А. Б. Миллер, Предотвращение перегрузок в сетях передачи данных с помощью методов стохастического управления, *Автомат. и телемех.*, 2010, выпуск 9, 70–82

Автоматика и телемеханика, № 9, 2010

© 2010 г. А. Б. МИЛЛЕР
(Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича, Москва)

ПРЕДОТВРАЩЕНИЕ ПЕРЕГРУЗОК В СЕТЯХ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ СТОХАСТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

Предложена динамическая модель управления доступом к ресурсам и скоростью обслуживания при активных пользователях в сетях передачи данных. Решена задача оптимального управления с учетом стоимости обслуживания и потерь, связанных с отбрасыванием заявок при перегрузке системы обслуживания.

1. Введение

В последние несколько лет были сделаны огромные шаги на пути внедрения аналитических моделей в методы управления в сетях передачи данных. Ключом к этим успехам была разработка методов детального моделирования эффектов возникновения перегрузок, которые отражали информацию о нарушении нормального функционирования сети. Говоря более точно, предполагается, что каждое соединение в сети имеет возможность оценивать (измерять) свою нагрузку и, кроме того, все соединения имеют доступ к оценкам текущих значений нагрузок соединений, связанных с траекторией прохождения сообщений. Такие предположения неявным образом реализуются во многих вариантах ныне существующих TCP (Transmission Control Protocol).

Причиной перегрузок в сети может быть выход из строя участков сети (обрыв кабеля, выход из строя оборудования, суточные или погодные изменения), при котором на оставшуюся часть сети падает большая нагрузка, непредсказуемые требования к полосе некоторых видов трафика и т.д. Отсутствие механизмов управления такими ситуациями приводит к переполнению буферов, потере ячеек, ухудшению качества связи. Основными механизмами управления перегрузками в сетях передачи данных является управление доступом и скоростью обслуживания пользователей.

Динамическое управление доступом предполагает, что вероятность отклонения заявок не является фиксированной величиной, а зависит от состояния роутера (т.е. от длины очереди) и величин потоков входящих заявок. Один из подходов к решению проблемы управления доступом реализован в алгоритме произвольного раннего обнаружения RED (Random Early Detection) [1], в котором вероятность доступа зависит от средней длины очереди, оцениваемой по прошлым измерениям. Этот подход следует рассматривать, однако, лишь как суб-оптимальный, поскольку он не использует всей имеющейся информации. Более общий подход, основанный на теории управления марковскими цепями, использует описание управляемой цепи в терминах стохастических дифференциальных уравнений [2] и позволяет сформулировать задачу оптимизации входящего потока как задачу оптимального управления [3].

В настоящее время растет интерес к механизмам активного управления очередью (Active Queue Management AQM), которые используют, в частности, и возможность

[1] Работа выполнена при частичной поддержке Австралийского Совета но научным исследованиям, грант ARC DP0988685.

изменения (увеличения или уменьшения) скорости обслуживания [4]. Такая постановка задачи также укладывается в схему управления марковской цепью и может быть решена методами теории оптимального управления [3].

В данной работе рассматривается система массового обслуживания, в которой "активные" пользователи формируют входной поток в зависимости от вероятности отклонения заявок, устанавливаемой сервером, и собственных временных предпочтений. Решается задача оптимального управления системой массового обслуживания с учетом нестационарности входного потока, стоимости обслуживания и потерь, связанных с отбрасыванием заявок при перегрузке системы обслуживания.

В разделе 2 описывается модель управляемой системы массового обслуживания, основанная на мартингальном представлении процесса обслуживания пользователей. В разделе 3 рассматривается модель формирования входного потока при динамическом управлении доступом и активных пользователях. В разделе 4 приводится общий вид решения задачи оптимального управления. В разделе 5 дано решение задачи оптимального управления системой массового обслуживания при активных пользователях. В разделе 6 приводятся результаты численного моделирования. В Приложение вынесены доказательства и выводы.

2. Модель системы массового обслуживания

Рассмотрим систему массового обслуживания, управляемую посредством ограничения входящего потока и изменения скорости обслуживания. Система рассматривается на интервале времени $t \in [0, T]$, где $T < \infty$ и фиксировано. Предполагаем, что поток заявок представляет собой считающий процесс со случайной интенсивностью $\lambda(t) \geq 0$, $t \in [0, T]$ [3], которая зависит от временных предпочтений пользователей и текущего состояния очереди. Число заявок в системе ограничено некоторой константой $M < \infty$. Введем следующие управляемые величины: интенсивность обслуживания пользователей $\mu \in [\underline{\mu}, \overline{\mu}]$, где $\underline{\mu} > 0$, и $u(t) \in [0, 1]$ – вероятность принять заявку в момент времени $t \in [0, T]$.

Пусть состояние $M(t)$ отражает число заявок в системе в момент времени t. Общее число состояний есть $M + 1$, а соответствующее пространство состояний S состоит из единичных векторов $\{e_0, \ldots, e_M\}$ вида $e_i = (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots 0)$ с единицей на i-м месте в пространстве размерности $M + 1$ [2].

Утверждение 1. *Если управление доступом в системе зависит лишь от текущего числа заявок, то модель управления может быть описана в терминах управляемой марковской цепи с $M+1$ состояниями и генератором $A(t, u, \mu)$, матрицей размерности $(M + 1) \times (M + 1)$, представимой в виде*

$$A(t, u, \mu) = \begin{pmatrix} -\lambda(t)u & \mu & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(t)u & -\mu - \lambda(t)u & \mu & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda(t)u & -\mu - \lambda(t)u & \mu \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda(t)u & -\mu \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где управление $(u, \mu) \in [0, 1] \times [\underline{\mu}, \overline{\mu}]$.

Доказательство см. в Приложении.

3. Формирование входного потока при динамическом управлении доступом и активных пользователях

Особенностью рассматриваемой модели является предположение о формировании входного потока совокупностью активных пользователей, выбирающих интенсивность генерации заявок таким образом, чтобы максимизировать собственную функцию полезности [5]. Для простоты будем полагать, что N пользователей используют функции полезности следующего вида с учетом того, что заявка, отклоненная роутером, посылается обратно еще один раз:

$$f_i(v,t,P) = -\frac{a_i(t)}{v} - \lambda_0 v - \lambda_0 vP, \quad i = 1,\ldots,N,$$

где v – интенсивность генерации заявок i-м пользователем, λ_0 – цена трафика, P есть вероятность отклонения заявки, которая определяется роутером в зависимости от времени и длины очереди, т.е. $P = P(t, M(t-))$. Поскольку $M(t)$ – разрывный процесс, то $M(t-)$ является его пределом слева. Параметр $a_i(t)$ характеризует потребность пользователя в ресурсах. Полагаем, что роутер использует управление марковского типа и имеет информацию о функциях полезности пользователей. Максимизируя свою функцию полезности, i-й пользователь устанавливает оптимальное значение интенсивности потока, равное

$$v_i^{opt}(t, P(t, M(t-))) = \arg\max_{0<v<\infty} f_i(v,t) =$$
$$= \sqrt{\frac{a_i(t)}{\lambda_0(1+P(t,M(t-)))}}.$$

При этом общее значение интенсивности управляемого входного потока как функции от вероятности доступа, а значит, состояния очереди равно

$$\lambda(t, P(t, M(t-))) = \sum_{i=1}^{N} v_i^{opt}(t, P(t, M(t-))) =$$
$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{N}\sqrt{a_i(t)}}{\sqrt{\lambda_0(1+P(t,M(t-)))}} = \frac{C(t)}{\sqrt{\lambda_0(1+P(t,M(t-)))}},$$

где

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N}\sqrt{a_i(t)}$$

– величина, которая характеризует всю совокупность пользователей.

Зависимость $C = C(t)$ позволяет учесть временную (суточную или сезонную) зависимость потребности в ресурсах.

Подставляя выражение для интенсивности входного потока в выражение для матрицы генератора $A(t,u,\mu)$ (1), с учетом соотношений

$$\begin{aligned} \lambda(t,u) &= \frac{C(t)}{\sqrt{\lambda_0(2-u)}}, \quad u = 1-P, \\ \lambda(t,u)u &= \frac{C(t)u}{\sqrt{\lambda_0(2-u)}} \end{aligned} \tag{2}$$

получаем следующее выражение для матрицы генератора $A(t,u,\mu)$ при управлении доступом в случае активных пользователей:

$$
(3) \qquad A(t,u,\mu) = \begin{pmatrix}
-\frac{C(t)u}{\sqrt{\lambda_0(2-u)}} & \mu & \dots & 0 & 0 \\
\frac{C(t)u}{\sqrt{\lambda_0(2-u)}} & -\mu-\frac{C(t)u}{\sqrt{\lambda_0(2-u)}} & \dots & 0 & 0 \\
0 & \frac{C(t)u}{\sqrt{\lambda_0(2-u)}} & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & \mu & 0 \\
0 & 0 & \dots & -\mu-\frac{C(t)u}{\sqrt{\lambda_0(2-u)}} & \mu \\
0 & 0 & \dots & \frac{C(t)u}{\sqrt{\lambda_0(2-u)}} & -\mu
\end{pmatrix},
$$

где управление $(u,\mu) \in [0,1] \times [\underline{\mu}, \overline{\mu}]$.

Далее излагается общий подход к решению задач оптимального управления марковскими цепями [2] применительно к задаче управления системой обслуживания [3].

4. Динамическое программирование и оптимальное управление

Рассматривается задача со следующим критерием качества:

$$
(4) \qquad J[u(\cdot),\mu(\cdot)] = \mathbf{E}\left\{\phi_0(X_T) + \int\limits_0^T f_0(s,u(s),\mu(s),X_s)ds\right\} \to \min_{u(\cdot),\mu(\cdot)},
$$

где

$$
\phi_0(X) = \langle \phi_0, X\rangle, \qquad f_0(s,u,\mu,X) = \langle f_0(s,u,\mu), X\rangle,
$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – знак скалярного произведения и

$$
\begin{aligned}
&\phi_0 \in R^n, \\
&f_0^*(s,u,\mu) = (f_0(s,u,\mu,e_1),\dots,f_0(s,u,\mu,e_n))
\end{aligned}
$$

и каждая $f_0(s,\cdot,\cdot,e_i)$ – функция стоимости, когда марковская цепь находится в состоянии e_i в момент времени $s \in [0,T]$.

Предположение 1. *Каждая из функций $f_0(s,\cdot,\cdot,e_i)$, $i = 1\dots N$, непрерывна на $[0,T]\times[0,1]\times[\underline{\mu},\overline{\mu}]$ и ограничена снизу.*

Общий подход к решению задачи оптимального управления с помощью метода динамического программирования изложен в [2, 6]. Для общей модели, описываемой матрицей генератора $A(t,u,\mu) \in R^n$, где $(u,\mu) \in U$, определим функцию цены

$$
(5) \qquad V(t,X) = \inf_{u(\cdot),\mu(\cdot)} J[u(\cdot),\mu(\cdot)|X_t = X],
$$

где

$$J[u(\cdot),\mu(\cdot)|X_t=X]=\mathbf{E}\left\{\phi_0(X_T)+\int\limits_t^T f_0(s,u(s),\mu(s),X_s)ds\Big|X_t=X\right\}. \tag{6}$$

Согласно *предположению 1*, инфимум в (5) существует, и функция $V(t,X)$ удовлетворяет следующему представлению

$$V(t,X)=\langle\phi(t),X\rangle,$$

где $\phi(t)=(\phi^1(t),\dots,\phi^n(t))^*\in R^n$ – некоторая измеримая вектор-функция и $*$ – знак транспонирования.

Рассмотрим уравнение (*уравнение динамического программирования*) относительно вектор-функции $\phi(t)$

$$\langle\phi^{'}(t),X\rangle+\min_{(u,\mu)\in U}[\langle\phi(t),A(t,u,\mu)X\rangle+\langle f_0(t,u,\mu),X\rangle]=0 \tag{7}$$

с граничным условием

$$\phi(T)=\phi_0.$$

Так как функция

$$H(\phi,t,u,\mu,X)=\langle\phi,A(t,u,\mu)X\rangle+\langle f_0(t,u,\mu),X\rangle \tag{8}$$

непрерывна относительно (t,u,μ) и аффинна по ϕ, то для любых $(t,X)\in[0,T]\times S$ функция

$$\mathcal{H}(\phi,t,X)=\min_{(u,\mu)\in U}H(\phi,t,u,\mu,X)$$

Липшицева по ϕ [3]. Из описанных выше соображений следует

Утверждение 2. Пусть предположение 1 выполняется. Тогда уравнение (7) *имеет единственное решение на* $[0,T]$.

Замечание. Уравнение (7) может быть записано в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\phi^i(t)}{dt}=-\mathcal{H}(\phi(t),t,e_i),\quad i=1,\dots,n, \tag{9}$$

которые могут быть получены посредством подстановки $X=e_i,\quad i=1,\dots,n$.

Следующий результат дает характеризацию оптимального управления [2], [3].

Теорема. Пусть $\phi(t)$ *– решение системы* (9), *и существует* $(u_0(t,X),\mu_0(t,X))\in$ $\in U,(t,X)\in[0,T]\times\mathrm{S}$ *такое, что для каждой пары* $(t,X)\in[0,T]\times\mathrm{S}$ *величина с правой стороны уравнения* (8) *и функция* $H(\phi(t),t,u,\mu,X)$ *достигают минимума в точке* $(u_0(t,X),\mu_0(t,X))$. *Тогда существует* $(\hat u(t,X_0^t),\hat\mu(t,X_0^t))$ *в классе* $\mathcal{F}_t^X$*-предсказуемых управлений, являющееся оптимальным управлением, и* $V(t,X)=$ $=J[\hat u(\cdot),\hat\mu(\cdot)|X_t=X]$. *Это оптимальное управление можно выбрать марковским:*

$$\left(\hat u(t,X_0^t),\hat\mu(t,X_0^t)\right)=(u_0(t,X_t),\mu_0(t,X_t))=\arg\min_{(u,\mu)\in U}H(\phi(t),t,u,\mu,X_t).$$

5. Решение задачи оптимального управления доступом и скоростью обслуживания

Общая модель управления доступом при активных пользователях описана выше в разделе 3. Рассмотрим некоторые типичные критерии качества.

Как было упомянуто выше, критерий качества должен учитывать среднее время в очереди, которое может быть оценено следующим образом:

$$J_1 = \mathbf{E}\left\{\int\limits_0^T \frac{M(\tau)}{\mu(\tau)} d\tau\right\} = \mathbf{E}\left\{\int\limits_0^T \frac{\langle \mathbf{l}, X_\tau\rangle}{\mu(\tau)} d\tau\right\},$$

где

$$\mathbf{l}^* = (0, 1, 2, \ldots, M) \in R^{M+1}.$$

Этот критерий имеет следующий смысл. Если интенсивность обслуживания постоянна и равна μ, то при экспоненциально распределенном времени обслуживания (см. [7], стр. 247–248) среднее время обслуживания равно $1/\mu$, поэтому, если заявка поступает на вход, когда в очереди находится $M(t)$ заявок, она будет обслужена в среднем через время $M(t)/\mu$. При переменном $\mu(t)$ этот критерий качественно характеризует среднее время пребывания в очереди.

Другой критерий, который следует принимать во внимание при оптимизации, есть среднее число отклоненных заявок, которое может быть подсчитано при помощи формулы [3]

$$J_2 = \mathbf{E}\left\{\int\limits_0^T (1 - u(\tau)\langle \mathbf{1}, X_\tau\rangle)\lambda(\tau) d\tau\right\},$$

где

$$\mathbf{1}^* = (1, 1, \ldots, 1, 0) \in R^{M+1}.$$

Обслуживающая система стремится минимизировать данный критерий. Подставляя в эту формулу выражения (2), получаем

$$J_2 = \mathbf{E}\left\{\int\limits_0^T \frac{C(\tau)(1 - u(\tau)\langle \mathbf{1}, X_\tau\rangle)}{\sqrt{\lambda_0(2 - u(\tau))}} d\tau\right\} \to \min.$$

Третий критерий – стоимость обслуживания, которая предполагается линейно зависящей от скорости обслуживания,

$$J_3 = \int\limits_0^T \mu(\tau)\langle \mathbf{I}, X_\tau\rangle d\tau,$$

где

$$\mathbf{I}^* = (0, 1, \ldots, 1) \in R^{N+1}.$$

Четвертый критерий – штраф за простой роутера. Штраф минимален, если роутер полностью загружен.

$$J_4 = g_i.$$

Поскольку в реальной жизни следует стремиться к сбалансированному соотношению минимизируемых критериев, то будем рассматривать взвешенную сумму критериев

$$J = k_1 J_1 + k_2 J_2 + k_3 J_3 + k_4 J_4 \to \min, \quad k_1, k_2, k_3, k_4 > 0.$$

Функцию полезности можно представить в виде

$$f_0(t, u, \mu, X) = k_1 \frac{\langle \mathbf{1}, X \rangle}{\mu} + k_3 \mu \langle \mathbf{I}, X \rangle + k_2 \frac{C(t)(1 - u\langle \mathbf{1}, X \rangle)}{\sqrt{\lambda_0 (2-u)}} + k_4 g.$$

Выпишем значения функции (8) для различных значений i.

Для $i = 0$

$$H(\phi, t, u, \mu, e_1) = \big((-\phi^0 + \phi^1 - k_2)u + k_2\big) \frac{C(t)}{\sqrt{\lambda_0 (2-u)}} + k_4 g_0,$$

для $1 \le i < M$

$$\begin{aligned} &H(\phi, t, u, \mu, e_i) = \\ &= \big((-\phi^i + \phi^{i+1} - k_2)u + k_2\big) \frac{C(t)}{\sqrt{\lambda_0 (2-u)}} + i\frac{k_1}{\mu} + \big(\phi^{i-1} - \phi^i + k_3\big)\mu + k_4 g_i, \end{aligned}$$

для $i = M$

$$H(\phi, t, u, \mu, e_M) = k_2 \frac{C(t)}{\sqrt{2\lambda_0}} + M\frac{k_1}{\mu} + \big(\phi^{M-1} - \phi^M + k_3\big)\mu.$$

Отсюда видно, что одна часть слагаемых в правых частях зависит только от μ, а другая часть зависит от u, поэтому

$$\mathcal{H}(\phi, t, X) = \min_{\mu} H_0(\phi, t, \mu, X) + \min_{u} H_1(\phi, t, u, X),$$

где

$$H_0(\phi, t, \mu, e_i) = \mu\langle \phi, A^- e_i \rangle + k_1 \frac{\mathbf{1_i}}{\mu} + k_3 \mu \mathbf{I}_i,$$

$$H_1(\phi, t, u, e_i) = \frac{Z\mathbf{1}_i u + k_2}{\sqrt{\lambda_0 (2-u)}},$$

где

$$Z = \frac{(-\phi^i + \phi^{i+1} - k_2)C(t)}{\sqrt{\lambda_0}}.$$

Оптимальное управление $\mu(t, e_i)$ выглядит следующим образом:

$$\mu(t, e_i) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{a}{b}}, & \text{если} \quad \sqrt{\dfrac{a}{b}} \in [\underline{\mu}, \overline{\mu}], b > 0, \\ \underline{\mu}, & \text{если} \quad \sqrt{\dfrac{a}{b}} < \underline{\mu}, b > 0, \\ \overline{\mu}, & \text{если} \quad \sqrt{\dfrac{a}{b}} > \overline{\mu}, b > 0, \\ \overline{\mu}, & \text{если} \quad b \le 0, \end{cases}$$

где $a(t, e_i) = k_1 \mathbf{1_i} \ge 0$, $b(t, e_i) = \langle \phi(t), A^- e_i \rangle + k_3 \mathbf{I_i}$.

Для нахождения оптимального управления $u(t)$ нам нужно найти функцию

$$u(\phi, t, e_i) = \arg\min_{0\le u\le 1} H_1(\phi, t, u, e_i).$$

Значение $u(\phi, t, e_i)$, при котором достигается минимум, и есть оптимальное управление доступом с обратной связью.

Минимизируемая функция имеет вид

$$f(u) = \frac{Zu + k_2}{\sqrt{2-u}}, u \in [0,1],$$

а ее производная равна

$$f^{'}(u) = \frac{4Z - Zu + k_2}{(2-u)^{3/2}}.$$

Заметим, что на отрезке $[0,1]$ производная не меняет знак, так как выражение

$$4Z - Zu + k_2 > 0,$$

поэтому минимум достигается только в крайних точках отрезка $[0,1]$. Таким образом,

$$u_{\min} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad Z \le 0, \\ 0, & \text{если} \quad Z > 0. \end{cases}$$

Оптимальное управление равно

$$u_{opt}(\phi, e_i) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad Z \le 0, \\ 0, & \text{если} \quad Z > 0. \end{cases}$$

6. Результаты численного моделирования

Для нахождения численных значений оптимальных управлений $u(t)$ и $\mu(t)$ необходимо найти оптимальные значения функции $\phi(t)$. Это можно сделать, решив систему дифференциальных уравнений (9). Была разработана программа моделирования на Maple 12, решающая данную систему и находящая оптимальные управления с учетом следующих параметров и терминальных условий:

- $\underline{\mu}, \overline{\mu}$ – нижний и верхний пороги скорости обслуживания;
- $c = c(t)$ – переменное значение величины $\sum\limits_{i=1}^{N} \sqrt{a_i(t)}$ учитывает изменение предпочтений пользователей в зависимости от времени;
- k_1, k_2, k_3, k_4 – коэффициенты весов интегральных критериев J_1, J_2, J_3, J_4;
- λ_0 – цена трафика;
- M – размер буфера.

В данном случае

- $\underline{\mu} = 3, \overline{\mu} = 8$;
- $c = 2 + 1{,}5\cos(2(2-t))$;
- $k_1 = 0{,}35$, $k_2 = 3$, $k_3 = 1{,}5$, $k_4 = 0{,}5$;
- $\lambda_0 = 0{,}01$;
- $M = 5$.

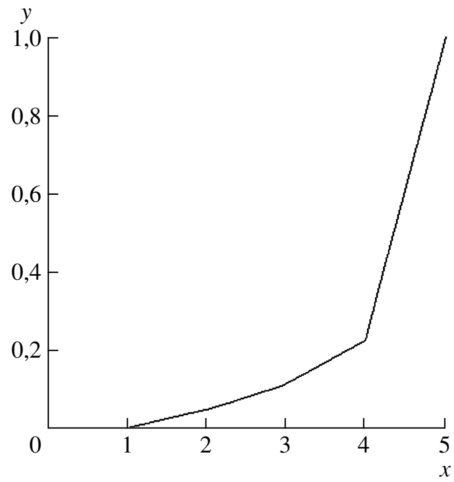

Рис. 1. Зависимость средней по времени вероятности отклонения заявок (ось y) от количества заявок в буфере (ось x).

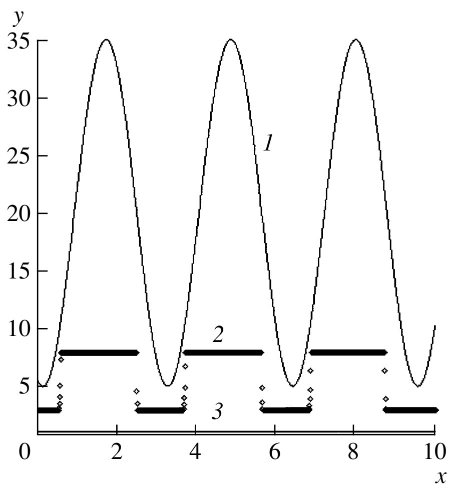

Рис. 2. Состояние с одной заявкой в буфере. Зависимость входного потока (*1*), интенсивности обслуживания (*2*), вероятности отклонения заявок (*3*) от времени (ось x).

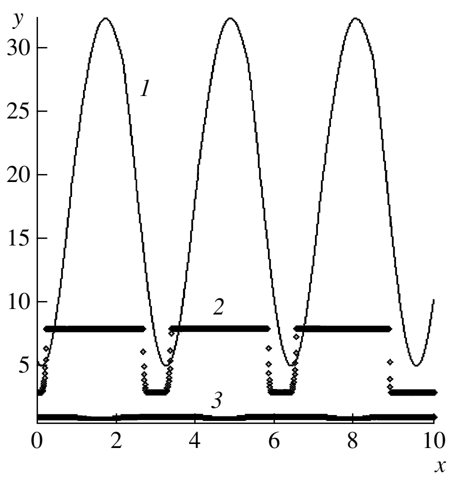

Рис. 3. Состояние с двумя заявками в буфере. Зависимость входного потока (*1*), интенсивности обслуживания (*2*), вероятности отклонения заявок (*3*) от времени (ось x).

Средняя по времени вероятность отклонения заявок в зависимости от состояния буфера имеет вид рис. 1.

На рис. 2–5 показаны зависимости входного потока заявок, интенсивности обслуживания и вероятности отклонения заявок на интервале времени $[0, 10]$ для состояний системы с 1–4 заявками в буфере.

Заметим, что на рис. 2 входной поток не ограничивается и управление осуществляется лишь путем изменения интенсивности обслуживания.

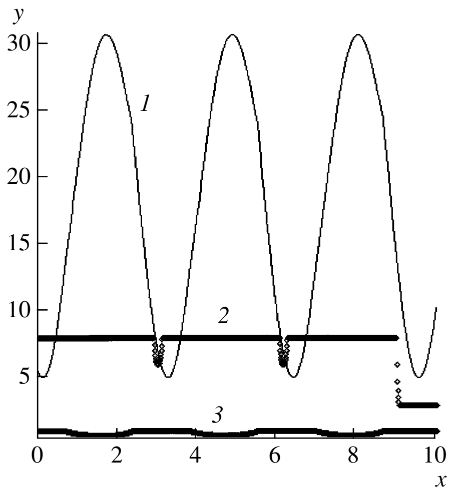

Рис. 4. Состояние с тремя заявками в буфере. Зависимость входного потока (*1*), интенсивности обслуживания (*2*), вероятности отклонения заявок (*3*) от времени (ось x).

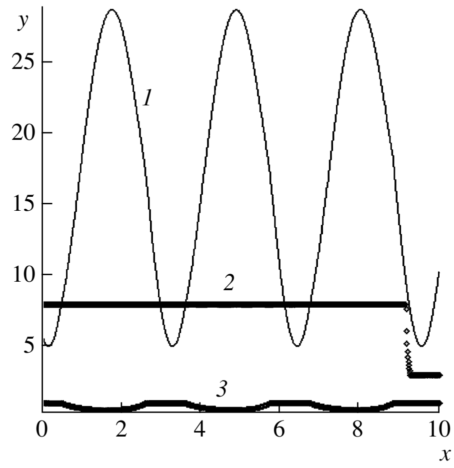

Рис. 5. Состояние с четырьмя заявками в буфере. Зависимость входного потока (*1*), интенсивности обслуживания (*2*), вероятности отклонения заявок (*3*) от времени (ось x).

На рис. 4–5 входной поток ограничивается, на его максимуме вероятность отклонения равна 1.

7. Выводы и заключение

1. В работе исследована стохастическая модель управления потоками в Интернет, основанная на использовании теории управляемых марковских цепей. Она учитывает активное поведение пользователей и позволяет получить оптимальное управление доступом и скоростью обслуживания с учетом естественных критериев, характеризующих функционирование роутера-провайдера.

2. Модель основана на методах теории активных систем и учитывает функции полезности пользователей и различные критерии качества, характеризующие функционирование системы "пользователи-роутер" при нестационарных внешних условиях.

3. Заметим, что данная модель приводит к алгоритму ограничения входного потока, близкому к алгоритму RED.

4. Данная модель может служить основой для анализа более сложных систем, связанных не только с управлением потоками данных, но и с функционированием иерархических систем, возникающих в ситуации "клиенты-система обслуживания" (склады, снабжение ограниченными ресурсами).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Введем семейство полных σ-алгебр, генерируемых случайным процессом X_t,

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s : s \in [0,t]\}.$$

Пусть $M(t) \in \{0, \ldots, M\}$ – текущее количество заявок в системе. Это число меняется в зависимости от двух потоков: потока поступающих заявок и потока обработанных заявок. Предполагается, что поток поступающих заявок формирует считающий процесс со случайной интенсивностью $\lambda(t) = \lambda(t, M(t-)) \geq 0$. Число заявок N_t^a, поступающих на вход системы с момента времени $t_0 = 0$ до текущего момента времени t, может быть представлено следующим образом [2]:

$$N_t^a = \int\limits_0^t \lambda(s)ds + M_t^a,$$

где M_t^a есть $\mathcal{F}_t^X$-интегрируемый с квадратом мартингал с квадратичной вариацией

$$\left\langle M^a \right\rangle_t = \int\limits_0^t \lambda(s)ds.$$

Если $\mu(t)$ – предсказуемый случайный процесс (см. [3]), зависящий от прошлого и текущего состояния очереди, то поток обработанных заявок есть считающий процесс с интенсивностью $\mu(t)I\{M(t) > 0\}$, где $M(t)$ – текущее количество заявок в очереди. Таким образом, выражение для потока обработанных заявок N_t^d имеет вид

$$N_t^d = \int\limits_0^t \mu(s)I\{M(s) > 0\}ds + M_t^d,$$

где M_t^d есть $\mathcal{F}_t^X$-интегрируемый с квадратом мартингал с квадратичной вариацией

$$\left\langle M^d \right\rangle_t = \int\limits_0^t \mu(s)I\{M(s) > 0\}ds.$$

Предполагаем, что N_t^a и N_t^d независимы и не имеют скачков в одни и те же моменты времени. Это значит, что взаимная квадратичная вариация $\left\langle M^a, M^d \right\rangle_t = 0$.

Если $W(t)$ – управление доступом, т.е. случайная величина, принимающая одно из значений $\{0, 1\}$ (0 – отклонить заявку, 1 – принять заявку к обслуживанию), то тогда управляемый входящий поток есть

$$N_t^{a,c} = \sum_{\tau \leq t} I\{M(\tau) < M\}I\{W(\tau) = 1\}\Delta N_\tau^a,$$

где ΔN_τ^a – число заявок, поступивших за время Δt,

(П.1) $$E\left\{I\{W(t) = 1\}I\{M(t) < M\}|\mathcal{F}_t^X\right\} = u(t)I\{M(t) < M\} = u(t)I\{X_t \neq e_M\}$$

и

(П.2) $$E\left\{N_t^{a,c}|\mathcal{F}_t^X\right\} = \int\limits_0^t \lambda(s)u(s)ds + M_t^{d,X},$$

где $M_t^{d,X}$ – $\mathcal{F}_t^X$-интегрируемый с квадратом мартингал и $u(t) \in [0, 1]$ – $\mathcal{F}_t^X$-предсказуемый процесс. Далее разница между числом принятых и обработанных заявок равна

$$\Delta M_t = \Delta N_t^{a,c} - \Delta N_t^d,$$

и так как

$$I\{M(t)=i\}=I\{X_t=e_i\},$$

то

$$\Delta X_t = A^+ X_{t-}\Delta N_t^{a,c} + A^- X_{t-}\Delta N_t^d,$$

где $(M+1)\times(M+1)$ – матрицы A^+, A^- имеют вид

$$A^+ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Затем, используя выражение

$$X_t = X_0 + \sum_{\tau\le t}\Delta X_\tau$$

и принимая во внимание, что $N_t^{a,c}$ и N_t^d – это считающие процессы, получаем:

$$X_t = X_0 + \sum_{\tau\le t}\left[A^+X_{\tau-}\Delta N_\tau^{a,c} + A^-X_{\tau-}\Delta N_\tau^d\right] =$$

$$= X_0 + \int\limits_0^t A^+X_{s-}dN_s^{a,c} + \int\limits_0^t A^-X_{s-}dN_s^d.$$

Подставим мартингальное представление $N_t^{a,c}$ и N_t^d в написанное раннее выражение с учетом условного математического ожидания для $\mathcal{F}_t^X$. В итоге получаем

$$X_t = X_0 + \int\limits_0^t \left[A^+\lambda(s)u(s) + A^-\mu(s)\right]X_s ds + M_t^u = \tag{П.3}$$

$$= \int\limits_0^t A(s,u(s),\mu(s))X_s ds + M_t^{u,\mu},$$

где $M_t^{u,\mu}$ есть интегрируемый с квадратом $\mathcal{F}_t^X$-мартингал с квадратичной вариацией

$$\left\langle M^{u,\mu}\right\rangle_t = \int\limits_0^t \left[A^+X_sX_s^*(A^+)^*\lambda(s)u(s) + A^-X_sX_s^*(A^-)^*\mu(s)\right]ds.$$

Простые вычисления такие же, как, например, в [3], показывают, что квадратичная вариация равна

$$
\text{(П.4)} \qquad \left\langle M^{u,\mu} \right\rangle_t = \int_0^t \text{diag}\ (A(s, u(s), \mu(s))X_s)\ ds -
$$

$$
- \int_0^t \left[A(s, u(s), \mu(s))(\text{diag}\, X_s) + (\text{diag}\, X_s)A^*(s, u(s), \mu(s))\right]\, ds,
$$

где $\text{diag}\, K$ – диагональная матрица с элементами $\text{diag}\ (K)_{ii} = K_i$, что означает, что процесс X_t есть управляемый марковский процесс с матрицей генератора $A(t, u, \mu)$ [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Low S.H., Paganini F., Doyle J.C.* Internet Congestion Control // IEEE Control Systems Magazine. 2002. V. 22. N. 1. P. 28–43.
2. *Elliott R.J., Aggoun L. and Moore J.B.* Hidden Markov Models. Estimation and Control. New York: Springer Verlag, 1995.
3. *Miller B.M.* Optimization of queuing systems via stochastic control // Automatica (J. IFAC). 2009. V. 45. N. 6. P. 1423–1430.
4. *Васенин В. А., Симонова Г.А.* Математические модели управления трафиком в Интернете. Новые подходы, основанные на TCP/AQM механизмах // АиТ. 2005. № 8. С. 94–107.
5. *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.
6. *Davis M.H.A.* Markov Models and Optimization. London: Chapman and Hall, 1993.
7. *Миллер Б.М., Панков А.Р.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2007.
8. *Вегешна Ш.* Качество обслуживания в сетях IP. М.: Вильямс, 2003.
9. *Миллер А.Б.* Динамическое управление доступом при активных пользователях // Информ. процессы. 2009. Т. 9. № 1. С. 1–17.
10. *Bremaud P.* Optimal thinning of a point processes // SIAM J. Control Optim. 1979. V. 17. N. 2. P. 222–230.
11. *Floyd S. and Jacobson V.* Random Early Detection Gateways for Congestion Avoidance // IEEE/ACM Transactions Network. 1993. V. 1. N. 4. P. 393–413.
12. *Piunovskiy A.B.* Bicriteria optimization of a queue with a controlled input stream // Queueing Syst.: Theory Appl. 2004. V. 48. P. 159–184.
13. *Miller B.M., Miller G.B. and Siemenikhin K.* Control of Markov chains with constraints // Тр. VIII Междунар. конф. "Идентификация систем и задачи управления". М.: 2009. С. 737–760.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 06.11.2009