А. Тесей, Локальные свойства решений полулинейного эллиптического уравнения с обратно-квадратичным потенциалом, *СМФН*, 2006, том 17, 29–43

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 17 (2006). С. 29–43

УДК 517.95

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОБРАТНО-КВАДРАТИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© 2006 г. **А. ТЕЗЕЙ**

Аннотация. Изучается поведение в начале координат решений полулинейного эллиптического уравнения с обратно-квадратичным потенциалом. Рассматривается связь с отсутствием единственности решений соответствующего параболического уравнения.

1. Введение

В работе рассматриваются неотрицательные решения полулинейного эллиптического уравнения

$$-\Delta v - \frac{c}{r^2} v = v^p \tag{1.1}$$

на ограниченном открытом множестве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$) с гладкой границей, содержащем начало координат. Здесь $r \equiv |x|$, $p > 1$, а коэффициент c удовлетворяет неравенству $0 < c \leqslant c_0$, где $c_0 := (n-2)^2/4$ — точная постоянная в неравенстве Харди. Эта задача возникла при изучении неединственности решений соответствующего параболического уравнения

$$v_t = \Delta v + \frac{c}{r^2} v + v^p, \tag{1.2}$$

которое изучается в разделе 5.

Рассмотрим корни

$$\alpha = \alpha_\pm := \frac{n-2}{2} \pm \sqrt{c_0 - c}$$

уравнения

$$\alpha^2 - (n-2)\alpha + c = 0. \tag{1.3}$$

Заметим, что $\alpha_+ > \alpha_- > 0$. Положим

$$p_\pm := 1 + \frac{2}{\alpha_\mp}$$

и отметим, что

$$1 < \frac{n}{n-2} < p_- < \frac{n+2}{n-2} < p_+ \quad \text{при} \quad 0 < c < c_0,$$

$$\lim_{c\to 0} p_+ = +\infty, \quad \lim_{c\to c_0} p_+ = \frac{n+2}{n-2}, \quad \lim_{c\to 0} p_- = \frac{n}{n-2}, \quad \lim_{c\to c_0} p_- = \frac{n+2}{n-2}.$$

Известно [2], что величина p_+ определяет наличие или отсутствие решений уравнения (1.1) следующим образом (см. определения 1.1 и 1.2):

(a) при любом $p \in (1, p_+)$ существует нетривиальное решение уравнения (1.1) в $\mathcal{D}'(B_R)$ (где $B_R := \{x : |x| < R\}$);

(b) если $p \geqslant p_+$ и функция $v \in L^p_{loc}(\Omega \setminus \{0\})$, $v \geqslant 0$, удовлетворяет неравенству

$$-\Delta v - \frac{c}{r^2} v \geqslant v^p \tag{1.4}$$

в $\mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\})$, то $v \equiv 0$.

Утверждение (b) об отсутствии решений было впервые получено в работе [14], однако при этом рассматривалось более сильное определение решения.

Дадим следующие определения (в которых используется весовое пространство Лебега $L^p(\Omega, r^\mu)$, где $p \geqslant 1$, $\mu \in \mathbb{R}$).

Определение 1.1. Неотрицательная функция $v \in L^p_{loc}(\Omega\backslash\{0\})$ называется *решением в* $\mathcal{D}'(\Omega\backslash\{0\})$ уравнения (1.1), если

$$-\int\limits_\Omega v\Delta\eta - c\int\limits_\Omega \frac{v}{r^2}\eta = \int\limits_\Omega v^p\eta \tag{1.5}$$

для любой пробной функции $\eta \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{0\})$.

Определение 1.2. Неотрицательная функция $v \in L^1_{loc}(\Omega, r^{-2}) \cap L^p_{loc}(\Omega)$ называется *решением в* $\mathcal{D}'(\Omega)$ уравнения (1.1), если тождество (1.5) выполняется для любой пробной функции $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$.

Наш первый результат говорит о том, что эти два определения на самом деле совпадают, а именно функция v является решением в $\mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\})$ уравнения (1.1) тогда и только тогда, когда она является решением этого уравнения в $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Теорема 1.1. *Пусть* $0 < c \leqslant c_0$, *и пусть* v — *решение в* $\mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\})$ *уравнения* (1.1). *Тогда*

(i) $v \in L^1_{loc}(\Omega, r^{-2-\alpha_- +\varepsilon}) \cap L^p_{loc}(\Omega, r^{-\alpha_-})$ *при любом* $\varepsilon > 0$;

(ii) v — *решение в* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *уравнения* (1.1).

Теорема 1.1 может рассматриваться как утверждение об устранении особенности решений уравнения (1.1) (в этой связи см. теорему 1.3 ниже). Отметим, что аналогичное утверждение при $c = 0$ не всегда верно, если $p < \dfrac{n}{n-2}$ (см. [10]).

В дальнейшем важную роль играют решения $r^{-\alpha_\pm}$ уравнения

$$\Delta\phi + \frac{c}{r^2}\phi = 0 \qquad (c \in (0, c_0)). \tag{1.6}$$

Очевидно, что решение $r^{-\alpha_-}$ (имеющее наиболее слабую особенность в нуле) принадлежит $H^1(\Omega)$. С другой стороны,

$$r^{-\alpha_+} \in L^p(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad p < \frac{2n}{n-2+2\sqrt{c_0-c}}, \tag{1.7}$$

$$|\nabla r^{-\alpha_+}| \in L^p(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad p < \frac{2n}{n+2\sqrt{c_0-c}}. \tag{1.8}$$

В частности, отсюда следует, что $r^{-\alpha_+} \in L^2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $c_0 - 1 < c$, в то время как $r^{-\alpha_+} \notin H^1(\Omega)$. Кроме того, и $r^{-\alpha_+}$, и $r^{-\alpha_-}$ принадлежат $L^1_{loc}(\Omega, r^{-2})$ и удовлетворяют уравнению (1.6) в $\mathcal{D}'(\Omega)$ (см. замечание 2.1). Отметим, что

$$r^{-\alpha_-} \to 1, \quad r^{-\alpha_+} \to r^{2-n} \quad \text{при} \quad c \to 0.$$

Следующее утверждение говорит о том, что любое нетривиальное решение уравнения (1.1) в $\mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\})$ вблизи нуля ограничено снизу функцией, кратной $r^{-\alpha_-}$ (в этой связи см. [1, 4]).

Теорема 1.2. *Пусть* $0 < c \leqslant c_0$, *и пусть* $v \not\equiv 0$ — *решение в* $\mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\})$ *уравнения* (1.1). *Тогда для любого достаточно малого* $R_0 > 0$ *существует* $C_0 > 0$ *такое, что*

$$v \geqslant C_0 r^{-\alpha_-} \quad \text{почти всюду в } B_{R_0}. \tag{1.9}$$

Следует отметить, что радиальные решения уравнений (1.1) также подчиняются оценке сверху

$$v \leqslant C_1 r^{-\alpha_+} \quad \text{почти всюду в } B_{R_0} \tag{1.10}$$

с некоторой постоянной $C_1 > 0$ (аналогичный результат имеет место для автомодельных решений параболического уравнения (1.2), см. [15]). Дадим следующее определение.

Определение 1.3. Пусть $\Omega = B_R$. *Радиальным решением в* $B_R \setminus \{0\}$ уравнения (1.1) назовем любую неотрицательную функцию $v \in C^2(0, R)$ такую, что

$$-v'' - \frac{n-1}{r}v' - \frac{c}{r^2}v = v^p \quad \text{на интервале } (0, R). \tag{1.11}$$

Имеет место следующий результат.

Предложение 1.1. *Пусть* $0 < c < c_0$ *и* $\Omega = B_R$. *Тогда*:

(i) *если* $1 < p \leqslant p_-$, *то для любого нетривиального радиального решения существует такое число* $C \geqslant 0$, *что*

$$\lim_{r\to 0} r^{\alpha_+} v(r) = C; \tag{1.12}$$

(ii) *если* $p_- < p < p_+$, *то для любого нетривиального радиального решения существует такое число* $C \geqslant 0$, *что*

$$\lim_{r\to 0} r^{\frac{2}{p-1}} v(r) = C. \tag{1.13}$$

Поскольку

$$\frac{2}{p-1} < \alpha_+ \quad \Longleftrightarrow \quad p_- < p,$$

неравенство (1.10) следует из неравенств (1.12) и (1.13) предложения 1.1.

Рассматривая более общие решения уравнения (1.1), отметим следующий результат.

Теорема 1.3. *Пусть* $0 < c < c_0$. *Тогда*:

(i) *решение* $v \in C^2(\Omega \setminus \{0\})$ *уравнения* (1.1) *такое, что*

$$\lim_{x\to 0} r^{\alpha_+} v(x) = C \qquad (C > 0), \tag{1.14}$$

существует тогда и только тогда, когда $1 < p \leqslant p_-$;

(ii) *решение* $v \in C^2(\Omega \setminus \{0\})$ *уравнения* (1.1) *такое, что*

$$\lim_{x\to 0} r^{\frac{2}{p-1}} v(x) = C \qquad (C > 0), \tag{1.15}$$

существует тогда и только тогда, когда $p_- < p < p_+$.

2. Доказательство теоремы 1.1

Утверждение теоремы 1.1 непосредственно следует из следующего предложения (доказательство которого дано на основе результатов из работы [3]).

Предложение 2.1. *Пусть* $0 < c \leqslant c_0$, *и пусть функция* $v \in L^1_{loc}(\Omega \setminus \{0\})$ *такова, что* $v \geqslant 0$ *почти всюду в* Ω *и*

$$-\Delta v - \frac{c}{r^2} v = f \tag{2.1}$$

в $\mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\})$, *где* $f \in L^1_{loc}(\Omega \setminus \{0\})$ *и* $f \geqslant 0$ *почти всюду в* Ω. *Тогда*

(i) $v \in L^1_{loc}(\Omega, r^{-2-\alpha_-+\varepsilon})$ *при любом* $\varepsilon > 0$;

(ii) $f \in L^1_{loc}(\Omega, r^{-\alpha_-})$;

(iii) *равенство* (2.1) *выполнено в* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Предложение 2.1 может рассматриваться как уточнение леммы 1 в [2] в более частном случае. Для доказательства используем следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть* $v \in L^1_{loc}(\Omega, r^{-2})$ *удовлетворяет равенству*

$$-\Delta v = g \tag{2.2}$$

в $\mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\})$, *где* $g \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Тогда равенство* (2.2) *выполнено в* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Доказательство. Согласно предположениям, мы имеем

$$-\int_\Omega v\Delta\eta = \int_\Omega g\eta \tag{2.3}$$

для любой пробной функции $\eta \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{0\})$. Пусть $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Обозначим $\chi_k(x) := \chi(k|x|)$, $k \in \mathbb{N}$, где $\chi \in C^\infty((0,\infty))$, $0 \leqslant \chi \leqslant 1$ и

$$\chi(s) := \begin{cases} 0, & s \in [0,1], \\ 1, & s \in [2,\infty). \end{cases}$$

Полагая $\eta = \eta_k := \phi\chi_k$ в тождестве (2.3), получим

$$-\int\limits_\Omega v\chi_k\Delta\phi - 2\int\limits_\Omega v\nabla\chi_k\nabla\phi - \int\limits_\Omega v\phi\Delta\chi_k = \int\limits_\Omega g\phi\chi_k. \tag{2.4}$$

Тогда утверждение леммы следует из (2.4) при $k \to \infty$, если выполнены соотношения

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_\Omega v\nabla\chi_k\nabla\phi = \lim_{k\to\infty}\int\limits_\Omega v\phi\Delta\chi_k = 0.$$

Последнее соотношение следует из неравенств

$$\int\limits_\Omega |v||\nabla\chi_k||\nabla\phi| \leqslant Ck \int\limits_{\{1/k<r<2/k\}} |v| \leqslant 4C \int\limits_{\{1/k<r<2/k\}} \frac{|v|}{r^2},$$

$$\int\limits_\Omega |v||\phi||\Delta\chi_k| \leqslant Ck^2 \int\limits_{\{1/k<r<2/k\}} |v| \leqslant 4C \int\limits_{\{1/k<r<2/k\}} \frac{|v|}{r^2}$$

(с некоторой постоянной $C > 0$), поскольку $v \in L^1_{loc}(\Omega, r^{-2})$. □

Замечание 2.1. Пусть $0 < c \leqslant c_0$. Согласно лемме 2.1 не существует функции $v \in L^1_{loc}(\Omega, r^{-2})$, удовлетворяющей уравнению

$$-\Delta v - \frac{c}{r^2}v = \delta_0 \tag{2.5}$$

в $\mathcal{D}'(\Omega)$, где δ_0 обозначает массу Дирака в начале координат. Действительно, такое решение удовлетворяло бы также уравнению (1.6) в $\mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\})$. Из леммы 2.1 с $g = \dfrac{c}{r^2}v$ следовало бы, что

$$\Delta v + \frac{c}{r^2}v = 0$$

в $\mathcal{D}'(\Omega)$, а это противоречит (2.5).

В частности, отметим, что функции $r^{-\alpha_-}$ и $r^{-\alpha_+}$ удовлетворяют уравнению (1.6) в $\mathcal{D}'(\Omega)$, так как они принадлежат $L^1_{loc}(\Omega, r^{-2})$ (в этой связи см. [6]).

Замечание 2.2. В предельном случае при $c = 0$ утверждения (i) и (ii) предложения 2.1 имеют следующий вид:

(i) $v \in L^1_{loc}(\Omega, r^{-2+\varepsilon})$ при любом $\varepsilon > 0$;
(ii) $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Однако утверждение (iii) в этом случае неверно: например, функция $v = r^{2-n}$ принадлежит $L^1_{loc}(\Omega \setminus \{0\})$ и удовлетворяет уравнению (1.6) в $\mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\})$, но не удовлетворяет этому уравнению в $\mathcal{D}'(\Omega)$ (действительно, эта функция не принадлежит $L^1_{loc}(\Omega, r^{-2})$ и удовлетворяет уравнению (2.5) в $\mathcal{D}'(\Omega)$).

Доказательство предложения 2.1.
(i) Выберем $R > 0$ так, что $B_R \subseteq \Omega$. Пусть S^{n-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, а $(r,\sigma) \in (0,R) \times S^{n-1}$ — сферические координаты в $B_R \setminus \{0\}$. Сферическое среднее

$$\bar v(r) := \frac{1}{|S^{n-1}|}\int\limits_{S^{n-1}} v(r,\sigma)d\sigma$$

неотрицательно на интервале $(0,R)$ и удовлетворяет неравенству

$$\frac{d^2\bar v}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{d\bar v}{dr} + \frac{c}{r^2}\bar v \leqslant 0 \quad \text{на интервале } (0,R). \tag{2.6}$$

Пусть $\bar u := r^{\alpha_-}\bar v$. Легко проверить, что

$$r^{\alpha_-}\Big(\frac{d^2\bar v}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{d\bar v}{dr} + \frac{c}{r^2}v\Big) = \frac{1}{r^{n-1-2\alpha_-}}\frac{d}{dr}\Big(r^{n-1-2\alpha_-}\frac{d\bar u}{dr}\Big). \tag{2.7}$$

Тогда с помощью предположения (a) и неравенства (2.6) получим

$$\frac{d}{dr}\Big(r^{n-1-2\alpha_-}\frac{d\bar u}{dr}\Big) \in L^1_{loc}(0,R), \tag{2.8}$$

$$\frac{d}{dr}\Big(r^{n-1-2\alpha_-}\frac{d\bar u}{dr}\Big) \leqslant 0 \quad \text{на интервале } (0,R); \tag{2.9}$$

в частности, $\bar u \in C^1(0,R)$. Из неравенства (2.9) получим

$$-r^{n-1-2\alpha_-}\frac{d\bar u}{dr} \leqslant C \quad \text{на интервале } (0,R) \tag{2.10}$$

с некоторой положительной постоянной C. Пусть $0<r<R'<R$. Интегрируя по неравенство (2.10) в пределах от r до R', получим

$$\bar u(r) \leqslant \frac{\bar C}{r^{n-2-2\alpha_-}}, \tag{2.11}$$

откуда

$$\bar v(r) \leqslant \frac{\bar C}{r^{-\alpha_-+n-2}} \qquad \text{на интервале } (0,R) \tag{2.12}$$

с некоторой постоянной $\bar C>0$. Утверждение (i) следует из последнего неравенства.

(ii) Рассмотрим семейство функций

$$\zeta_\varepsilon(x) := \begin{cases} \zeta\left(\left(\dfrac{\varepsilon}{r}\right)^{n-2-2\alpha_-}\right), & r>0,\\ 0, & r=0,\end{cases}$$

где $\varepsilon>0$, а функция $\zeta \in C_0^\infty(0,\infty)$ такова, что

- $0\leqslant \zeta \leqslant 1$ на интервале $(0,\infty)$, $\zeta(0)=1$ и $\zeta\equiv 0$ на интервале $[1,\infty)$;
- $\zeta' \leqslant 0$ и $\zeta''\geqslant 0$ на интервале $(0,\infty)$.

Тогда для любого $\varepsilon>0$

- $0\leqslant \zeta_\varepsilon\leqslant 1$ на интервале B_R, $\zeta_\varepsilon\equiv 0$ в B_ε и $\zeta_\varepsilon(x)\to 1$ при $\varepsilon\to 0$ для любого $r>0$;
- $|\nabla\zeta_\varepsilon| = (n-2+2\alpha_-)\varepsilon^{n-2-2\alpha_-}r^{1-n+2\alpha_-}|\zeta'| \to 0$ при $\varepsilon\to 0$, равномерно на компактных подмножествах множества $\Omega\setminus\{0\}$;
- $\operatorname{div}(r^{-2\alpha_-}\nabla\zeta_\varepsilon) = (n-2+2\alpha_-)^2\varepsilon^{2(n-2-2\alpha_-)}r^{2(1-n+\alpha_-)}\zeta''\geqslant 0$ в Ω.

Выберем пробную функцию $\eta\in C_0^\infty(\Omega)$ такую, что $0\leqslant\eta\leqslant 1$ и $\eta\equiv 1$ в некотором шаре B_{ε_0}. Тогда $r^{-\alpha_-}\zeta_\varepsilon\eta \in C_0^\infty(\Omega\setminus\{0\})$ и

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega r^{-\alpha_-}f\zeta_\varepsilon\eta &= -\int\limits_\Omega v\Big\{\Delta(r^{-\alpha_-}\zeta_\varepsilon\eta)+\frac{c}{r^2}(r^{-\alpha_-}\zeta_\varepsilon\eta)\Big\} = -\int\limits_\Omega r^{\alpha_-}v\operatorname{div}\Big\{r^{-2\alpha_-}\nabla(\zeta_\varepsilon\eta)\Big\} =\\ &= -\int\limits_\Omega r^{\alpha_-}v\operatorname{div}\Big\{r^{-2\alpha_-}\nabla\zeta_\varepsilon\Big\}\eta - 2\int\limits_\Omega r^{-\alpha_-}v\nabla\zeta_\varepsilon\nabla\eta - \int\limits_\Omega r^{\alpha_-}v\zeta_\varepsilon\operatorname{div}\Big\{r^{-2\alpha_-}\nabla\eta\Big\}\leqslant\\ &\leqslant -2\int\limits_{\Omega\setminus B_{\varepsilon_0}} r^{-\alpha_-}v\nabla\zeta_\varepsilon\nabla\eta - \int\limits_{\Omega\setminus B_{\varepsilon_0}} r^{\alpha_-}v\zeta_\varepsilon\operatorname{div}\Big\{r^{-2\alpha_-}\nabla\eta\Big\}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

По лемме Фату из неравенства (2.13) при $\varepsilon\to 0$ получим

$$\int\limits_\Omega r^{-\alpha_-}f\eta \leqslant -\int\limits_{\Omega\setminus B_{\varepsilon_0}} r^{\alpha_-}v\operatorname{div}\Big\{r^{-2\alpha_-}\nabla\eta\Big\}<\infty.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{B_{\varepsilon_0}} r^{-\alpha_-}f<\infty.$$

Это доказывает утверждение (ii).

(iii) В силу утверждений (i) и (ii)

- любое решение v в $\mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\})$ уравнения (2.1) принадлежит $L^1_{loc}(\Omega, r^{-2-\alpha_-+\varepsilon})$ при любом $\varepsilon > 0$; поэтому, в частности (при $\varepsilon = \alpha_-$), это решение принадлежит $L^1_{loc}(\Omega, r^{-2})$;
- $f \in L^1_{loc}(\Omega, r^{-\alpha_-})$; поэтому, в частности, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Теперь утверждение (iii) следует из леммы 2.1 при $g = \dfrac{c}{r^2}v + f$. □

3. Доказательство теоремы 1.2

Теорема 1.2 непосредственно вытекает из следующего утверждения[1].

Предложение 3.1. *Пусть $0 < c \leqslant c_0$. Пусть функция $v \in L^1_{loc}(\Omega, r^{-2})$ такова, что $v \geqslant 0$ почти всюду в Ω, $v \not\equiv 0$ и*

$$-\Delta v - \frac{c}{r^2} v \geqslant 0 \tag{3.1}$$

в $\mathcal{D}'(\Omega)$. Тогда для любого достаточно малого $R_0 > 0$ существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что выполнена оценка (1.9).

В начале напомним следующий результат (его доказательство содержится в работе [4]).

Лемма 3.1. *Пусть $0 < c \leqslant c_0$, и пусть функция $V \in L^1_{loc}(\Omega, r^{-2-\alpha_-})$ удовлетворяет неравенству*

$$-\int\limits_{\Omega} V \Delta\eta - c \int\limits_{\Omega} \frac{V}{r^2}\eta \geqslant 0$$

для любой пробной функции $\eta \in C^\infty(\bar{\Omega})$ такой, что $\eta \geqslant 0$ и $\eta = 0$ на $\partial\Omega$. Тогда $V \geqslant 0$ почти всюду в Ω.

Для доказательства предложения 3.1 мы будем использовать следующую лемму, которая является прямым следствием неравенства Като (см. [8]).

Лемма 3.2. *Пусть $0 < c \leqslant c_0$, и пусть функция $w \in L^1_{loc}(\Omega, r^{-2})$ удовлетворяет неравенству*

$$-\Delta w - \frac{c}{r^2} w \geqslant 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{3.2}$$

Тогда

$$\Delta(w_-) + \frac{c}{r^2} w_- \geqslant 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega), \tag{3.3}$$

где $w_- := \max\{-w, 0\}$.

Доказательство предложения 3.1. Имеем: $v \geqslant 0$ почти всюду в Ω (функция v не равна тождественно нулю) и $-\Delta v \geqslant 0$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$. Следовательно, для любого $R_0 > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$v \geqslant \varepsilon \quad \text{почти всюду в } B_{R_0}. \tag{3.4}$$

Выберем любое $R' \in (0, R_0)$ и положим $C_0 := \varepsilon (R')^{\frac{|\lambda_+|}{2}}$ и $w := v - C_0 r^{-\alpha_-}$. Тогда:

- из неравенства (3.4) получим
$$w_- = 0 \quad \text{почти всюду в } B_{R_0} \setminus B_{R'};$$
- в силу замечания 2.1 имеем
$$-\Delta w - \frac{c}{r^2} w \geqslant 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega),$$
и, следовательно, согласно лемме 3.2 выполнено неравенство (3.3);
- имеют место соотношения
$$\int\limits_{B_{R_0}} w_- r^{-2-\alpha_-} = \int\limits_{\{w_- > 0\}} w_- r^{-2-\alpha_-} \leqslant 2C_0 \int\limits_{B_{R_0}} r^{-2-\alpha_-} < \infty.$$

---

[1] Решения неравенства $-\Delta v - \frac{c}{r^2} v \geqslant f$ в $\mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\})$ и в $\mathcal{D}'(\Omega)$ вводятся по аналогии с определениями 1.1 и 1.2 соответственно.

Рассмотрим пробную функцию $\eta \in C^\infty(\bar{B}_{R_0})$ такую, что $\eta \geqslant 0$ и $\eta = 0$ на ∂B_{R_0}. Зафиксируем любое $R'' \in (R', R_0)$ и пробную функцию $\gamma \in C_0^\infty(B_{R_0})$ такую, что $\gamma \geqslant 0$ и $\gamma \equiv 1$ в $\bar{B}_{R''}$. Тогда $\gamma\eta \in C_0^\infty(B_{R_0})$ и

$$\int\limits_{B_{R_0}} w_- \Big\{\Delta(\gamma\eta) + \frac{c}{r^2}\gamma\eta\Big\} = \int\limits_{B_{R_0}} w_- \Big\{\gamma(\Delta\eta) + 2\nabla\gamma\nabla\eta + (\Delta\gamma)\eta + \frac{c}{r^2}\gamma\eta\Big\} =$$

$$= \int\limits_{B_{R'}} w_- \Big\{\gamma(\Delta\eta) + 2\nabla\gamma\nabla\eta + (\Delta\gamma)\eta + \frac{c}{r^2}\gamma\eta\Big\}, \qquad (3.5)$$

так как $w_- = 0$ почти всюду в $B_{R_0} \setminus B_{R'}$. С другой стороны, поскольку $\gamma \equiv 1$ в $\bar{B}_{R''}$, из (3.5) получим

$$\int\limits_{B_{R_0}} w_- \Big\{\Delta(\gamma\eta) + \frac{c}{r^2}\gamma\eta\Big\} = \int\limits_{B_{R'}} w_- \Big\{\Delta\eta + \frac{c}{r^2}\eta\Big\} = \int\limits_{B_{R_0}} w_- \Big\{\Delta\eta + \frac{c}{r^2}\eta\Big\}; \qquad (3.6)$$

здесь использовалось равенство $w_- = 0$ почти всюду в $B_{R_0} \setminus B_{R'}$.

Из соотношений (3.3) и (3.6) следует, что

$$\int\limits_{B_{R_0}} w_- \Big\{\Delta\eta + \frac{c}{r^2}\eta\Big\} \geqslant 0$$

для любого $\eta \in C^\infty(\bar{B}_{R_0})$, $\eta \geqslant 0$, $\eta = 0$ на ∂B_{R_0}. Отсюда с помощью леммы 3.1 мы получим, что $w_- \leqslant 0$ почти всюду в B_{R_0}. □

Как следствие из теорем 1.1 и 1.2 можно дать другое доказательство утверждения об отсутствии решений (см. [2]), однако при более сильном условии $p > p_+$.

Теорема 3.1. *Пусть* $0 < c < c_0$ *и* $p > p_+$, *и пусть функция* $v \in L^p_{loc}(\Omega \setminus \{0\})$ *такова, что* $v \geqslant 0$ *и*

$$-\Delta v - \frac{c}{r^2}v \geqslant v^p \qquad (3.7)$$

в $\mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\})$. *Тогда* $v \equiv 0$.

Доказательство[1]. Пусть

$$\gamma_0 := \alpha_-, \qquad \gamma_k := p\gamma_{k-1} - 2 \qquad (k \in \mathbb{N}). \qquad (3.8)$$

Покажем, что последовательность $\{\gamma_k\}$ возрастает и расходится при $k \to \infty$. Действительно,

$$\gamma_1 - \gamma_0 = (p-1)\gamma_0 - 2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p > p_+.$$

Далее, предполагая, что

$$\gamma_k - \gamma_{k-1} = (p-1)\gamma_{k-1} - 2 > 0$$

при некотором $k \in \mathbb{N}$, получим

$$\gamma_{k+1} - \gamma_k = (p-1)\gamma_k - 2 > (p-1)\gamma_{k-1} - 2 > 0.$$

По индукции заключаем, что последовательность возрастающая. Теперь предположим, что предел $l := \lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k$ конечен. Тогда из определения (3.8) и предположения $p > p_+$ получим

$$l = \frac{2}{p-1} < \alpha_-,$$

что невозможно, поскольку последовательность $\{\gamma_k\}$ является возрастающей. Полученное противоречие показывает, что $l = \infty$.

Пусть $\bar{k}$ таково, что $\gamma_{\bar{k}} \geqslant n-2$ и $\gamma_{\bar{k}-1} < n-2$ (отметим, что $\bar{k}$ определяется единственным образом, поскольку последовательность $\{\gamma_k\}$ возрастает). Ниже будет доказано следующее утверждение:

[1] За это доказательство автор признателен Х. Брезису.

Пусть в $\mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\})$ *существует нетривиальное решение* v *уравнения* (1.1); *тогда для любого* $j = 1, \dots, \bar{k} - 1$ *существуют числа* $C_j > 0$ *и* $R_j > 0$ *такие, что*

$$v \geqslant C_j r^{-\gamma_j} \quad \textit{почти всюду в } B_{R_j}. \tag{3.9}$$

Неравенство (3.9) противоречит утверждению (i) теоремы 1.1. Действительно, рассмотрим неравенство (3.9) при $j = \bar{k} - 1$; получим

$$v^p \geqslant C^p_{\bar{k}-1} r^{-p\gamma_{\bar{k}-1}} = C^p_{\bar{k}-1} r^{-\gamma_{\bar{k}}-2} \quad \text{почти всюду в } B_{R_{\bar{k}-1}}.$$

Из последнего неравенства следует, что v не принадлежит $L^p_{loc}(\Omega)$; действительно, $r^{-\gamma_{\bar{k}}-2} \in L^1_{loc}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\gamma_{\bar{k}} < n-2$, что противоречит определению $\bar{k}$. Однако любое решение v в $\mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\})$ уравнения (1.1) принадлежит $L^p_{loc}(\Omega)$ согласно утверждению (i) теоремы 1.1. Полученное противоречие показывает, что при сделанных предположениях в $\mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\})$ не существует нетривиальных решений v уравнения (1.1).

Для завершения доказательства осталось убедиться в справедливости использованного утверждения. Для этого введем функции

$$V_j(r) := \frac{r^{-\gamma_j}}{\gamma_j(n-2-\gamma_j)} \qquad (j = 1, \dots, \bar{k}-1).$$

Отметим, что $V_j > 0$, так как $\gamma_0 > 0$ и $\gamma_{\bar{k}-1} < n-2$, а последовательность $\{\gamma_k\}$ возрастает. Кроме того, легко проверить, что

$$-\Delta V_j = r^{-\gamma_j - 2} \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Следовательно, $r^{-\gamma_j-2} \in L^1_{loc}(\Omega)$, поскольку $\gamma_j < n-2$ $(j = 1, \dots, \bar{k}-1)$.

Сначала докажем неравенство (3.9) при $j = 1$. Напомним, что любое решение v в $\mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\})$ уравнения (1.1) также является решением в $\mathcal{D}'(\Omega)$ (см. утверждение (ii) теоремы 1.1). Тогда в силу неравенства (1.9) получим

$$-\int\limits_{B_{R_0}} v\Delta\eta - c\int\limits_{B_{R_0}} \frac{v}{r^2}\eta = \int\limits_{B_{R_0}} v^p\eta \geqslant C_0^p \int\limits_{B_{R_0}} r^{-\gamma_0 p}\eta,$$

откуда

$$-\int\limits_{B_{R_0}} v\Delta\eta \geqslant C_0^p \int\limits_{B_{R_0}} r^{-\gamma_1-2}\eta = -C_0^p \int\limits_{B_{R_0}} V_1\Delta\eta$$

для любого $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, $\eta \geqslant 0$. Значит,

$$-\Delta(v - C_0^p V_1) \geqslant 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(B_{R_0}).$$

Следовательно,

$$v \geqslant C_0^p V_1 - D_1 \quad \text{почти всюду в } B_{R_0}$$

с некоторой постоянной $D_1 > 0$, откуда

$$v \geqslant \bar{C}_1 V_1 \quad \text{почти всюду в } B_{R_1}$$

с постоянными $\bar{C}_1 > 0$ и $R_1 \in (0, R_0)$. Полагая

$$C_1 := \frac{\bar{C}_1}{\gamma_1(n-2-\gamma_1)},$$

получим неравенство (3.9) при $j = 1$. Повторяя эти рассуждения конечное число раз, получим требуемое утверждение. □

4. Доказательство теоремы 1.3

Сначала докажем предложение 1.1. Замена неизвестной функции $v(r) := r^\beta w(\log r)$, где $\beta := -2/(p-1)$ и v — радиальное решение в B_R уравнения (1.1), является стандартной (см., например, [7, 17, 19]). Функция $w = w(s)$, $s := \log r$, удовлетворяет (см. (1.11)) уравнению

$$w'' + (2\beta + n - 2)w' + [\beta(\beta + n - 2) + c]w + w^p = 0 \tag{4.1}$$

(где штрихом обозначена производная по s). Для удобства положим

$$A := -2\beta - n + 2, \qquad B := -[\beta(\beta + n - 2) + c]. \tag{4.2}$$

Тогда уравнение (4.1) примет вид

$$w'' - Aw' - Bw + w^p = 0. \tag{4.3}$$

Рассмотрим фазовый портрет уравнения (4.3). Обозначим $z := w'$. Единственными точками равновесия системы

$$\begin{cases} w' = z =: f(w, z) \\ z' = Az + Bw - w^p =: g(w, z) \end{cases} \tag{4.4}$$

являются точки $(0, 0)$ и $(\hat{w}, 0)$, где $\hat{w} := B^{\frac{1}{p-1}}$, причем $B > 0$. Очевидно, что это имеет место тогда и только тогда, когда

$$\alpha_- < \frac{2}{p-1} < \alpha_+ \quad \Longleftrightarrow \quad p_- < p < p_+. \tag{4.5}$$

Для определения типа точки $(0, 0)$ запишем

$$\left.\frac{\partial(f, g)}{\partial(w, z)}\right|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что собственными значениями этой матрицы являются числа

$$\mu^0_\pm = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4B}}{2} = \frac{2}{p-1} - \alpha_\mp, \tag{4.6}$$

причем

$$A^2 + 4B = 4(c_0 - c) > 0.$$

Аналогично, собственными значениями матрицы

$$\left.\frac{\partial(f, g)}{\partial(v, z)}\right|_{(\hat{w},0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(p-1)B & A \end{pmatrix}$$

являются числа

$$\bar{\mu}_\pm = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4(p-1)B}}{2}. \tag{4.7}$$

Очевидно, что тип точек равновесия $(0, 0)$ и $(\hat{w}, 0)$ определяется знаком величин A и $D := A^2 - 4(p-1)B$ как функций от (c, p) в полуполосе $(0, c_0) \times (1, \infty)$. Элементарный анализ функции

$$D \equiv D(c, p) = \Big(\frac{4}{p-1} - n + 2\Big)^2 + 4(p-1)\Big[\frac{2}{p-1}\Big(\frac{2}{p-1} + 2 - n\Big) + c\Big]$$

показывает, что существуют две кривые $p = P_\pm(c)$ $(0 < c < c_0)$, обладающие следующими свойствами:

(*i*) $p_-(c) < P_-(c) < \dfrac{n+2}{n-2} < P_+(c) < p_+(c)$, $c \in (0, c_0)$;

(*ii*) $D(c, p) = 0$ на множестве $(0, c_0) \times (1, \infty)$ тогда и только тогда, когда $p = P_\pm(c)$ $(0 < c < c_0)$;

(*iii*) $D(c, p) > 0$, если $p \in (p_-(c), P_-(c)) \cup (p_+(c), P_+(c))$, $c \in (0, c_0)$;

(*iv*) $D(c, p) < 0$, если $p \in (P_-(c), P_+(c))$, $c \in (0, c_0)$;

(*v*) P_- возрастает, а P_+ убывает на $(0, c_0)$;

(*vi*) $P_\pm(c_0) := \lim\limits_{c \to c_0} P_\pm(c) = \dfrac{n+2}{n-2}$ и $P_\pm(0) := \lim\limits_{c \to 0} P_\pm(c) = \dfrac{n + 2 \mp 2\sqrt{n-1}}{n - 2 \mp 2\sqrt{n-1}}$.

Рассмотрим следующие непересекающиеся подмножества полуполосы $(0, c_0) \times (1, \infty)$.

- $I := \{(c,p) : 0 < c < c_0,\, 1 < p \leqslant p_-(c))\}$; здесь $A > 0$, $B \leqslant 0$. Поскольку $0 \leqslant \mu_-^0 < \mu_+^0$, единственная точка равновесия $(0,0)$ — неустойчивый узел.
- $II := \{(c,p) : 0 < c < c_0,\, p_-(c)) < p \leqslant P_-(c)\}$; здесь $A > 0$, $B > 0$, $D \geqslant 0$. Поскольку $\mu_-^0 < 0 < \mu_+^0$, точка равновесия $(0,0)$ — седло. Так как $D \geqslant 0$ и $\sqrt{D} < A$, то $0 < \bar\mu_- \leqslant \bar\mu_+$. Следовательно, точка равновесия $(\hat w, 0)$ — неустойчивый узел.
- $III := \left\{(c,p) : 0 < c < c_0,\, P_-(c) < p < \dfrac{n+2}{n-2}\right\}$; здесь $A > 0$, $B > 0$, $D < 0$. Поскольку $\mu_-^0 < 0 < \mu_+^0$, точка равновесия $(0,0)$ — седло. Так как $D < 0$, собственные значения $\bar\mu_\pm$ комплексно сопряжены. Поскольку $\operatorname{Re}\bar\mu_\pm = A/2 > 0$, точка равновесия $(\hat w, 0)$ — неустойчивый фокус.
- $IV := \left\{(c,p) : 0 < c < c_0,\, p = \dfrac{n+2}{n-2}\right\}$; здесь $A = 0$, $B > 0$, $D < 0$. Аналогично, точка равновесия $(0,0)$ — седло. Поскольку $D < 0$, собственные значения $\bar\mu_\pm = \pm i\sqrt{|D|}/2$ чисто мнимые. Следовательно, точка равновесия $(\hat w, 0)$ — центр.
- $V := \left\{(c,p) : 0 < c < c_0,\, \dfrac{n+2}{n-2} < p < P_+(c)\right\}$; здесь $A < 0$, $B > 0$, $D < 0$. Точка равновесия $(0,0)$ также является седлом. Аналогично, собственные значения $\bar\mu_\pm$ комплексно сопряжены. Поскольку $A/2 = \operatorname{Re}\bar\mu_\pm < 0$, точка равновесия $(\hat w, 0)$ — устойчивый фокус.
- $VI := \{(c,p) : 0 < c < c_0,\, P_+(c) \leqslant p < p_+(c)\}$; здесь $A < 0$, $B > 0$, $D \geqslant 0$. Точка равновесия $(0,0)$ также является седлом. Поскольку $D \geqslant 0$ и $\sqrt{D} < |A| = -A$, то $\bar\mu_- \leqslant \bar\mu_+ < 0$. Следовательно, точка равновесия $(\hat w, 0)$ — устойчивый узел.
- $VII := \{(c,p) : 0 < c < c_0,\, P_+(c) \leqslant p\}$; здесь $A < 0$, $B \leqslant 0$. Поскольку $\mu_-^0 < \mu_+^0 \leqslant 0$, единственная точка равновесия $(0,0)$ — устойчивый узел.

Сделанные выше наблюдения позволяют построить фазовый портрет системы (4.4) (т. е. уравнения (4.3)). Можно построить неотрицательные решения уравнения (1.11) на интервале $(0,R)$, а именно радиальные решения в B_R уравнения (1.1), используя орбиты системы (4.4), исходящие из некоторой точки равновесия и лежащие в полуплоскости $\{(w,z) : w \geqslant 0\}$. В соответствии с вышеизложенными рассуждениями такие орбиты существуют тогда и только тогда, когда $1 < p < p_+$. Следовательно, нетривиальные радиальные решения в B_R уравнения (1.1) существуют тогда и только тогда, когда $1 < p < p_+$, что соответствует общим результатам [2].

Теперь можно доказать предложение 1.1.

Доказательство предложения 1.1. Рассматривая поведение орбит системы (4.4) при $s \to -\infty$, отметим следующее.

(a) Орбиты, выходящие из начала координат, существуют при любом $p \in (1,p_+)$. Как показано выше, если p принадлежит интервалу $(1,p_-]$ (т. е. множеству I), то начало координат является неустойчивым узлом. Следовательно, вдоль такой орбиты мы имеем либо $w(s) \sim \exp(\mu_+^0 s)$, либо $w(s) \sim \exp(\mu_-^0 s)$ при $s \to -\infty$. Так как по определению $v(r) := r^{-\frac{2}{p-1}} w(\log r)$, из этого следует для соответствующего решения уравнения (1.11) либо $v(r) \sim r^{-\alpha_-}$, либо $v(r) \sim r^{-\alpha_+}$ при $r \to 0$ (см. (4.6)).

Если $p \in (p_-, p_+)$, то начало координат является седлом. Следовательно, вдоль любой орбиты, выходящей из начала координат, мы имеем $w(s) \sim \exp(\mu_+^0 s)$ при $s \to -\infty$. Следовательно, для соответствующего решения уравнения (1.11) получим $v(r) \sim r^{-\alpha_-}$ при $r \to 0$.

(b) Для любого $p \in (p_-, p_+)$ точка равновесия $(\hat w, 0)$ дает решение $v(r) = \hat w r^{-\frac{2}{p-1}}$. Если $p \in \left(p_-, \dfrac{n+2}{n-2}\right)$, то существуют орбиты, выходящие из точки равновесия $(\hat w, 0)$ (помимо орбит, выходящих из начала координат). Очевидно, вдоль такой орбиты выполнено $w(s) \to \hat w$ при $s \to -\infty$. Следовательно, для соответствующего решения уравнения (1.11) получим $v(r) \sim r^{-\frac{2}{p-1}}$ при $r \to 0$.

Из сделанных наблюдений следует требуемое утверждение. $\square$

Замечание 4.1. Доказательство предложения 1.1 дает следующую дополнительную информацию о решениях уравнения (1.11).

- Глобальные радиальные решения уравнения (1.1) (т. е. радиальные решения, определенные на интервале $(0,\infty)$) существуют тогда и только тогда, когда $p_- < p < p_+$. В частности, при $p = \dfrac{n+2}{n-2}$ существуют «решения основного состояния»
$$v(r) := \left\{r^{1-\sigma}\left(a + br^{2\sigma}\right)\right\}^{-\frac{n-2}{2}} \qquad (a, b > 0;\ r \in (0,\infty)),$$
где $\sigma := \sqrt{1 - c/c_0}$. При $c = 0$ такие решения являются минимизирующими радиальными решениями, дающими точную постоянную для неравенства Соболева в $\mathbb{R}^n$ (см. [18, 19]).
- Радиальные решения однородной задачи Дирихле для уравнения (1.1) в $B_R \setminus \{0\}$ (т. е. радиальные решения, удовлетворяющие условию $v(R) = 0$) существуют тогда и только тогда, когда $1 < p < \dfrac{n+2}{n-2}$.

Для доказательства теоремы 1.3 нам потребуются некоторые предварительные рассуждения. Как и для радиальных решений, положим
$$s := \log r, \qquad w(s,\sigma) := r^{-\beta} v(r,\sigma),$$
где $\beta := -2/(p-1)$, а (r,σ) — сферические координаты в $B_R \setminus \{0\}$. Функция w удовлетворяет уравнению
$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - A\frac{\partial w}{\partial s} + \Delta_{S^{n-1}} w - Bw + w^p = 0, \tag{4.8}$$
где $s \in (-\infty, \log R)$, а числа A и B определяются равенствами (4.2). В силу неравенства Гельдера ее сферическое среднее
$$\bar{w}(s) := \frac{1}{|S^{n-1}|}\int\limits_{S^{n-1}} w(s,\sigma)d\sigma$$
удовлетворяет неравенству
$$\bar{w}'' - A\bar{w}' - B\bar{w} + \bar{w}^p \leqslant 0 \tag{4.9}$$
на интервале $(-\infty, \log R)$.

Доказательство теоремы 1.3. Утверждения о достаточности следуют непосредственно из доказательства предложения 1.1. Так как при $p \geqslant p_+$ не существует решения, то для доказательства утверждений о необходимости достаточно доказать следующие утверждения.
Утверждение 1: при $p_- < p < p_+$ не существует решения $v \in C^2(\Omega\setminus\{0\})$, удовлетворяющего (1.14).
Утверждение 2: при $1 < p \leqslant p_-$ не существует решения $v \in C^2(\Omega\setminus\{0\})$, удовлетворяющего (1.15).
Доказательство утверждения 1. Если $p_- < p < p_+$, то $B > 0$, тогда как $A \geqslant 0$ при $p_- < p \leqslant \dfrac{n+2}{n-2}$ и $A < 0$ при $\dfrac{n+2}{n-2} < p < p_+$.
(a) Пусть $p_- < p \leqslant \dfrac{n+2}{n-2}$. Тогда
$$\left[\exp\left(\alpha_+ - \frac{2}{p-1}\right)s\right]\bar{w}(s) = \frac{r^{\alpha_+}}{|S^{n-1}|}\int\limits_{S^{n-1}} v(r,\sigma)d\sigma.$$

Если верно (1.14), то
$$\lim_{s\to-\infty}\left[\exp\left(\alpha_+ - \frac{2}{p-1}\right)s\right]\bar{w}(s) = C > 0,$$
откуда
$$\lim_{s\to-\infty}\bar{w}(s) = \infty, \tag{4.10}$$
поскольку $p > p_-$. Следовательно, правая часть неравенства
$$\bar{w}'' - A\bar{w}' \leqslant B\bar{w} - \bar{w}^p$$
стремится к $-\infty$ при $s \to -\infty$, поэтому
$$\Big[\exp(-As)\bar{w}'(s)\Big]' \leqslant 0 \quad \text{на интервале } (-\infty, L)$$

при некотором $L < 0$. Очевидно, отсюда следует, что

$$\bar{w}(s) \leqslant M_1 + M_2 \exp(As) \quad \text{на интервале } (-\infty, L) \tag{4.11}$$

при некоторых $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$. Поскольку $A \geqslant 0$, это противоречит (4.10). Следовательно, в этом случае утверждение верно.

(b) Пусть $\dfrac{n+2}{n-2} < p < p_+$. Легко видеть, что

$$\Big[\exp\Big(\frac{2}{p-1} - \alpha_- - A\Big)s\Big]\bar{w}(s) = \frac{r^{\alpha_+}}{|S^{n-1}|}\int\limits_{S^{n-1}} v(r,\sigma)d\sigma.$$

Если верно (1.14), то

$$\lim_{s\to-\infty}\Big[\exp\Big(\frac{2}{p-1} - \alpha_- - A\Big)s\Big]\bar{w}(s) = C > 0,$$

откуда

$$\lim_{s\to-\infty}\exp(-As)\bar{w}(s) = \infty, \tag{4.12}$$

поскольку $p < p_+$. В частности, отсюда следует (4.10), так как $A < 0$.

Из (4.9) получим неравенство

$$\Big[\exp(-As)\bar{w}'(s)\Big]' \leqslant \Big(B - \bar{w}^{p-1}(s)\Big)\bar{w}(s)\exp(-As) \quad \text{на интервале } (-\infty, \log R).$$

Ввиду сделанных наблюдений правая часть стремится к $-\infty$ при $s \to -\infty$. Следовательно, как и в пункте (a), получаем неравенство (4.11) с некоторыми постоянными $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ и $L < 0$. Поскольку $A < 0$, это противоречит (4.12). Следовательно, в этом случае утверждение также верно.

Доказательство утверждения 2. Если $1 < p \leqslant p_-$, то $A > 0$ и $B \leqslant 0$. Из (4.9) получим неравенство

$$\bar{w}'' - A\bar{w}' + \bar{w}^p \leqslant 0 \quad \text{на интервале } (-\infty, \log R).$$

Если верно (1.15), то

$$\lim_{s\to-\infty}\bar{w}(s) = C > 0; \tag{4.13}$$

следовательно,

$$\bar{w}'' - A\bar{w}' \leqslant -\Big(\frac{C}{2}\Big)^p \quad \text{на интервале } (-\infty, L)$$

при некотором $L < 0$. Легко видеть, что отсюда следует неравенство

$$\bar{w}(s) \leqslant M_1 + M_2(s - A) \quad \text{на интервале } (-\infty, L)$$

при некоторых $M_1 \in \mathbb{R}$, $M_2 > 0$ и $L < 0$. Следовательно,

$$\lim_{s\to-\infty}\bar{w}(s) = -\infty,$$

что противоречит (4.13). □

5. Заключительные замечания

Сделаем несколько замечаний о связи между полученными результатами и отсутствием единственности решений полулинейного параболического уравнения (1.2).

(a) Известно, что линейная начально-краевая задача

$$\begin{cases} v_t = \Delta v + \dfrac{c}{r^2}v & \text{в } B_R \times (0,T], \\ v = 0 & \text{на } \partial B_R \times (0,T], \\ v = v_0 & \text{в } B_R \times \{0\} \end{cases} \tag{5.1}$$

не является однозначно разрешимой при $v_0 \in L^2(B_R)$, если $c_0 - 1 < c < c_0$ (см. [20], а также теорему 4.2 в [9]).

Заметим, что функция

$$\tilde{v}(r) := \left(\frac{r}{R}\right)^{-\alpha_+} - \left(\frac{r}{R}\right)^{-\alpha_-} \qquad (r \in (0, R))$$

является радиальным решением задачи

$$\begin{cases} \Delta v + \dfrac{c}{r^2} v = 0 & \text{в } B_R, \\ v = 0 & \text{на } \partial B_R. \end{cases} \tag{5.2}$$

Именно, она является стационарным радиальным решением задачи (5.1), неотрицательным и гладким вне начала координат. Легко проверить, что

- $\tilde{v}$ — решение задачи (5.2) в $\mathcal{D}'(B_R)$ (см. замечание 2.1);
- $\tilde{v} \in L^2(B_R)$, если $c_0 - 1 < c < c_0$ (см. (1.7));
- $\tilde{v} \notin H_0^1(B_R)$ (см. (1.8));
- $\lim\limits_{r \to 0} \tilde{v}(r) = \infty$.

Используя свойство стремления к нулю полугруппы с генератором $-\Delta - \dfrac{c}{r^2}$ в $L^2(B_R)$ (см. [20]) и выбирая $v_0 = \tilde{v}$, получим отсутствие единственности в $C((0,T]; L^2(B_R))$ при $c_0 - 1 < c < c_0$.

Замечание 5.1. Как было отмечено в [20], существует интересная аналогия между вышеописанной ситуацией и ситуацией, рассмотренной в работе [16], для задачи

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A(x)\nabla u) = 0 & \text{в } B_R, \\ u = 0 & \text{на } \partial B_R, \end{cases} \tag{5.3}$$

где

$$A \equiv (a_{ij}), \qquad a_{ij} := \delta_{ij} + (a-1)\frac{x_i x_j}{r^2} \qquad (a \in (0,1)).$$

(b) Похожая ситуация наблюдается в случае полулинейной задачи

$$\begin{cases} v_t = \Delta v + v^{\frac{n}{n-2}} & \text{в } B_R \times (0,T], \\ v = 0 & \text{на } \partial B_R \times (0,T], \\ v = v_0 & \text{в } B_R \times \{0\}, \end{cases} \tag{5.4}$$

которая, как известно, имеет более одного решения для бесконечного множества функций $v_0 \in L^{\frac{n}{n-2}}(B_R)$ (см. [13]). Доказательство опирается на существование радиального решения $\tilde{v}$ задачи

$$\begin{cases} \Delta v + v^{\frac{n}{n-2}} = 0 & \text{в } B_R, \\ v = 0 & \text{на } \partial B_R \end{cases} \tag{5.5}$$

такого, что $\tilde{v}(r) \sim r^{2-n} = r^{-\frac{2}{p-1}}$ при $r \to 0$. Решение $\tilde{v}$ обладает следующими свойствами:

- $\tilde{v}$ — решение задачи (5.5) в $\mathcal{D}'(B_R)$;
- $\tilde{v}$ принадлежит $L^{\frac{n}{n-2}}(B_R)$;
- $\tilde{v} \notin H_0^1(B_R)$;
- $\lim\limits_{r \to 0} \tilde{v}(r) = \infty$.

Поскольку для любого $v_0 \in L^{\frac{n}{n-2}}(B_R)$ существует решение задачи (5.4) в $C((0,T]; L^{\frac{n}{n-2}}(B_R)) \cap L^\infty(B_R \times (\tau, T])$ (τ — произвольное число из интервала $(0,T)$, см. [21]), полагая $v_0 = \tilde{v}$, получим отсутствие единственности.

(c) Рассмотрим полулинейную задачу

$$\begin{cases} v_t = \Delta v + \dfrac{c}{r^2} v + v^{p_-} & \text{в } B_R \times (0,T], \\ v = 0 & \text{на } \partial B_R \times (0,T], \\ v = v_0 & \text{в } B_R \times \{0\}. \end{cases} \tag{5.6}$$

Учитывая, что

$$p_- = p_-(c) \to n/(n-2)$$

при $c \to 0$, задача (5.6) может рассматриваться как обобщение задач (5.1) и (5.4).

Ввиду замечаний, сделанных выше, естественно предполагать отсутствие единственности решения задачи (5.6) в пространстве $C((0,T];L^{p_-}(B_R))$. Действительно, в силу утверждения (i) теоремы 1.3 при $p = p_-$ существует радиальное решение $\tilde{v}$ задачи

$$\begin{cases} -\Delta v - \dfrac{c}{r^2} v = v^{p_-} & \text{в } B_R, \\ v = 0 & \text{на } \partial B_R \end{cases} \tag{5.7}$$

такое, что $\tilde{v}(r) \sim r^{-\alpha_+} = r^{-\frac{2}{p_- - 1}}$ при $r \to 0$. Тогда

- $\tilde{v}$ — решение задачи (5.7) в $\mathcal{D}'(B_R)$;
- $\tilde{v}$ принадлежит $L^{p_-}(B_R)$;
- $\tilde{v} \notin H_0^1(B_R)$;
- $\lim\limits_{r \to 0} \tilde{v}(r) = \infty$.

Чтобы проверить предположение об отсутствии единственности, требуется исследовать свойство стремления к нулю полугруппы с генератором $-\Delta - \dfrac{c}{r^2}$ в $L^{p_-}(B_R)$. Вероятно, для этой цели целесообразно использовать точные оценки для уравнения теплопроводности, полученные в работе [12] для таких полугрупп.

Наконец, следует отметить, что отсутствие единственности решения задачи Коши для уравнения (1.2) в $C([0,\infty);L^r(\mathbb{R}^n))$ (r достаточно мало, в зависимости от n и p) было доказано в работе [11] как обобщение результата [5] для $c = 0$.

Часть представленных результатов была получена при подготовке работы [2]. Автор признателен Х. Брезису за полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке фонда RTN (проект HPRN-CT-2002-00274).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baras P.*, *Goldstein J.* The heat equation with a singular potential// Trans. Amer. Math. Soc. — 1984. — *284*. — С. 121–139.
2. *Brezis H.*, *Dupaigne L.*, *Tesei A.* On a semilinear elliptic equation with inverse-square potential// Selecta Math. — 2005. — *11*. — С. 1–7.
3. *Brezis H.*, *Lions P.-L.* A note on isolated singularities for linear elliptic equations// Math. Anal. Appl. Part A, Adv. Math. Suppl. Studies. — 1981. — *7A*. — С. 263–266.
4. *Dupaigne L.* A nonlinear elliptic PDE with the inverse square potential// J. Anal. Math. — 2002. — *86*. — С. 359–398.
5. *Haraux A.*, *Weissler F.* Nonuniqueness for a semilinear initial value problem// Indiana Univ. Math. J. — 1982. — *31*. — С. 167–189.
6. *Jannelli E.* The role played by space dimension in elliptic critical problems// J. Differential Equations. — 1999. — *156*. — С. 407–426.
7. *Joseph D. D.*, *Lundgren T. S.* Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1973. — *49*. — С. 241–269.
8. *Kato T.* Schrödinger operators with singular potentials// Israel J. Math. — 1972. — *13*. — С. 135–148.
9. *Kersner R.*, *Tesei A.* Well-posedness of initial value problems for singular parabolic equations// J. Differential Equations. — 2004. — *199*. — С. 47–76.
10. *Lions P.-L.* Isolated singularities in semilinear problems// J. Differential Equations. — 1980. — *38*. — С. 441–450.
11. *Moschini L.*, *Reyes G.*, *Tesei A.* Nonuniqueness of solutions to semilinear parabolic equations with singular coefficients// Commun. Pure Appl. Anal. — В печати.
12. *Moschini L.*, *Tesei A.* A parabolic Harnack inequality for the heat equation with inverse-square potential// Forum Math. — В печати.
13. *Ni W.-M.*, *Sacks P.* Singular behavior in nonlinear parabolic equations// Trans. Amer. Math. Soc. — 1985. — *287*. — С. 657–671.
14. *Pohozaev S. I.*, *Tesei A.* Nonexistence of local solutions to semilinear partial differential inequalities// Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. — 2004. — *21*. — С. 487–502.
15. *Reyes G.*, *Tesei A.* Self-similar solutions of a semilinear parabolic equation with inverse-square potential// J. Differential Equations. — В печати.

16. *Serrin J.* Pathological solutions of elliptic differential equations// Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). — 1964. — *17.* — C. 385–387.
17. *Smets D.*, *Tesei A.* On a class of semilinear elliptic problems with first order terms// Adv. Differential Equations. — 2003. — *8.* — C. 257–278.
18. *Talenti G.* Best constant in Sobolev inequality// Ann. Mat. Pura Appl. (4). — 1976. — *110.* — C. 353–372.
19. *Terracini S.* On positive solutions to a class of equations with singular coefficient and critical exponent// Adv. Differential Equations. — 1996. — *1.* — C. 241–264.
20. *Vazquez J. L.*, *Zuazua E.* The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential// J. Funct. Anal. — 2000. — *173.* — C. 103–153.
21. *Weissler F. B.* Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p// Indiana Univ. Math. J. — 1980. — *29.* — C. 79–102.

Alberto Tesei
Dipartimento di Matematica «G. Castelnuovo», Università di Roma «La Sapienza»
I-00185 Roma, Italia
E-mail: tesei@mat.uniroma1.it