Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. В. Кочергин, А. В. Михайлович, О минимальном числе отрицаний при реализации систем функций многозначной логики, *Дискрет. матем.*, 2016, том 28, выпуск 4, 80–90

DOI: 10.4213/dm1394

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 3.139.240.239
28 декабря 2024 г., 18:21:17

Дискретная математика

том 28 выпуск 4 * 2016

УДК 519.714 DOI 10.4213/dm1394

О минимальном числе отрицаний при реализации систем функций многозначной логики

© 2016 г. В. В. Кочергин*, А. В. Михайлович**

Рассматривается задача о сложности реализации функций k-значной логики схемами в бесконечных полных базисах, содержащих все монотонные функции; вес монотонных функций (стоимость использования) считается равным 0. Для сложности реализации булевых функций в случае, когда единственным немонотонным элементом базиса является отрицание, исчерпывающее описание было получено А. А. Марковым. В 1957 году он установил, что минимальное число отрицаний, достаточное для реализации произвольной булевой функции f (инверсионная сложность функции f), равно $\lceil \log_2(d(f)+1) \rceil$, где $d(f)$ — максимальное (максимум берется по всем возрастающим цепям наборов значений переменных) число изменений значений функции с бóльшего значения на меньшее. В данной работе этот результат обобщен на случай вычисления функций k-значной логики. Установлено, что минимальное число отрицаний, достаточное для вычисления произвольной функции k-значной логики f, равно $\lceil \log_2(d(f)+1) \rceil$, если под отрицанием понимается отрицание Поста (т. е. функция $x+1 \pmod k$), и равно $\lceil \log_k(d(f)+1) \rceil$, если под отрицанием понимается отрицание Лукасевича (т. е. функция $k-1-x$). Также получено аналогичное обобщение другого классического результата А. А. Маркова — об инверсионной сложности систем булевых функций — на случай систем функций k-значной логики.

Ключевые слова: Ключевые слова. Функции многозначной логики, логические схемы, схемная сложность, немонотонная сложность, инверсионная сложность, теорема Маркова

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

В работе исследуется обобщение задачи об инверсионной сложности [4, 5] систем булевых функций на случай систем функций многозначной логики.

Пусть P_k — множество всех функций k-значной логики, M — класс всех функций из P_k, монотонных относительно порядка $0 < 1 < \ldots < k-1$.

*МГУ им. М. В. Ломоносова, ИТПМ им. Н. Н. Боголюбова МГУ, e-mail: vvkoch@yandex.ru

**НИУ ВШЭ, e-mail: anna@mikhaylovich.com

Будем изучать сложность реализации функций k-значной логики схемами из функциональных элементов [3] (другие встречающиеся в литературе названия: логические схемы, схемы вычислений, комбинационные схемы [7]) над базисами B, имеющими вид

$$B = M \cup \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}, \quad \omega_i \in P_k \setminus M, \ i = 1, \ldots, p,$$

причем функциям из множества M приписаны нулевые веса, а функциям $\omega_1, \ldots, \omega_p$ — ненулевые (как правило, единичные).

Определим *немонотонную сложность* $I_B(S)$ *схемы* S *над базисом* B стандартным образом как суммарный вес элементов схемы S. В силу того, что монотонные функции входят в базис B с нулевым весом, $I_B(S)$ — это сумма весов немонотонных элементов схемы S, т. е. элементов, которым приписаны немонотонные функции базиса. В случае, когда все немонотонные функции базиса имеют одинаковый вес, который без ограничения общности можно считать единичным, величина $I_B(S)$ равна числу немонотонных элементов схемы S.

Немонотонную сложность над базисом B функции k-значной логики f (системы функций F) определим как минимальную немонотонную сложность схем, вычисляющих над базисом B функцию f (систему функций F). Для немонотонной сложности функции f (системы функций F) будем использовать обозначение $I_B(f)$ (соответственно, $I_B(F)$).

Нас в первую очередь будет интересовать немонотонная сложность над двумя естественными базисами $B_P = M \cup \{N_P(x)\}$ и $B_L = M \cup \{N_L(x)\}$, где $N_P(x)$ — отрицание Поста, т. е. функция $x + 1 \pmod k$, а $N_L(x)$ — отрицание Лукасевича, т. е. функции $k - 1 - x$.

Точное значение инверсионной сложности (немонотонной сложности над булевым базисом $B_0 = M \cup \{\overline{x}\}$) произвольной булевой функции или системы булевых функций было получено А. А. Марковым [4, 5] (формулировка этого результата будет дана ниже). Асимптотика роста немонотонной сложности над произвольным булевым базисом описанного вида установлена в [2, 12]. Точное значение инверсионной сложности произвольной булевой функции в случае реализации схемами без ветвления выходов элементов (формулами) было найдено Э. И. Нечипоруком [6] (существенно позднее этот результат был «переоткрыт» в [14, 15]). Отметим также работы [1, 8–10, 16–18], имеющие непосредственное отношение к инверсионной сложности. В данной работе изложение обобщений классических результатов Маркова об инверсионной сложности на случай реализации функций k-значной логики, в целом, соответствует изложению теорем Маркова в [11]. Предварительным вариантом работы является препринт [13].

Дадим необходимые определения.

Обозначим множество $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ через E_k. Последовательность

$$\tilde{\alpha}_1 = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}), \ \tilde{\alpha}_2 = (\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2n}), \ \ldots, \ \tilde{\alpha}_r = (\alpha_{r1}, \ldots, \alpha_{rn})$$

наборов из множества E_k^n назовем *возрастающей цепью относительно порядка* $0 < 1 < \ldots < k-1$ или просто *цепью*, если все наборы $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_r$ различны и выполняются неравенства

$$\alpha_{ij} \leqslant \alpha_{i+1,j}, \quad i = 1, \ldots, r-1, \ \ j = 1, \ldots, n.$$

Наборы $\tilde{\alpha}_1$ и $\tilde{\alpha}_r$ будем называть *началом* и *концом* этой цепи соответственно.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция k-значной логики. Упорядоченную пару наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in E_k^n$, будем называть *обрывом для функции* f, если выполнены условия:

1) $\alpha_j \leqslant \beta_j, \;\; j = 1, \ldots, n$;

2) $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$.

Обрывом для системы функций будем называть любую пару наборов, являющуюся обрывом хотя бы для одной функции системы.

Пусть $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$, $m \geqslant 1$, — система функций k-значной логики от переменных $x_1, \ldots x_n$, а C — цепь, имеющая вид

$$\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_r.$$

Под *падением* $d_C(F)$ *системы* F *на цепи* C будем понимать число обрывов для системы F на парах вида $(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_{i+1})$.

Спад $d(F)$ системы F определим равенством $d(F) = \max d_C(F)$, где максимум берется по всем цепям C.

Введенные определения позволяют дать аккуратную формулировку результата А. А. Маркова об инверсионной сложности [4, 5]: для любой конечной системы F булевых функций выполняется равенство

$$I_{B_0}(F) = \lceil \log_2(d(F) + 1) \rceil .$$

В общем случае для немонотонной сложности систем булевых функций справедливо такое утверждение [2, 12]: для любого базиса B, имеющего вид $B = M \cup \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$, $\omega_i \in P_2 \setminus M$, $i = 1, \ldots, p$, где все монотонные функции имеют нулевой вес, а функции $\omega_1, \ldots, \omega_p$ — положительные веса $\rho_1, \ldots, \rho_p$ соответственно, найдется такая константа $c(B)$, что для любой системы F булевых функций выполняются неравенства

$$\rho_B \lceil \log_2(d(F) + 1) \rceil - c(B) \leqslant I_B(F) \leqslant \rho_B \lceil \log_2(d(F) + 1) \rceil ,$$

где $\rho_B = \min\{\rho_1, \ldots, \rho_p\}$. При этом для любого заданного значения N найдутся базис B_N и функция g_N, для которых справедливо неравенство

$$\lceil \log_2(d(g_N) + 1) \rceil - \frac{I_{B_N}(g_N)}{\rho_{B_N}} > N.$$

Теперь сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 1. *Для любой конечной системы* F *функций* k*-значной логики справедливы равенства*

$$I_{B_P}(F) = \lceil \log_2(d(F) + 1) \rceil , \qquad I_{B_L}(F) = \lceil \log_k(d(F) + 1) \rceil .$$

Нижние и верхние оценки этого утверждения будут следовать из соответствующих теорем, доказываемых в следующих двух разделах для произвольных базисов описанного выше вида в предположении, что все немонотонные функции рассматриваемых базисов имеют единичный вес. Отметим, что при $k = 2$ каждое из равенств теоремы 1 превращается в равенство из теоремы Маркова.

2. Нижняя оценка

Пусть в базисе B, имеющем вид $B = M \cup \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$, $\omega_i \in P_2 \setminus M$, $i = 1, \ldots, p$, функциям $\omega_1, \ldots, \omega_p$ приписаны единичные веса. Положим

$$D(B) = \max\{d(\omega_1), \ldots, d(\omega_p)\}.$$

Теорема 2. *Для любой конечной системы F функций k-значной логики справедливо неравенство*

$$I_B(F) \geqslant \left\lceil \log_{D(B)+1}(d(F)+1) \right\rceil.$$

Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Для любой конечной системы F функций k-значной логики справедливо неравенство*

$$d(F) \leqslant (D(B)+1)^{I_B(F)} - 1.$$

Доказательство. Пусть $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$, $m \geqslant 1$, — система функций k-значной логики от переменных $x_1, \ldots x_n$. Проведем индукцию по величине $I_B(F)$.

Если $I_B(F) = 0$, то все функции системы F монотонны. Следовательно, $d(F) = 0$.

Пусть для любой системы функций G, для которой справедливо соотношение $I_B(G) \leqslant I_B(F) - 1$, утверждение леммы выполняется. Рассмотрим произвольную схему S со входами $x_1, \ldots, x_n$, реализующую систему функций F и содержащую ровно $I_B(F)$ элементов единичного веса. В этой схеме выделим первый (относительно некоторой правильной монотонной нумерации) такой элемент и обозначим его E. Элементу E соответствует (приписана) q-местная функция ω из множества $\{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$, а на входы этого элемента подаются монотонные функции $h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_q(x_1, \ldots, x_n)$. Переделаем схему S, удалив из нее элемент E, создав вместо него еще один вход схемы, на который подадим переменную y. Полученная таким перестроением схема S' реализует систему функций $G = \{g_1, \ldots, g_m\}$, причем для $i = 1, \ldots, m$ выполняются условия

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = g_i\left(\omega(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_q(x_1, \ldots, x_n)), x_1, \ldots, x_n\right).$$

Кроме того, справедливо неравенство $I_B(G) \leqslant I_B(F) - 1$.

Пусть цепь

$$C = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_r)$$

имеет падение $d(F)$.

Рассмотрим последовательность C' наборов длины $n+1$:

$$(\omega(h_1(\tilde{\alpha}_1), \ldots, h_q(\tilde{\alpha}_1)), \tilde{\alpha}_1), \ldots, (\omega(h_1(\tilde{\alpha}_r), \ldots, h_q(\tilde{\alpha}_r)), \tilde{\alpha}_r).$$

Последовательность C', вообще говоря, не является цепью, однако, ее можно так разбить на p участков (идущих подряд элементов последовательности C') $C'_1, \ldots, C'_p$, что каждая из последовательностей наборов C'_j, $j = 1, \ldots, p$, является цепью, и p удовлетворяет условиям $1 \leqslant p \leqslant D(B) + 1$.

По предположению индукции для всех j, $j = 1, \ldots, p$, выполняются соотношения

$$d_{C'_i}(G) \leqslant d(G) \leqslant (D(B)+1)^{I_B(G)} - 1 = (D(B)+1)^{I_B(F)-1} - 1.$$

Теперь, учитывая что справедливы равенства

$$f_i(\tilde{\alpha}) = g_i\left(\omega(h_1(\tilde{\alpha}), \dots, h_q(\tilde{\alpha})), \tilde{\alpha}\right), \quad i = 1, \dots, m,$$

получаем:

$$d_C(F) \leqslant \sum_{i=1}^{p} d_{C_i'}(G) + p - 1 \leqslant \sum_{i=1}^{p}((D(B)+1)^{I_B(F)-1} - 1) + p - 1 \leqslant (D(B)+1)^{I_B(F)} - 1.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Из леммы 1 вытекает оценка

$$d(F) \leqslant (D(B)+1)^{I_B(F)} - 1,$$

а из неё и целочисленности величины $I_B(F)$ следует требуемая нижняя оценка. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Оценка из теоремы 2 не может претендовать на неулучшаемость для любых базисов рассматриваемого вида и произвольных систем функций даже при $k = 2$. Действительно, система булевых функций $\{\overline{x}, \overline{y}\}$ не может иметь сложность 1 ни в каком базисе, так как иначе в единственном немонотонном элементе будет реализовываться какая-то функция от двух переменных, которая имеет спад, в точности равный единице (как немонотонная функция от двух переменных), в то время как спад системы равен двум.

3. Верхняя оценка

Переходя к получению верхних оценок, введем следующее понятие. Для упорядоченного набора функций k-значной логики $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_s(x_1, x_2, \dots, x_n)$ назовем *s-переключателем* функций $f_1, \dots, f_s$ любую функцию k-значной логики $g(z_1, \dots, z_s, x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{array}{rcl} g(1, 0, \dots, 0, x_1, x_2, \dots, x_n) & = & f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ g(0, 1, \dots, 0, x_1, x_2, \dots, x_n) & = & f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ & . \quad . \quad . & \\ g(0, \dots, 0, 1, x_1, x_2, \dots, x_n) & = & f_s(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{array}$$

Для множества упорядоченых наборов по s функций каждый *s-переключателем* этого множества будем называть множество s-переключателей наборов функций из данного множества (по одному s-переключателю на каждый набор из s функций).

Лемма 2. *Пусть базис B имеет следующий вид*: $B = M \cup \{\omega(x_1, \dots, x_q)\}$, *где* $\omega \in P_k \setminus M$, $q \geqslant 1$. *Тогда для любого множества* $\{(f_{11}, \dots f_{s1}), \dots, (f_{1m}, \dots, f_{sm})\}$ *упорядоченных наборов функций k-значной логики найдется s-переключатель G этого множества наборов, удовлетворяющий условию*

$$I_B(G) \leqslant \max\{I_B(F_1), \dots, I_B(F_s)\},$$

где $F_i = \{f_{i1}, \dots, f_{im}\}$, $i = 1, \dots, s$.

Доказательство. Проведем индукцию по величине $r = \max\{I_B(F_1), \ldots, I_B(F_s)\}$.

Если $r = 0$, то множества функций F_i, $i = 1, \ldots, s$, монотонны. Тогда в качестве искомого множества функций G можно взять множество

$$\{g_j \mid g_j = \max(\min(\varphi(z_1), f_{1j}), \ldots, \min(\varphi(z_s), f_{sj})),\ j = 1, \ldots, m\},$$

где функция $\varphi(z)$ равна $k-1$ для всех ненулевых значений z и $\varphi(0) = 0$.

Шаг индукции. Для $i = 1, \ldots, s$, обозначим через $S_i(\tilde{x})$ некоторую схему со входами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, реализующую систему функций F_i и содержащую $\max\{I_B(F_i), 1\}$ элементов, соответствующих базисной функции ω. В схеме $S_i(\tilde{x})$ выделим первый (относительно некоторой правильной монотонной нумерации) элемент, соответствующий базисной функции ω. Пусть на его вход подаются монотонные функции $h_{i1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, h_{iq}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Обозначим через $S_i(y, \tilde{x})$ схему со входами $y, x_1, x_2, \ldots, x_n$, получающуюся из схемы $S_i(\tilde{x})$ путем замены выделенного элемента новым входом y, а через $f'_{ij}(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $j = 1, \ldots, m$, — функции, вычисляемые схемой $S_i(y, \tilde{x})$. Тогда

$$\begin{aligned} &f_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ &\qquad = f'_{ij}(\omega(h_{i1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, h_{iq}(x_1, x_2, \ldots, x_n)), x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\qquad\qquad j = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Положим $F'_i = \{f'_{i1}, \ldots, f'_{im}\}$. Так как $I_B(F'_i) \leqslant r-1$, $i = 1, \ldots, s$, то по предположению индукции найдется такое множество функций

$$G' = \{g'_j(z_1, \ldots, z_s, y, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid j = 1, \ldots, m\},$$

что

$$I_B(G') \leqslant \max\{I_B(F'_1), \ldots, I_B(F'_s)\} \leqslant r-1,$$

$$\begin{aligned} g'_j(1, 0, \ldots, 0, y, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f'_{1j}(y, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, m, \\ g'_j(0, 1, \ldots, 0, y, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f'_{2j}(y, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, m, \\ &\ \ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ g'_j(0, 0, \ldots, 1, y, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f'_{sj}(y, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Теперь в функции $g'_j(z_1, \ldots, z_s, y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $j = 1, \ldots, m$, вместо переменной y подставим функцию

$$\begin{aligned} &Y(z_1, \ldots, z_s, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ &\ = \omega(\max(\min(\varphi(z_1), h_{11}(x_1, x_2, \ldots, x_n)), \ldots, \min(\varphi(z_s), h_{s1}(x_1, x_2, \ldots, x_n))), \ldots, \\ &\qquad \max(\min(\varphi(z_1), h_{1q}(x_1, x_2, \ldots, x_n)), \ldots, \min(\varphi(z_s), h_{sq}(x_1, x_2, \ldots, x_n)))). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} Y(1, 0, \ldots, 0, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \omega(h_{11}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, h_{1q}(x_1, x_2, \ldots, x_n)), \\ Y(0, 1, \ldots, 0, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \omega(h_{21}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, h_{2q}(x_1, x_2, \ldots, x_n)), \\ &\ \ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Y(0, 0, \ldots, 1, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \omega(h_{s1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, h_{sq}(x_1, x_2, \ldots, x_n)), \end{aligned}$$

получаем, что для $j = 1, \ldots, m$ функция

$$g_j(z_1, \ldots, z_s, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= g'_j(z_1, \ldots, z_s, Y(z_1, \ldots, z_s, x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

является s-переключателем набора функций $f_{1j}, \ldots, f_{sj}$. Кроме того, для множества $G = \{g_1, \ldots, g_m\}$ выполняются неравенства $I_B(G) \leqslant 1 + I_B(G') \leqslant r$. Лемма 2 доказана.

Введем еще одну характеристику для базисов рассматриваемого вида.

Для произвольной функции k-значной логики $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и произвольной цепи $C = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_r)$ наборов из E_k^n определим величину $u_C(f)$ как наибольшую длину t подпоследовательности $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \ldots, \tilde{\beta}_t$ последовательности C, удовлетворяющей условию $f(\tilde{\beta}_1) > f(\tilde{\beta}_2) > \ldots > f(\tilde{\beta}_t)$.

Теперь определим *инверсионную силу $u(f)$ функции f* равенством $u(f) = \max u_C(f)$, где максимум берется по всем цепям C наборов из E_k^n. Очевидно, что для любой функции f выполняются соотношения $1 \leqslant u(f) \leqslant d(f)+1$, при этом если функция f не является монотонной, то справедливо неравенство $u(f) \geqslant 2$.

Пусть в базисе B, имеющем вид $B = M \cup \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$, $\omega_i \in P_2 \setminus M$, $i = 1, \ldots, p$, функциям $\omega_1, \ldots, \omega_p$ приписан единичный вес. Тогда равенством $u(B) = \max u(f)$, где максимум берется по всем функциям f из базиса B, введем величину $u(B)$ — *инверсионную силу базиса B*.

Теорема 3. *Для любой конечной системы F функций k-значной логики справедливо неравенство*

$$I_B(F) \leqslant \lceil \log_{u(B)}(d(F)+1) \rceil.$$

Доказательство. Пусть $u(B) = s$. Выберем в базисе B функцию $\omega(x_1, \ldots, x_q)$, удовлетворяющую условию $u(\omega) = s$. Положим $B' = M \cup \{\omega(x_1, \ldots, x_q)\}$. В силу очевидного соотношения $I_{B'}(F) \geqslant I_B(F)$ достаточно установить неравенство $I_{B'}(F) \leqslant \lceil \log_s(d(F)+1) \rceil$, которое будем доказывать индукцией по величине $R(F) = \lceil \log_s(d(F)+1) \rceil$.

Если $R(F) = 0$, то $d(F) = 0$ и, следовательно, все функции системы F монотонны. Поэтому $I_B(F) = 0$.

Пусть для любой системы функций G, для которой справедливо соотношение $R(G) \leqslant R(F) - 1$, утверждение леммы выполняется.

Обозначим через T_1 множество k-значных наборов длины n, обладающих тем свойством, что для любой цепи C с концом в таком наборе выполняется неравенство $d_C(F) < s^{R(F)-1}$, т. е.

$$T_1 = \{\tilde{\alpha} \in E_k^n \mid d_C(F) < s^{R(F)-1} \text{ для любой цепи } C \text{ с концом } \tilde{\alpha}\}.$$

Далее, для $i = 2, \ldots, s-1$ обозначим через T_i множество k-значных наборов длины n, обладающих тем свойством, что для любой цепи C наборов из множества $E_k^n \setminus (T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1})$ с концом в таком наборе выполняется неравенство $d_C(F) < s^{R(F)-1}$, т. е.

$$T_i = \{\tilde{\alpha} \in E_k^n \setminus (T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1}) \mid d_C(F) < s^{R(F)-1}$$
$$\text{для любой цепи } C \text{ с концом } \tilde{\alpha},\ C \subset E_k^n \setminus (T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1})\}.$$

Наконец, положим

$$T_s = E_k^n \setminus (T_1 \cup \ldots \cup T_{s-1}).$$

Отметим, что если $\tilde{\alpha} \in T_i$ и $\tilde{\beta} \prec \tilde{\alpha}$, то $\tilde{\beta} \in T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1}$, $i = 1, \ldots, s$.

Теперь докажем, что для любой цепи C наборов из множества T_s также выполняется неравенство $d_C(F) < s^{R(F)-1}$. Действительно, предположив противное, получаем, что существует цепь C_s с началом в наборе $\tilde{\alpha}_s$, $\tilde{\alpha}_s \in T_s$, для которой выполняется неравенство $d_{C_s}(F) \geqslant s^{R(F)-1}$. С другой стороны, так как набор $\tilde{\alpha}_s$ не лежит в множестве T_{s-1}, то найдется цепь C_{s-1} с началом в наборе $\tilde{\alpha}_{s-1}$, $\tilde{\alpha}_{s-1} \in T_{s-1}$, и с концом в наборе $\tilde{\alpha}_s$, $\tilde{\alpha}_s \in T_s$, для которой выполняется неравенство $d_{C_{s-1}}(F) \geqslant s^{R(F)-1}$. Аналогично, последовательно для $i = s-2, \ldots, 1$ устанавливаем существование цепи C_i с началом в наборе $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\alpha}_i \in T_i$, и с концом в наборе $\tilde{\alpha}_{i+1}$, $\tilde{\alpha}_{i+1} \in T_{i+1}$, для которой выполняется неравенство $d_{C_i}(F) \geqslant s^{R(F)-1}$.

Тогда для цепи $C = C_1 \cup \ldots \cup C_s$ справедливы соотношения

$$d_C(F) = d_{C_1}(F) + \ldots + d_{C_s}(F) \geqslant s\left(s^{R(F)-1}\right) = s^{R(F)} > d(F),$$

что противоречит определению величины $d(F)$.

Далее, для каждой функции f_j из множества $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ положим

$$f_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1}, \\ f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), & \text{если } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_i, \\ k-1, & \text{если } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_{i+1} \cup \ldots \cup T_s, \end{cases}$$

$i = 1, \ldots, s$.

Теперь введем обозначения

$$F_i = \{f_{ij} \mid f_j \in F\}, \quad i = 1, \ldots, s.$$

В силу определения множеств F_i выполняются неравенства $d(F_i) < s^{R(F)-1}$, $i = 1, \ldots, s$, и, следовательно, неравенства

$$d(F_i) \leqslant s^{R(F)-1} - 1, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Поэтому

$$R(F_i) = \lceil \log_s(d(F_i) + 1) \rceil \leqslant \lceil \log_s s^{R(F)-1} \rceil = R(F) - 1, \quad i = 1, \ldots, s.$$

В силу определения величины $s = u(\omega)$ найдется цепь

$$(\beta_{11}, \ldots, \beta_{1q}), (\beta_{21}, \ldots, \beta_{2q}), \ldots, (\beta_{s1}, \ldots, \beta_{sq}),$$

удовлетворяющая условию

$$\omega(\beta_{11}, \ldots, \beta_{1q}) > \omega(\beta_{21}, \ldots, \beta_{2q}) > \ldots > \omega(\beta_{s1}, \ldots, \beta_{sq}).$$

Функции $\xi_1, \ldots, \xi_q$ определим равенствами

$$\xi_j(x_1, \ldots, x_n) = \beta_{ij}, \quad i = 1, \ldots, s, \quad j = 1, \ldots, q,$$

справедливыми для всех наборов $(x_1, \dots, x_n)$ из множества T_i.

Далее, положим $b_i = \omega(\beta_{i1}, \dots, \beta_{iq})$, $i = 1, \dots, s$.

Теперь определим функции $\lambda_j(x)$, $j = 1, \dots, k-1$:

$$\lambda_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < j, \\ 1, & \text{если } x \geqslant j. \end{cases}$$

И, наконец, введем функции $\mu_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, s$:

$$\mu_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x_1, \dots, x_n) \in T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1}, \\ 1, & \text{если } (x_1, \dots, x_n) \in T_i \cup \ldots \cup T_s. \end{cases}$$

Отметим, что все введенные функции монотонны.

Теперь рассмотрим s-переключатель $G = \{g_j(z_1, \dots, z_s, \tilde{x}) \mid j = 1, \dots, m\}$ множества наборов функций $\{(f_{1j}(\tilde{x}), \dots, f_{sj}(\tilde{x})) \mid j = 1, \dots, m\}$, о существовании которого говорится в лемме 2.

В функции $g_j(z_1, \dots, z_s, \tilde{x})$, $j = 1, \dots, m$, вместо переменной z_i, $i = 1, \dots, s$, подставим функцию

$$Z_i(x_1, \dots, x_n) = \min\left\{\lambda_{b_i}\left(\omega(\xi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \xi_q(x_1, \dots, x_n))\right), \mu_i(x_1, \dots, x_n)\right\}.$$

Учитывая, что функция $Z_i(x_1, \dots, x_n)$ обращается в единицу на наборах из множества T_i, а на остальных наборах равна нулю, получаем, что на наборах $(x_1, \dots, x_n)$ из множества T_i справедливы равенства

$$g_j(Z_1(x_1, \dots, x_n), \dots, Z_s(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n) = \\ = f_{ij}(x_1, \dots, x_n) = f_j(x_1, \dots, x_n),$$

$i = 1, \dots, s,\ j = 1, \dots, m$.

Для реализации функций $Z_1, \dots, Z_s$ помимо использования монотонных функций потребовалось лишь однократное использование функции ω. Поэтому, учитывая предположение индукции, получаем соотношения

$$I_{B'}(F) \leqslant I_{B'}(G) + 1 \leqslant \max\{I_{B'}(F_1), \dots, I_{B'}(F_s)\} + 1 \leqslant$$

$$\leqslant \max\{\lceil \log_s(d(F_1)+1)\rceil, \dots, \lceil \log_s(d(F_s)+1)\rceil\} \leqslant \left\lceil \log_s s^{R(F)-1} \right\rceil + 1 = R(F),$$

которые завершают переход индукции. Теорема 3 доказана.

4. Заключение

В случае, когда для базиса B выполняется равенство $D(B) + 1 = u(B)$, теоремы 2 и 3 дают точное значение немонотонной сложности в базисе B для любой системы функций k-значной логики. Очевидно, что это равенство выполняется для базисов B_P и B_L, откуда и следует теорема 1.

Далее, стандартным образом определим функции Шеннона немонотонной сложности функций от n переменных и сложности систем из m функций от n переменных над базисом B:

$$I_B(n) = \max_{f \in P_k(n)} I_B(f), \quad I_B(n,m) = \max_{F=\{f_1,\dots,f_m\}:\, f_j \in P_k(n)} I_B(F).$$

Теперь положим

$$T(k,n) = (k-1)n - \left\lfloor \frac{(k-1)n}{k} \right\rfloor + 1 = (k-2)n + \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + 1.$$

Легко проверить, что величина $T(k,n)$ ровно на единицу превосходит максимально возможный спад у функций k-значной логики от n переменных.

Теорема 4. *Для любых n и m, $n \geqslant 1$, $m \geqslant 2$, справедливы равенства*

$$I_{B_P}(n) = \lceil \log_2 T(k,n) \rceil, \qquad I_{B_P}(n,m) = \lceil \log_2((k-1)n+1) \rceil;$$

$$I_{B_L}(n) = \lceil \log_k T(k,n) \rceil, \qquad I_{B_L}(n,m) = \lceil \log_k((k-1)n+1) \rceil.$$

Замечание 2. Задаче о немонотонной сложности функций многозначной логики в базисах B_P и B_L близка задача об обычной сложности (когда под сложностью $L_B(f)$ функции f понимается минимально возможное число всех элементов при реализации функции f схемами над базисом B) функций многозначной логики в бесконечных базисах B_P и B_L. При этом, если справедливость при условии $d(f) \to \infty$ равенства $L_{B_L}(f) = 2\log_k(d(f)+1) + O(1)$ непосредственно следует из достаточно просто устанавливаемого соотношения $L_{B_L}(f) = 2I_{B_L}(f) + O(1)$, то для доказательства равенства $L_{B_P}(f) = 3\log_3(d(f)+1) + O(1)$ требуется значительно более детальный анализ строения схем над базисом B_P.

Данное научное исследование (№ 14-01-0144) выполнено при поддержке Программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2014/2015 гг. Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект № 14–01–00598.

Список литературы

1. Гилберт Э. Н., “Теоретико-структурные свойства замыкающих переключательных функций”, *Кибернетический сборник*, выпуск 1, Изд-во иностранной литературы, Москва, 1960, 175–188; пер. с англ.: E. N. Gilbert, “Lattice theoretic properties of frontal switching functions”, *J. Math. Phys*, **33** (1954), 56-67.
2. Кочергин В. В., Михайлович А. В., “О сложности схем в базисах, содержащих монотонные элементы с нулевыми весами”, *Прикладная дискретная математика*, 2015, № 4 (30), 24–31.
3. Лупанов О. Б., *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*, Изд-во Московского университета, Москва, 1984.

4. Марков А. А., “Об инверсионной сложности систем функций”, *ДАН СССР*, **116**:6 (1957), 917–919; англ. пер.: Markov A. A., “On the inversion complexity of systems of functions”, *J. ACM*, **5**:4 (1958), 331–334.
5. Марков А. А., “Об инверсионной сложности систем булевых функций”, *ДАН СССР*, **150**:3 (1963), 477–479; англ. пер.: Markov A. A., “On the inversion complexity of systems of Boolean functions”, *Soviet Math. Doklady*, **4** (1963), 694–696.
6. Нечипорук Э. И., “О сложности схем в некоторых базисах, содержащих нетривиальные элементы с нулевыми весами”, *Проблемы кибернетики*, Физматгиз, Москва, 1962, 123–160.
7. Сэвидж Д. Е., *Сложность вычислений*, Факториал, Москва, 1998; пер. с англ.: Savage J. E., *The complexity of computing*, Wiley, New York, 1976.
8. Blais E., Canonne C. L., Oliveira I. C., Servedio R. A., Tan L.-Y., “Learning circuits with few negations”, Report No. 144, *Electronic Colloquium on Computational Complexity*, 2014.
9. Fischer M. J., “The complexity of negation-limited networks — a brief survey”, *Lect. Notes Comput. Sci.*, **33** (1975), 71–82.
10. Guo S., Malkin T., Oliveira I. C., Rosen A., “The power of negations in cryptography”, *Lect. Notes Comput. Sci.*, **9014** (2015), 36–65.
11. Jukna S., *Boolean Function Complexity. Advances and Frontiers*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2012.
12. Kochergin V. V., Mikhailovich A. V., *Some extensions of the inversion complexity of Boolean functions*, Cornell University Library, 2015, arXiv:1506.04485.
13. Kochergin V. V., Mikhailovich A. V., *Inversion complexity of functions of multi-valued logic*, Cornell University Library, 2015, arXiv:1510.05942.
14. Morizumi H., *A note on the inversion complexity of Boolean functions in Boolean formulas*, Cornell University Library, 2008, arXiv:0811.0699.
15. Morizumi H., “Limiting negations in formulas”, Proc. 36th ICALP, Part I, *Lect. Notes Comput. Sci.*, **5555** (2009), 701–712.
16. Morizumi H., Suzuki G., “Negation-limited inverters of linear size”, *IEICE Trans. Inf. and Syst.*, **E93-D (2)** (2011), 257–262.
17. Sung S., Tanaka K., “Limiting negations in bounded-depth circuits: an extension of Markov’s theorem”, *Lect. Notes Comput. Sci.*, **2906** (2003), 108–116.
18. Tanaka K., Nishino T., Beals R., “Negation-limited circuit complexity of symmetric functions”, *Inf. Proc. Lett.*, **59 (5)** (1996), 273–279.

Статья поступила 30.03.2016.