В. Д. Степанов, Д. Э. Эдмундс, О мере некомпактности и аппроксимативных числах одного класса вольтерровских интегральных операторов, *Докл. РАН*, 1993, том 330, номер 6, 700–703

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1993, том 330, № 6

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

О МЕРЕ НЕКОМПАКТНОСТИ И АППРОКСИМАТИВНЫХ ЧИСЛАХ ОДНОГО КЛАССА ВОЛЬТЕРРОВСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 1993 г. В. Д. Степанов, Д. Э. Эдмундс (Великобритания)

Представлено академиком С.М. Никольским 26.11.92 г.

Поступило 11.12.92 г.

В работе даются точные оценки меры некомпактности вольтерровских интегральных операторов вида

$$Kf(x) = v(x)\int_0^x k(x,y)f(y)u(y)dy, \qquad (1)$$

действующих из лебеговских пространств $L^p(R^+)$ в $L^q(R^+)$, $1 < p \le q < \infty$. Кроме этого, исследуется поведение аппроксимативных чисел $\alpha_m(K)$ оператора K, когда $K: L^2(R^+) \to L^2(R^+)$ и $k(x, y) = P_n(x - y)$, где $P_n(x)$ – полином степени n. В частности, точные оценки для $\alpha_m(K)$ установлены в случае $n = 1$ и проиллюстрированы примером с экспоненциальными весовыми функциями v и u.

1°. Предположим, что $1 \le p < \infty$, $R^+ = [0, \infty)$, и пусть $L^p(R^+)$ – лебегово пространство всех измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Мы рассматриваем интегральные операторы вида (1) такие, что u и v являются измеримыми вещественными функциями, причем v почти всюду не обращается в нуль, а неотрицательное ядро k удовлетворяет следующим двум условиям:

а) $k(x, y)$ не убывает по x или не возрастает по y при $x > y \ge 0$;

б) существует константа $D \ge 1$ такая, что

$$D^{-1}(k(x,y) + k(y,z)) \le k(x,z) \le D(k(x,y) + k(y,z)), \quad x > y > z \ge 0. \qquad (2)$$

Пусть $1 < p \le q < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ и

$$A_0(t) = \left(\int_t^\infty k(x,t)^q |v(x)|^q dx\right)^{1/q} \left(\int_0^t |u|^{p'}\right)^{1/p'},$$

$$A_1(t) = \left(\int_t^\infty |v|^q\right)^{1/q} \left(\int_0^t k(t,x)^{p'} |u(x)|^{p'} dx\right)^{1/p'},$$

$$A_0 = \sup_{t>0} A_0(t), \quad A_1 = \sup_{t>0} A_1(t), \quad A = \max(A_0, A_1).$$

Следующая теорема характеризует свойства ограниченности и компактности оператора K в лебеговских пространствах.

Теорема 1. *Пусть $1 < p \le q < \infty$. Тогда оператор K вида* (1) *с неотрицательным ядром $k(x, y)$, удовлетворяющим условиям* а), б), *ограничен из $L^p(R^+)$ в $L^q(R^+)$, если и только если $A < \infty$ и, более того,*

$$D^{-1}A \le \|K\| \le \gamma(p,q)A,$$

где $\gamma(p, q)$ зависит только от p, q и D. Кроме этого, $K: L^p(R^+) \to L^q(R^+)$ компактен, если и только если $A < \infty$ и

$$\lim_{t\to 0} A_i(t) = \lim_{t\to\infty} A_i(t) = 0; \quad i = 0, 1.$$

Замечание 1. В другой форме теорема 1 получена в [1] для ядер $k(x, y)$, имеющих оба свойства монотонности, упомянутых в условии а). В настоящей форме она анонсирована в [3] для ядер без свойств монотонности а). Доказательство теоремы 1 вместе с аналогичными результатами для случаев $1 < q < p < \infty$ и $0 < q < 1 < p < \infty$ можно найти в [4]. Частные случаи теоремы 1 исследовались во многих работах (см. [5] и литературу там же).

2°. Определим меру некомпактности оператора K по формуле

$$\alpha(K) = \inf_{\operatorname{rank} P < \infty} \|K - P\|. \qquad (3)$$

Исследование первого автора по данной работе частично финансировалось из гранта GR/H53419 Научно-инже-нерного совета Великобритании.

Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской Академии наук, Хабаровск

Математический факультет Университета Сассекса, Фолмер, Брайтон, Англия

Это определение совпадает с понятием шара (или множества) меры некомпактности K, часто обозначаемого $\tilde{\beta}(K)$ (см. [2, предложение 3.1]).

Введем обозначения:

$$J_L^0(z) = \sup_{0<t<z}\left(\int_t^z k(x,t)^q |v(x)|^q dx\right)^{1/q}\left(\int_0^t |u|^{p'}\right)^{1/p'},$$

$$J_L^1(z) = \sup_{0<t<z}\left(\int_t^z |v|^q\right)^{1/q}\left(\int_0^t k(t,x)^{p'}|u(x)|^{p'}dx\right)^{1/p'},$$

$$J_L(z) = \max(J_L^0(z), J_L^1(z)),\quad J_L = \lim_{z\to 0} J_L(z);$$

$$J_R^0(z) = \sup_{z<t<\infty}\left(\int_t^\infty k(x,t)^q |v(x)|^q dx\right)^{1/q}\left(\int_z^t |u|^{p'}\right)^{1/p'},$$

$$J_R^1(z) = \sup_{z<t<\infty}\left(\int_t^\infty |v|^q\right)^{1/q}\left(\int_z^t k(t,x)^{p'}|u(x)|^{p'}dx\right)^{1/p'},$$

$$J_R(z) = \max(J_R^0(z), J_R^1(z)),\quad J_R = \lim_{z\to\infty} J_R(z);$$

$$J = \max(J_L, J_R).$$

Следующее утверждение дает точные оценки меры некомпактности (3).

Теорема 2. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$ *и оператор* K *имеет вид* (1) *с неотрицательным ядром* $k(x, y)$, *удовлетворяющим условиям* а), б). *Если* $A < \infty$, *то*

$$D^{-1}J \le \alpha(K) \le \gamma(p,q)J.$$

Замечание 2. Теорема 2 обобщает результаты [6, 7].

3°. Напомним, что для всякого положительного целого числа n n-е аппроксимативное число оператора $T: L^p \to L^q$ определяется по формуле

$$\alpha_n(T) = \inf\{\|T - P\|;\ P: L^p \to L^q,\ \operatorname{rank} P < n\}.$$

Очевидно, что

$$\|T\| = \alpha_1(T) \ge \alpha_2(T) \ge \ldots,$$
$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n(T) = \alpha(T).$$

При $p = q$ аппроксимативные числа связаны с собственными значениями операторов, однако в общем случае эти соотношения нетривиальны; за информацией по данному вопросу мы отсылаем читателя к монографиям [8 - 11]. В частности, в [9] содержатся оценки сверху чисел $\alpha_n(K)$ при $n \to \infty$ для интегральных операторов K с ядрами, имеющими конечные смешанные $L^p(L^q)$-нормы. Упомянутые нормы могут расходиться для ядер, удовлетворяющих условию (2), однако даже в этом случае они могут порождать компактные операторы и, как показано в [12], для некоторых из них можно получить оценки аппроксимативных чисел не только сверху, но и снизу. Так, например, эта задача исследована в [12] для интегральных операторов вида (1) в случае, когда $k(x, y) = 1$. В данной статье мы обобщаем результаты [12] на операторы (1) с полиномиальными ядрами, при этом для простоты ограничиваемся случаем $p = q = 2$.

Пусть $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, $a_n \ne 0$, – полином степени n с действительными коэффициентами, и определим T как

$$Tf(x) = v(x)\int_0^x P_n(x-y)f(y)u(y)dy.$$

Для исследования аппроксимативных чисел $\alpha_n(T)$ полезно ввести несколько обозначений. Пусть $I_k = [a_k, b_k) \subset R^+$, $d\mu(x) = |v(x)|^2dx$, $\mu(I_k) = \int_{I_k} d\mu(x)$ и $\omega_{k,i}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, – последовательность функций на I_k, определяемых по индукции следующим образом:

$$\omega_{k,1}(x) = (x-a_k) - \frac{1}{\mu(I_k)}\int_{I_k}(y-a_k)\,d\mu(y),$$

$$\omega_{k,2}(x) = (x-a_k)^2 - \frac{1}{\mu(I_k)}\int_{I_k}(y-a_k)^2 d\mu(y) - $$
$$-\frac{\omega_{k,1}(x)}{\mu_1(I_k)}\int_{I_k}(y-a_k)^2\omega_{k,1}(y)d\mu(y),$$

и так далее вплоть до

$$\omega_{k,n}(x) = (x-a_k)^n - \frac{1}{\mu(I_k)}\int_{I_k}(y-a_k)^n d\mu(y) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{\omega_{k,n-1}(x)}{\mu_{n-1}(I_k)}\int_{I_k}(y-a_k)^n\omega_{k,n-1}(y)d\mu(y),$$

где

$$\mu_i(I_k) = \int_{I_k}|\omega_{k,i}(x)|^2 d\mu(x),\quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Далее положим

$$F_k f(x) = v(x)\int_{a_k}^x P_n(x-y)f(y)u(y)dy,$$

и пусть операторы Φ_k определены по формуле

$$\Phi_k f(x) = \chi_{I_k}(x)\{Tf(x) -$$
$$- v(x)\left[F_k(x) - F_{k,0} - \sum_{i=1}^n F_{k,i}\omega_{k,i}(x)\right]\},$$

где χ_{I_k} – характеристические функции интервалов I_k и

$$F_{k,0} = \frac{1}{\mu(I_k)}\int_{I_k} F_k d\mu,$$

$$F_{k,i} = \frac{1}{\mu_i(I_k)}\int_{I_k} F_k \omega_{k,i} d\mu, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Нетрудно представить $\Phi_k f$ в виде

$$\Phi_k f(x) = v(x)\chi_{I_k}(x)\sum_{j=0}^{n}(x-a_k)^j\int_0^{b_k}\rho_{k,j}(y)f(y)u(y)dy;$$

мы видим, что $\operatorname{rank}\Phi_k \le n+1$. Далее, делая разбиение R^+ на N попарно непересекающихся интервалов $I_k = [a_k, b_k)$ так, что $[0, \infty) = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$, полагаем $\Phi = \sum_{k=1}^{N}\Phi_k$. Очевидно, что $\operatorname{rank}\Phi \le N(n+1)$. Положим $T_k f = Tf - \Phi_k f$, $f \in L^2(I_k)$, и пусть

$$\|T_k\| = \sup_{\|f\|_{L^2(I_k)}=1}\left(\int_{I_k}|T_k f(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \tag{4}$$

$\|T_k\|$ – норма оператора T_k: $L^2(I_k) \to L^2(I_k)$.

Основной результат данного параграфа составляет следующая

Теорема 3. *Предположим, что* $\alpha(T) = 0$, $0 < \varepsilon < \|T\|$, *и пусть целое число* $N > 0$ *и интервалы* I_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, *выбраны так, что* $\|T_k\| = \varepsilon$ *при* $k = 1, 2, \ldots, N-1$ *и* $\|T_N\| \le \varepsilon$. *Тогда* $\varepsilon \le \alpha_N(T)$ *и* $\alpha_{(n+1)N}(T) \le \varepsilon$.

Заметим, что теорема 3 содержит неявный момент – нормы $\|T_k\|$. Заключительная часть работы посвящена нахождению явных оценок $\|T_k\|$ для случая $n = 1$ полиномов первого порядка. При $n = 0$ эта задача исследована в [12], причем в более общей ситуации, когда операторы действуют из L^p в L^q. Идея и схема доказательства теоремы 3 взяты нами из [12].

Таким образом, рассмотрим интервал $I = (a, b) \subset R^+$ и полином вида $P_1(x) = x$. Тогда

$$\Gamma_1 f(x) = v(x)\int_0^x (x-y)f(y)u(y)dy$$

и нахождение норм (4) сводится к оценке снизу и сверху нормы оператора G: $L^2(I) \to L^2(I)$, где

$$Gf(x) = v(x)\{F(x) - F_0 - \omega(x)F_1\}, \; x \in I = (a, b),$$

$$F(x) = \int_a^x (x-y)f(y)u(y)dy, \quad F_0 = \frac{1}{\mu(I)}\int_I F d\mu, \tag{5}$$

$$F_{k,i} = \frac{1}{\mu(I)}\int_I F\omega\, d\mu,$$

$$\omega(x) = \int_I (x-y)\,d\mu(y), \quad \mu_1(I) = \int_I |\omega(x)|^2 d\mu(x).$$

Заметим, что если $\mu(I) > 0$, то на интервале I существуют три точки c_1, τ, c_2 такие, что $a < c_1 < \tau < c_2 < b$, $\omega(\tau) = 0$, $\mu(a, c_1) = \mu(c_1, \tau)$ и $\mu(\tau, c_2) = \mu(c_2, b)$.

Теорема 4. *Пусть* Gf *задано формулой* (5) *и существует* $0 < \delta < 1$ *такое, что* $\mu(a, \tau) \ge \delta\mu(I)$ *и*

$$\int_a^{c_1}(c_1 - s)^2 d\mu(s) \ge \delta\mu_1(I)/\mu(I)^2,$$

$$\int_{c_2}^{b}(s - c_2)^2 d\mu(s) \ge \delta\mu_1(I)/\mu(I)^2.$$

Тогда

$$\gamma(\delta)\mathcal{A} \le \|G\| \le \mathcal{A},$$

где $\gamma(\delta)$ *зависит только от* δ *и*

$$\mathcal{A} = \sup_{a<t<c_1}\left(\int_a^t (t-y)^2 d\mu(y)\right)^{1/2}\left(\int_t^{c_1} u^2(y)dy\right)^{1/2} +$$

$$+ \sup_{a<t<c_1}\left(\int_a^t d\mu\right)^{1/2}\left(\int_t^{c_1}(y-t)^2 u^2(y)dy\right)^{1/2} +$$

$$+ \sup_{c_1<t<\tau}\left(\int_{c_1}^t (y-c_1)^2 d\mu(y)\right)^{1/2}\left(\int_t^{\tau} u^2(y)dy\right)^{1/2} +$$

$$+ \sup_{c_1<t<\tau}\left(\int_t^{\tau} d\mu\right)^{1/2}\left(\int_{c_1}^{t}(y-c_1)^2 u^2(y)dy\right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int_{\tau}^{b} d\mu\right)^{1/2}\left(\int_{c_1}^{\tau}(y-c_1)^2 u^2(y)dy\right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int_a^{c_1}(c_1-y)^2 d\mu(y)\right)^{1/2}\left(\int_{c_1}^{\tau} u^2(y)dy\right)^{1/2} +$$

$$+\sup_{c_2<t<b}\left(\int_t^b (y-t)^2 d\mu(y)\right)^{1/2}\left(\int_{c_2}^t u^2(y)dy\right)^{1/2}+$$

$$+\sup_{c_2<t<b}\left(\int_t^b d\mu\right)^{1/2}\left(\int_{c_2}^t (t-y)^2 u^2(y)dy\right)^{1/2}+$$

$$+\sup_{\tau<t<c_2}\left(\int_t^{c_2} (c_2-y)^2 d\mu(y)\right)^{1/2}\left(\int_\tau^t u^2(y)dy\right)^{1/2}+$$

$$+\sup_{\tau<t<c_2}\left(\int_\tau^t d\mu\right)^{1/2}\left(\int_t^{c_2} (c_2-y)^2 u^2(y)dy\right)^{1/2}+$$

$$+\left(\int_a^\tau d\mu\right)^{1/2}\left(\int_\tau^{c_2} (c_2-y)^2 u^2(y)dy\right)^{1/2}+$$

$$+\left(\int_{c_2}^b (y-c_2)^2 d\mu(y)\right)^{1/2}\left(\int_\tau^{c_2} u^2(y)dy\right)^{1/2}.$$

Пример. Пусть $u(x) = \exp(Ax)$, $v(x) = (-Bx)$, $0 < A < B$. Тогда, применяя теорему 4, получаем $\alpha_n(\Gamma_1) \approx n^{-2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bloom S., Kerman R.* // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 113. P. 135 - 141.
2. *Canavati J.A., Galaz-Fontes F.* // J. London Math. Soc. 1990. V. 41. P. 551 - 525.
3. *Ойнаров Р.* // ДАН. 1991. Т. 319. № 5. С. 1076 - 1078.
4. *Stepanov V.D.* Weighted norm inequalities of Hardy type for a class of integral operators. Rep. Inst. Appl. Math. Khabarovsk, 1992. 28 p.
5. *Stepanov V.D.* // J. London Math. Soc. 1990. V. 45. P. 232 - 242.
6. *Stuart C.A.* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1973. V. A71. P. 167 - 179.
7. *Juberg R.K.* // Duke Math. J. 1974. V. 41. P. 511 - 525.
8. *Edmunds D.E., Evans W.D.* Spectral theory and differential operators. Oxford: Univ. Press, 1987.
9. *Konig H.* Eigenvalue distribution of compact operators. Boston: Birkhauser, 1986.
10. *Pietsch A.* Operator ideals. B.: VEB Deutscher Verlag Wiss., 1978.
11. *Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О.* Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. М.: Наука, 1988.
12. *Edmunds D.E., Evans W.D., Harris D.J.* // J. London Math. Soc. 1988. V. 37. P. 471 - 489.