2, \dots, W(H)$. Значит, найдется такое $l, l \geqslant 1$, что $y_l = l \neq 0$, $y_{l-1} = 0$. При этом найдется и $j, j > l$, для которого $y_j = j \neq 0$. Пусть $c \equiv j^{-1} \pmod p$, $F(x) = cH(x + l - 1)$. Тогда $F(0) = 0$, $F(1) \neq 1$. Рассматривая вместо $H(x)$ функцию F, приходим к случаю 3.1.

4. Пусть $p|\sigma(H)$, $W(H) = p-1$. Для функции $F(x) = x - H(x)$ получаем $F(0) = F(t) = 0$. Из нелинейности $H(x)$ следует, что $F(j) \neq 0$ при некотором j. Случай сведен к одному из предыдущих.

Лемма 5. *Если при* $k = p^2$ *функция* $g(\tilde{x})$ *является* p*-периодической и* $g(\tilde{x}) \equiv 0 \pmod p$, *то* $g(\tilde{x}) \in \Lambda_\infty$.

Доказательство. Это следует из соотношений

$$g(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{\mu} \in E_p^n} c(\tilde{\mu}) p g_p(\tilde{x} - \tilde{\mu}), \quad c(\tilde{\mu}) \in E_p, \quad g_p(\tilde{x}) = p \prod_{j=1}^{n} (1 - x_j^{p-1}),$$

$$p x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} = \phi_{m_1 + \dots + m_n}(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{x_n, \dots, x_n}_{m_n}), \quad \phi_m(\tilde{x}^m) \in \Lambda_\infty,$$

справедливых для всех $m, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}_+$.

Лемма 6. *Функция* $\delta_p(x)$ *принадлежит классу* Λ_∞.

Доказательство. Рассмотрим функции $f(x) = x^p - x$,

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \equiv 0 \pmod p \text{ или } x \equiv 1 \pmod p, \\ \mu^p - \mu, & x \equiv \mu \pmod p,\ \mu \in E_p \setminus \{0, 1\}, \end{cases}$$

и $h(x) = f(x) - g(x)$. Имеем $f(0) = f(1) = 0$, $p|f(x)$, $p|g(x)$ при всех x, функция $g(x)$ является p-периодической, $f, g \in \Lambda_\infty$. Покажем, что $h(x) = (p-1)\delta_p(x)$. Действительно, если $\mu, M \in E_p$, то

$$h(\mu + Mp) = (\mu + Mp)^p - (\mu + Mp) - (\mu^p - \mu) \equiv (p-1)Mp \pmod{p^2}.$$

Следовательно, $x^p - x - g(x) = (p-1)\delta_p(x)$,

$$\delta_p(x) = ((p-1)^{-1} \pmod{p^2}) \cdot (-x + x^p - g(x)) \in \Lambda_\infty,$$

так как $x, x^p, g(x) \in \Lambda_\infty$.

Утверждение 8. *Класс Λ_∞ является предполным в классе $L(p)$.*

Доказательство. При $p = 2$ утверждение доказано в [24], где классы Λ_∞ и $L(p)$ обозначались как $\langle x^2, 2x_1 \cdots x_n \mid n \geqslant 2\rangle$ и $\langle x_1^2 x_2^2\rangle$ соответственно.

Пусть $p \geqslant 3$, $f(\tilde{x}) \in L(p) \setminus \Lambda_\infty$. Покажем, что $[\Lambda_\infty \cup \{f\}] = L(p)$. Используя представления (2)–(5), вычитанием из $f(\tilde{x})$ функций $l(\tilde{x})$, $h(\tilde{x})$ класса Λ_∞ получим p-периодическую функцию $g(\tilde{x})$, $g(\tilde{x}) \in L(p) \setminus \Lambda_\infty$. Она нелинейна, т. е. не сохраняет 1-разности. С помощью леммы 3 из нее линейными преобразованиями получим одноместную p-периодическую нелинейную функцию $G(x)$. Вычитая из $G(x)$ функции $pg_p(x - \mu), \mu \in E_p$, принадлежащие Λ_∞, получим одноместную нелинейную p-периодическую функцию $H(x)$, все значения которой принадлежат E_p. Применение леммы 4 завершает доказательство.

5. Классы $R(p)$ и $S(p)$

При $k = p^2$ определим $S(p)$ как подкласс в $R(p)$, состоящий из всех функций, определяемых условиями (2)–(4) и, кроме того, $p|g(\tilde{x})$. Легко проверяемые свойства класса $S(p)$ следуют из его определения.

Следствие 7. *Класс $S(p)$ обладает следующими свойствами.*

1. *Функции x^p, $pg_p(\tilde{x})$ принадлежат классу $S(p)$,*

$$g_p(x) \in R(p) \setminus S(p), \quad L \subset S(p) \subset R(p).$$

2. *Введение и удаление фиктивных переменных не изменяет свойство функции принадлежать или не принадлежать классу $S(p)$.*

3. *Линейная комбинация функций класса $S(p)$ принадлежит этому классу.*

Лемма 7. *Если $k = p^2$, то*

$$\chi_p(x) = x - x^{(2p-1)^2}.$$

Доказательство. Если $p|x$, то $p^2|x^{(2p-1)^2}$, так как $(2p-1)^2 > 2$. Если $(x,p) = 1$, из тождеств (1) получаем $x^{p^2} \equiv x^p$, $x^{4p^2-4p} \equiv 1$, $x - x^{(2p-1)^2} \equiv 0 \pmod{p^2}$.

Лемма 8. *Если $k = p^2$, то $x^p \in [\{x^{2p-1}\}]$.*

Доказательство. Положим $f(x) = (x^{2p-1})^{2p-1} = x^{(2p-1)^2}$. Покажем, что полином x^p можно выразить p-кратной итерацией полинома $f(x)$:

$$x^p = \underbrace{f(f(\cdots f(x)\cdots))}_{p}.$$

Правая часть последней формулы есть $x^{(2p-1)^{2p}}$. Если $p|x$, то $x^{(2p-1)^{2p}} \equiv x^p \equiv 0 \pmod{p^2}$, так как $p \geqslant 2$ и $(2p-1)^{2p} > 2$. Если же $(x,p) = 1$, то $x^{(2p-1)^2} \equiv x$, $x^{(2p-1)^{2p}} \equiv x^p \pmod{p^2}$. Таким образом, $x^p \in [x^{2p-1}]$.

Лемма 9. *Если $k = p^2$, то $pg_p(\tilde{x}) \in [\{1, x+y, x^{2p-1}\}]$.*

Доказательство. Согласно лемме 7 имеем $x^p \in [\{x^{2p-1}\}]$. Из полиномов $1, x+y$, x^p можно получить все полиномы $\phi_n(x_1,\ldots,x_n)$ и, следовательно, все полиномы $pg_p(\tilde{x})$.

Утверждение 9. *Класс $S(p)$ замкнут и системы функций*

$$\{1,\ x+y,\ \chi_p(x)\},\quad \{1,\ x+y,\ x^{2p-1}\}$$

являются его базисами.

Доказательство. Из формулы (2), представления $\chi_d^{(2)}(x,y) = \chi_d^{(1)}(\chi_d^{(1)}(x)+y) - \chi_d^{(1)}(y)$ для любых $k, d,\ d|k$, (лемма 9 из [46]) и лемм 5–8 следует полнота этих систем в классе $S(p)$. Легко проверить, что их собственные подсистемы не полны в $S(p)$.

Следствие 8. *Справедливы соотношения*

$$\Lambda_\infty \subset S(p),\quad S(p) \cap L(p) = \Lambda_\infty.$$

Включение строгое, так как $x^{2p-1} \in S(p) \setminus \Lambda_\infty$.

Утверждение 10. *Если $k = p^2$, то класс $S(p)$ является предполным в $R(p)$.*

Доказательство. При $p = 2$ это доказано в [24], где класс $S(2)$ обозначен через $\langle x^3\rangle$. Пусть $p \geqslant 3$, $f(\tilde{x}) \in R(p) \setminus S(p)$. Покажем, что $g_p(x) \in [S(p) \cup \{f\}]$ и, следовательно, $[S(p) \cup \{f\}] = R(p)$. Представим $f(\tilde{x})$ в виде (2). Вычитая функции $l(\tilde{x})$, $h(\tilde{x}) \in S(p)$, получим p-периодическую функцию $G(x_1,\ldots,x_n)$ из $R(p) \setminus S(p)$, при этом не все значения этой функции кратны p. При $n \geqslant 2$ подстановкой констант получим из $G(\tilde{x})$ такую одноместную p-периодическую функцию $h(x)$, что $h(x) \in R(p) \setminus S(p)$ и при некотором $j \in E_p$ значение $h(j)$ не кратно p. Вычитая из $h(x)$ функции $pg_p(x-a)$, $a \in E_p$, класса $S(p)$, добьемся того, что все значения результирующей функции $H(x)$ будут принадлежать E_p. Далее применяем лемму 4.

6. Классы $S(p)$ и Λ_∞

В [24] для случая $p = 2$ доказано, что класс Λ_∞, обозначенный как $\langle x^2, 2x_1 \cdots x_n | n \geqslant 2\rangle$, является предполным в $S(2)$.

Утверждение 11. *Если $p \geqslant 3$, то класс Λ_∞ является предполным в $S(p)$.*

Доказательство. Пусть $f(\tilde{x}) \in S(p) \setminus \Lambda_\infty$. Покажем, что из функции f и элементов класса Λ_∞ можно получить функцию $\chi_p(x)$.

Из условия $f(\tilde{x}) \notin \Lambda_\infty$ следует, что $f(\tilde{x}) \notin L(p)$, т. е. функция f не сохраняет p-разности абсолютно. Как показано в [45], из $f(\tilde{x})$ и элементов класса Λ_∞ можно получить такую одноместную функцию $f_1(x)$, что $f_1(x) \in S(p) \setminus \Lambda_\infty$. Вычитая из функции $f_1(x)$ линейные и p-периодические функции, получим функцию $F(x) \in S(p) \setminus \Lambda_\infty$, все значения которой кратны p и, кроме того, $F(x) = 0$ при $x \in E_p$. Очевидно, $F(x) \in R(p)$, поэтому $F(jp+i) = jA_ip$, $i, j, A_i \in E_p$. Число $W(F)$ ненулевых значений A_i назовем *весом функции* F. Если $W(F) = 0$, то $F(x) = 0 \in \Lambda_\infty$, поэтому $W(F) \geqslant 1$. С другой стороны, $W(F) \leqslant p$. Без ограничения общности полагаем $A_0 = 1$ (если $A_0 = 0$, то применим линейный сдвиг; если $A_0 \notin \{0, 1\}$, то умножим функцию на константу). Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in E_p, \\ p, & x = p, 2p, \dots, (p-1)p, \\ jA_ip, & x = jp + i, \quad i, j, A_i \in E_p,\ i \neq 0. \end{cases}$$

Если $W(F) = 1$, то $F(x) = \chi_p(x)$.

Пусть $W(F) \geqslant 2$. Преобразованиями функции F с помощью элементов класса Λ_∞ будем последовательно уменьшать вес, пока не получим функцию веса 1. Рассмотрим следующие случаи.

1. Найдется такое $i_0 \in E_p \setminus \{0\}$, что $A_{i_0} \notin \{0, 1\}$. Рассмотрим функции

$$f_2(x) = x - F(x), \qquad f_3(x) = F(f_2(x)).$$

Если $x \in E_p$, то $f_2(x) = x$, $f_3(x) = F(x) = 0$.
Если $x = jp$, то $f_2(x) = 0$, $f_3(x) = F(0) = 0$.
Если же $x = jp + i$, $1 \leqslant i \leqslant p - 1$, то

$$f_2(x) = jp + i - jA_ip = i + j(1 - A_i)p \equiv i \pmod p, \quad f_3(x) = l(i, j)A_ip,$$

где $l(i, j) \in E_p$. В частности, $f_3(jp + i_0) \neq 0$. Значит, $1 \leqslant W(f_3) < W(F)$.

2. Все ненулевые значения A_i при $i \in E_p$ равны равны 1, $A_0 = 1$. Рассмотрим следующие подслучаи.

2.1. В наборе $(A_0, A_1, \dots, A_{p-1})$ единичные и нулевые значения чередуются. Тогда образуем функции

$$F'(x) = F(x) - F(x - 1), \quad F_1(x) = F'(x) - pg_p(x), \tag{6}$$

$F_2(x) = -F_1(x + 1)$ (см. таблицу).

x	0	1	$\dots$	$p-1$	p	$p+1$	$p+2$	$\dots$	$2p-2$	$2p-1$	$2p$	$\dots$	-1
$F(x)$	0	0	$\dots$	0	p	0	p	$\dots$	0	p	$2p$	$\dots$	$-p$
$F'(x)$	p	0	$\dots$	0	0	$-p$	p	$\dots$	$-p$	p	p	$\dots$	$-p$
$F_1(x)$	0	0	$\dots$	0	0	$-p$	p	$\dots$	$-p$	p	0	$\dots$	$-p$
$F_1(x+1)$	0	0	$\dots$	0	$-p$	p	$-p$	$\dots$	p	0	$-2p$	$\dots$	0
$F_2(x)$	0	0	$\dots$	0	p	$-p$	p	$\dots$	$-p$	0	$2p$	$\dots$	0

Как видно из таблицы, функция F_2 удовлетворяет условию случая 1.

2.2. В наборе $(A_0, A_1, \dots, A_{p-1})$ после одной или нескольких единиц следует 0, последний элемент также равен 0: $A_0 = \dots = A_{l-1} = 1$, $A_l = 0$, $A_{p-1} = 0$, $1 \leqslant l \leqslant p-1$. Тогда функция $F'(x)$, определяемая первым из равенств (6), удовлетворяет условию случая 1, так как $F'(p) = p$, $F'(p+l) = -p$.

2.3. В наборе $(A_0, A_1, \dots, A_{p-1})$ после одной или нескольких единиц следует 0, последний элемент равен 1: $A_0 = \dots = A_{l-1} = 1$, $A_l = 0$, $A_r = A_{r+1} = \dots = A_{p-1} = 1$, $A_{r-1} = 0$, $1 \leqslant l < r \leqslant p-1$. Тогда образуем функции $F'(x), F_1(x)$ согласно (6) и $F_3(x) = F_1(x+l)$. Имеем $F_3(x) = 0$ при $x \in E_p$ и $F_3(p) = (A_l - A_{l-1})p = -p$, $F_3(p+r-l) = (A_r - A_{r-1})p = p$. Следовательно, функция $-F_3(x)$ удовлетворяет условию случая 1.

Итак, случай 2 сведен к случаю 1.

7. Отсутствие других классов

Из построения классов K_m, Λ_m следует, что других классов, расположенных в решетке между L и Λ_∞, не существует. Установим такое же свойство верхней части решетки — квадрата с вершинами Λ_∞, $S(p)$, $L(p)$, $R(p)$. При $p = 2$ это уже доказано в [24].

Утверждение 12. *При $p \geqslant 3$ не существует отличного от $L(p)$, $S(p)$ и $R(p)$ замкнутого класса, содержащего Λ_∞.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{K}$ — такой класс, $\Lambda_\infty \subseteq \mathcal{K} \subseteq R(p)$, $\mathcal{K} \neq L(p)$, $\mathcal{K} \neq S(p)$. Каждое из включений $\mathcal{K} \subseteq L(p)$, $\mathcal{K} \subseteq S(p)$ невозможно, так как класс Λ_∞ является предполным в $L(p)$ и $S(p)$. Невозможно и каждое из включений $L(p) \subseteq \mathcal{K}$, $S(p) \subseteq \mathcal{K}$, так как классы $L(p)$, $S(p)$ предполны в $R(p)$. Значит, $L(p) \nsubseteq \mathcal{K}$, $S(p) \nsubseteq \mathcal{K}$, следовательно, класс $\mathcal{K}$ содержит такие функции f_L и f_S, что $f_L(\tilde{x}) \notin L(p)$, $f_S(\tilde{x}) \notin S(p)$. Из $f_L(\tilde{x})$ подстановкой констант получим одноместную функцию $f_1(x) \in R(p) \setminus L(p)$. Рассмотрим ее значения $y_j = f_1(j)$ при $j \in E_p$. Вычитанием линейных функций и функций $pg_p(x-a)$, $a \in E_p$, добьемся выполнения условий $y_j \in E_p$, $y_0 = y_1 = 0$. Если $y_2 = \dots = y_{p-1} = 0$, то все значения функции f_1 кратны p. Из условия $f_1 \notin L(p)$ получаем, что $f_1 \in S(p) \setminus \Lambda_\infty$. Тогда класс $\mathcal{K}$ содержит $S(p)$, что невозможно. Следовательно, найдется такое j, $2 \leqslant j \leqslant p-1$, что y_j не кратно p. Рассмотрим функцию $F(x) = f_1(x^p)$. Она p-периодична в силу p-периодичности x^p. Кроме того, $F(0) = F(1) = 0$, $F(j) = y_j$, $(y_j, p) = 1$. Вычитая из $F(x)$ функции $pg_p(x-a)$, $a \in E_p$, получим p-периодическую функцию $H(x)$, все значения которой принадлежат E_p.

Эта функция не принадлежит $S(p)$ и, следовательно, Λ_∞. Значит, $H(x) \in L(p) \setminus \Lambda_\infty$. Применяя лемму 4, приходим к выводу, что $[\mathcal{K} \cup \{H\}] = L(p)$, а это невозможно.

Из всех доказанных утверждений следует главный результат.

Теорема 1. *При* $k = p^2$ *все замкнутые классы, находящиеся между* $Polyn$ *и* L, *образуют решетку, изображённую на рис.* 2.

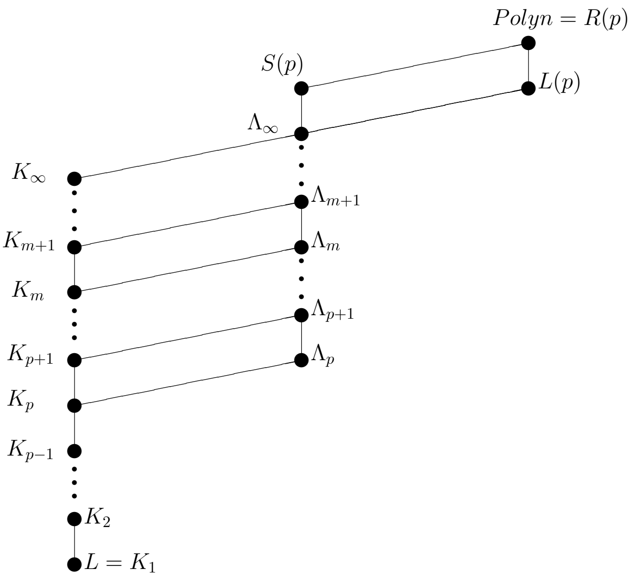

Рис. 2.

Список литературы

1. Янов Ю. И., Мучник А. А., “О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса”, *Докл. АН СССР*, **127**:1 (1959), 44-46.
2. Post E. L., “The two-valued iterative systems of mathematical logic”, Ann. Math. Stud., **5**, Princeton Univ. Press, Princeton–London, 1941.
3. Kempner A. J., “Polynomials and their residue systems”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **22**:4 (1921), 240–266.
4. Redei L., Szele T., “Algebraisch-Zahlentheoretische Betrachtungen über Ringe. II”, *Acta Math.*, **82** (1950), 209–241.
5. Keller G., Olson F. R., “Counting polynomial functions $\pmod{p^n}$”, *Duke Math. J.*, **35**:4 (1968), 835–838.
6. Айзенберг Н. Н., Семйон И. В., Циткин А. И., “Мощность класса функций k-значной логики от n переменных, представимых полиномами по модулю k”, *В кн.*: *Многоустойчивые элементы и их применение*, М.: Сов. радио,, 1971, 79–83.
7. Singmaster D., “On polynomial functions $\pmod{m}$”, *J. Number Th.*, **6**:5 (1974), 345–352.
8. Carlitz L., “Functions and polynomials $\pmod{p^n}$”, *Acta Arithm.*, **9** (1964), 66–78.
9. Айзенберг Н. Н., Семйон И. В., “Некоторые критерии представимости функций k-значной логики полиномами по модулю k”, *В кн.*: *Многоустойчивые элементы и их применение*, М.: Сов. радио, 1971, 84–88.

10. Rosenberg I. G., “Polynomial functions over finite rings”, *Glasnik Matematiki*, **10**:1 (1975), 25–33.
11. Мещанинов Д. Г., “Некоторые условия представимости функций из P_k полиномами по модулю k”, *Докл. АН СССР*, **299**:1 (1988), 50–53.
12. Мещанинов Д. Г., “О вторых p-разностях функций p^α-значной логики”, *Дискрет. матем.*, **4**:4 (1992), 131–139; англ. пер.: Meshchaninov D. G., “On the second p-differences of functions of p^α-valued logic”, *Discrete Math. Appl.*, **3**:6 (1993), 611–621.
13. Ремизов А. Б., “О надструктуре замкнутого класса полиномов по модулю k”, *Дискрет. матем.*, **1**:1 (1989), 3–15; англ. пер.: Remizov A. B., “Superstructure of the closed class of polynomials modulo k”, *Discrete Math. Appl.*, **1**:1 (1991), 9–22.
14. Мещанинов Д. Г., “Метод построения полиномов для функций k-значной логики”, *Дискрет. матем.*, **7**:3 (1995), 48–60; англ. пер.: Meshchaninov D. G., “A method for constructing polynomials of k-valued logic functions”, *Discrete Math. Appl.*, **5**:4 (1995), 333–346.
15. Селезнева С. Н., “Быстрый алгоритм построения для k-значных функций полиномов по модулю k при составных k”, *Дискрет. матем.*, **23**:3 (2011), 3–22; англ. пер.: Selezneva S. N., “A fast algorithm for the construction of polynomials modulo k for k-valued functions for composite k”, *Discrete Math. Appl.*, **21**:5-6 (2011), 651–674.
16. Черепов А. Н., *Надструктура класса сохранения отношений сравнения в k-значной логике по всем модулям-делителям k*, Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., М., 1986.
17. Нечаев А. А., “Критерий полноты систем функций p^n-значной логики, содержащих операции сложения и умножения по модулю p^n”, *Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач*,, 1980, № 34, 74–89.
18. Черепов А. Н., “Описание структуры замкнутых классов в P_k, содержащих класс полиномов”, *Проблемы кибернетики*, 1983, № 40, 5–18.
19. Мещанинов Д. Г., “О некоторых свойствах надструктуры класса полиномов в P_k”, *Матем. заметки*, **44**:5 (1988), 673–681; англ. пер.: Meshchaninov D. G., “Superstructures of the class of polynomials in P_k”, *Math. Notes*, **44**:5 (1988), 950–954.
20. Гаврилов Г. П., “О надструктуре класса полиномов в многозначных логиках”, *Дискрет. матем.*, **8**:3 (1996), 90–97; англ. пер.: Gavrilov G. P., “On the superstructure of the class of polynomials in multivalued logics”, *Discrete Math. Appl.*, **6**:4 (1996), 405–412.
21. Гаврилов Г. П., “О замкнутых классах многозначной логики, содержащих класс полиномов”, *Дискрет. матем.*, **9**:2 (1997), 12–23; англ. пер.: Gavrilov G. P., “On the closed classes of multivalued logic containing the polynomial class”, *Discrete Math. Appl.*, **7**:3 (1997), 231–242.
22. Заец М. В., “Классификация функций над примарным кольцом вычетов в связи с методом покоординатной линеаризации”, *Прикл. дискрет. математика. Приложение*, 2014, № 7, 16–19.
23. Заец М. В., “О классе вариационно-координатно-полиномиальных функций над примарным кольцом вычетов”, *Прикл. дискрет. математика*, 2014, № 3(25), 12–27.
24. Крохин А. А., Сафин К. Л., Суханов Е. В., “О строении решетки замкнутых классов полиномов”, *Дискрет. матем.*, **9**:2 (1997), 24–39; англ. пер.: Krokhin A. A., Safin K. L., Sukhanov E. V., “On the structure of the lattice of closed classes of polynomials”, *Discrete Math. Appl.*, **7**:2 (1997), 131–146.
25. Salomaa A. A., “On infinetely generated sets of operations in finite algebra”, *Ann. Univ. Turku, Ser. A, I*, 1964, № 74, 1–12.
26. Bagyinszki J., Demetrovics J., “The lattice of linear classes in prime-valued logics”, *Discrete mathematics*, 1982, № 7, 105–123.
27. Szendrei Á., “On closed sets of linear operations over a finite sets of square-free cardinality”, *Elektr. Inform. Kybern.*, 1978, № 14, 547–559.

28. Szendrei Á., “On closed classes of quasilinear functions”, *Czechoslov. Math. J.*, 1980, № 80, 498–509.
29. Lau D., “Uber abgeschlossenen Mengen linearen Funktionen in mehrvertigen Logiken”, *J. Inf. Proccess. Cybern. EIK*, **24**:7/8 (1988), 367–381.
30. Lau D., B. Schröder, “On the number of closed subsets of linear functions in 6-valued logic”, *Beiträge zur Alg. und Geom.*, 1990, № 31, 19–32.
31. Lau D., “Kongruenzen auf abgeschlossenen Mengen linearen Funktionen in mehrvertigen Logiken”, *Rostock Math. Kolloq.*, 1990, № 43, 3–16.
32. Bulatov A. A., “Polynomial reducts of modules, I. Rough classification”, *Mult.-Valued Log.*, **33**:2 (1998), 135–154.
33. Lau D., *Function algebras on finite sets*, Springer-Verlag, 2006, 668 pp.
34. Семигродских А. П., Суханов Е. В., “О замкнутых классах полиномов над конечными полями”, *Дискрет. матем.*, **9**:4 (1997), 50–62; англ. пер.: Semigrodskikh A. P., Sukhanov E. B., “On closed classes of polynomials over finite fields”, *Discrete Math. Appl.*, **7**:6 (1997), 593–606.
35. Дарсалия В. Ш., “Условия полноты для полиномов с натуральными, целыми и рациональными коэффициентами”, *Фунд. и прикл. матем.*, **2**:2 (1996), 365–374.
36. А. И. Мамонтов, "Исследование структуры замкнутых классов в функциональной системе линейных полиномов с целыми неотрицательными коэффициентами", Вестник МЭИ, 6 (2006), 83–90
37. Мамонтов А. И., Мещанинов Д. Г., “Проблема полноты в функциональной системе линейных полиномов с целыми коэффициентами”, *Дискрет. матем.*, **22**:4 (2010), 64–82; англ. пер.: Mamontov A. I., Meshchaninov D. G., “The completeness problem in the function algebra of linear integer-coefficient polynomials”, *Discrete Math. Appl.*, **20**:5-6 (2010), 621–641.
38. Мамонтов А. И., “Проблема относительной полноты в функциональной системе линейных полиномов с рациональными коэффициентами”, *Вестник МЭИ*, 2011, № 6, 133–142.
39. Мещанинов Д. Г., Никитин И. В., “Функционально замкнутые классы полиномов, сохраняющих некоторые эквивалентности на числовых множествах”, *Вестник МЭИ*, 2011, № 6, 14–23.
40. Мещанинов Д. Г., Никитин И. В., “Классы сохранения пороговых разбиений в функциональных системах полиномов”, *Вестник МЭИ*, 2012, № 6, 132–141.
41. Алексиадис Н. Ф., “Функциональная система полиномов с натуральными коэффициентами”, *Вестник МЭИ*, 2013, № 6, 125–140.
42. Мещанинов Д. Г., Никитин И. В., “Классы полиномов, сохраняющих разбиения области определения на промежутки равной длины”, *Вестник МЭИ*, 2013, № 6, 147–153.
43. Мамонтов А. И., Мещанинов Д. Г., “Алгоритм распознавания полноты в функциональной системе $L(\mathbb{Z})$”, *Дискрет. матем.*, **26**:1 (2014), 85–95; англ. пер.: Mamontov A. I., Meshchaninov D. G., “The algorithm for completeness recognizing in function algebra $L(\mathbb{Z})$”, *Discrete Math. Appl.*, **24**:1 (2014), 21–28.
44. Мещанинов Д. Г., Никитин И. В., “Классы полиномов, сохраняющих обобщенные точечные разбиения бесконечной области определения Междунар. научно-исслед. журнал,”, 2015, № 9-3(40), 75–79.
45. Мещанинов Д. Г., “О первых d-разностях функций k-значной логики”, *Матем. вопросы кибернетики*, 1998, № 7, 265–280.
46. Мещанинов Д. Г., “О замкнутых классах k-значных функций, сохраняющих первые d-разности”, *Матем. вопросы кибернетики*, 1999, № 8, 219–230.
47. Мещанинов Д. Г., “О замкнутых классах полиномов над кольцом Z_k”, Труды IX Междунар. конф. "Дискретные модели в теории управляющих систем" (20–22 мая 2015 г.), 2015, 161–163.

Статья поступила 05.05.2017.