А. Г. Габелая, В. И. Иваненко, О. Н. Одарич, Стабилизируемость линейных автономных систем с запаздыванием, *Автомат. и телемех.*, 1976, выпуск 8, 12–16

УДК 62-50

СТАБИЛИЗИРУЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А. Г. ГАБЕЛАЯ, В. И. ИВАНЕНКО, О. Н. ОДАРИЧ

(Киев)

Доказана теорема, содержащая новые эффективные необходимые и достаточные условия стабилизируемости объекта управления, описываемого линейным дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом.

Предложен алгоритмический способ проверки полученного критерия.

1. Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, описываемый линейной системой дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

(1) $$dx(t)/dt=Ax(t)+A_\tau x(t-\tau)+Bu, \quad t\geqslant t_0\geqslant 0,$$

где $x\in R^n$ — вектор фазовых координат, $u\in R^m$ — вектор управления, $\tau=\text{const}>0$ — величина запаздывания, $A=\{a_{kj}\}$, $A_\tau=\{a^\tau_{kj}\}$, $B=\{b_{ki}\}$ — постоянные матрицы размерностей соответственно $n\times n$, $n\times n$, $n\times m$.

Допустим, что при отсутствии управляющего воздействия ($u\equiv 0$) невозмущенное движение системы (1) не является асимптотически устойчивым [1].

Следуя [1], введем в качестве элемента траекторий, соответствующего моменту t, отрезок траекторий $x_t(\theta)=x(t+\theta)$ $(-\tau\leqslant t\leqslant 0)$.

Будем изучать следующую задачу стабилизации системы (1):

Задача. Найти управление вида

(2) $$u=u[x_t(\theta)],$$

где $u_i=u_i[x_t(\theta)]$ — линейные функционалы, определенные на кривых $x_t(\theta)$ $(-\tau\leqslant\theta\leqslant 0)$, при котором невозмущенное движение $x=0$ системы (1) было бы асимптотически устойчивым.

Необходимые и достаточные условия разрешимости поставленной задачи были найдены в [2—4].

Целью настоящей работы является получение новых эффективных условий стабилизируемости систем с запаздывающим аргументом.

2. Решение задачи

Приведем сначала решение задачи стабилизируемости, содержащееся в работе [4].

Следуя [3, 4], введем в рассмотрение r постоянных матриц размерностей $l_\sigma\times m$ вида

(3) $$\Delta^{(\sigma)}=\{\Delta_{k_\sigma i}\}=\{b^T_{(i)}d^{*(k_\sigma)}_\sigma\} \qquad (k_\sigma=1,\dots,l_\sigma;\ i=1,\dots,m;\ \sigma=1,\dots,r),$$

где $b_{(i)}$ — i-й вектор-столбец матрицы B, r — число различных собственных значений системы

(4) $\qquad dx(t)/dt=Ax(t)+A_\tau x(t-\tau)$

с $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$ (система (4) может иметь лишь конечное число собственных значений с $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$ [4]); $d_\sigma^{*(k_\sigma)}$ — k_σ-й собственный вектор системы, сопряженной к (4)

(5) $\qquad dx^*(t)/dt=-A^Tx^*(t)-A_\tau^Tx^*(t-\tau),$

соответствующий собственному числу $\lambda_\sigma^*=-\lambda_\sigma(\operatorname{Re}\lambda_\sigma^*\leqslant 0)$ и определяемый условием

(6) $\qquad (-P^*+\lambda_\sigma J)\,d_\sigma^{*(k_\sigma)}=0$

($-P^*$ — оператор системы (5) [1], J — тождественный оператор); l_σ — число цепочек Жордана корневых элементов оператора $-P^*$, соответствующих собственному значению $\lambda_\sigma^*=-\lambda_\sigma(\operatorname{Re}\lambda_\sigma\geqslant 0)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1 [3, 4]. Линейная управляемая система с запаздыванием (1) стабилизируема тогда и только тогда, когда ранг каждой матрицы $\Delta^{(\sigma)}$ равен l_σ:

(7) $\qquad \operatorname{rank}\Delta^{(\sigma)}=l_\sigma \quad (\sigma=1,\ldots,r).$

Теорема 1 дает необходимое и достаточное условия стабилизируемости, однако для практического применения критерия (7) необходимо заранее найти все собственные векторы $d_\sigma^{*(k_\sigma)}$, соответствующие собственным значениям оператора $-P^*$ с неположительными вещественными частями.

Докажем другой критерий стабилизируемости, для проверки которого достаточно знание лишь собственных значений оператора P (системы (4)) с $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$.

Теорема 2. Для стабилизируемости линейной управляемой системы (1) в классе управлений (2) необходимо и достаточно выполнение условия

(8) $\qquad \operatorname*{rank}_{\forall s,\ \operatorname{Re}s\geqslant 0}(A+A_\tau e^{-s\tau}-sE,\ B)=n.$

Доказательство. Покажем эквивалентность условий (7) и (8).

Согласно (6), векторы $d_\sigma^{*(k_\sigma)}$, фигурирующие в матрицах $\Delta^{(\sigma)}$, удовлетворяют условиям

$$(-P^*-\lambda_\sigma^*J)\,d_\sigma^{*(k_\sigma)}=0 \qquad (\sigma=1,\ldots,r;\ k_\sigma=1,\ldots,l_\sigma),$$

λ_σ^* — собственное значение оператора $-P^*$ с $\operatorname{Re}\lambda_\sigma^*\leqslant 0$. Последнее соотношение эквивалентно условиям

(9) $\qquad (A^T+A_\tau^Te^{\lambda_\sigma^*\tau}+\lambda_\sigma^*E)\,d_\sigma^{*(k_\sigma)}=0 \qquad (\sigma=1,\ldots,r;\ k_\sigma=1,\ldots,l_\sigma).$

Подставив в (9) $\lambda_\sigma=-\lambda_\sigma^*$, имеем

(10) $\qquad (A^T+A_\tau^Te^{-\lambda_\sigma\tau}-\lambda_\sigma E)\,d_\sigma^{*(k_\sigma)}=0 \qquad (\sigma=1,\ldots,r;\ k_\sigma=1,\ldots,l_\sigma),$

т. е. $d_\sigma^{*(k_\sigma)}$ являются собственными векторами системы

(11) $\qquad dx(t)/dt=A^Tx(t)+A_\tau^Tx(t-\tau),$

соответствующими собственным значениям λ_σ, $\operatorname{Re}\lambda_\sigma\geqslant 0$,

(12) $\qquad |A^T+A_\tau^Te^{-\lambda_\sigma\tau}\lambda_\sigma E|=0 \qquad (\sigma=1,\ldots,r).$

Далее, так как собственному значению λ_σ соответствуют l_σ линейно независимых собственных векторов, притом любая линейная комбинация этих векторов также является собственным вектором, соответствующим λ_σ, заключаем: любой (ненулевой) собственный вектор системы (11) (т. е. любой вектор, удовлетворяющий условию (10)) d_σ^*, соответствующий собственному значению λ_σ, задается в виде

$$(13)\qquad d_\sigma{}^* = \sum_{k_\sigma=1}^{l_\sigma} \alpha_{k_\sigma} d_\sigma^{*(k_\sigma)} \qquad (\sigma=1,\ldots,r),$$

где α_{k_σ} — произвольные постоянные, такие, что

$$\sum_{k_\sigma=1}^{l_\sigma} \alpha_{k_\sigma}^2 \neq 0.$$

Покажем, что (7) эквивалетно условиям

$$(14)\qquad B^T d_\sigma{}^*=0 \qquad (\alpha=1,\ldots,r).$$

В самом деле, так как

$$(15)\qquad B^T d_\sigma{}^* = B^T \sum_{k_\sigma=1}^{l_\sigma} \alpha_{k_\sigma} d_\sigma^{*(k_\sigma)} = \sum_{k_\sigma=1}^{l_\sigma} \alpha_{k_\sigma} B^T d_\sigma^{*(k_\sigma)},$$

а

$$(16)\qquad \Delta^{(\sigma)} = \{B^T d_\sigma^{*(1)}, B^T d_\sigma^{*(2)}, \ldots, B^T d_\sigma^{*(l_\sigma)}\} \qquad (\sigma=1,\ldots,r)$$

(см. (3)), легко видеть, что условия

$$\operatorname{rank} \Delta^{(\sigma)} = \operatorname{rank}\{B^T d_\sigma^{*(1)}, B^T d_\sigma^{*(2)}, \ldots, B^T d_\sigma^{*(k_\sigma)}\} = l_\sigma \qquad (\sigma=1,\ldots,r)$$

эквивалентны (14).

Таким образом, (7) эквивалентно условиям (14) для любого ненулевого (собственного) вектора $d_\sigma{}^*$, удовлетворяющего уравнению

$$(A^T+A_\tau{}^T e^{-\lambda_\sigma\tau}-\lambda_\sigma E)\, d_\sigma{}^*=0$$

при λ_σ, $\operatorname{Re}\lambda_\sigma \geqslant 0$.

Как нетрудно видеть, эти условия эквивалентны отсутствию нетривиальных решений у системы

$$(17)\qquad (A^T+A_\tau{}^T e^{-s\tau}-sE)\, x=0, \qquad B^T x=0$$

при любых значениях параметра s с $\operatorname{Re} s \geqslant 0$.

Наконец, последнее условие можно записать следующим образом:

$$\operatorname*{rank}_{\forall s,\ \operatorname{Re} s\geqslant 0} \begin{pmatrix} A^T + A_\tau^T e^{-s\tau} - sE \\ B^T x \end{pmatrix} = \operatorname*{rank}_{\forall s,\ \operatorname{Re} s\geqslant 0} (A + A_\tau e^{-s\tau} - sE, B) = n,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что условие (8) достаточно проверить лишь для $s=\lambda_\sigma$ $(\sigma=1,\ldots,r)$, $\operatorname{Re}\lambda_\sigma \geqslant 0$, так как для несобственных значений s условие (8) автоматически выполняется.

Таким образом, для проверки предложенного критерия стабилизируемости необходимо заранее найти собственные значения системы (4), т. е. решать уравнение с квазиполиномиальной левой частью

$$(18)\qquad |A+A_\tau e^{-s\tau}-sE|=0.$$

Рассмотрим способ, позволяющий в некоторых случаях существенно облегчить задачу проверки критерия стабилизируемости системы (1).

Для этого отметим, что выполнение (8) эквивалентно отсутствию решения с $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ у системы

$$(19)\qquad |\tilde\Delta_i(s)|=0, \quad i=1,\ldots,N=C_{n+m}^{n},$$

где $|\tilde\Delta_i(s)|$ — всевозможные миноры n-го порядка матрицы $(A+A_\tau e^{-s\tau}-sE, B)$. Левые части уравнений системы (19) представляют собой квазиполиномы, причем (что существенно) некоторые из квазиполиномов $|\tilde\Delta_i(s)|$ могут вырождаться в полиномы.

Найдя корни s с $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ самого простого уравнения из системы (19), а потом подставляя эти корни (если такие имеются; в противном случае сразу заключаем о стабилизируемости системы (1)) в остальные, можно изучить совместность системы уравнений (19) в правой полуплоскости.

Так, в частности, если $\operatorname{rank} B=n-1$, то система (19) будет содержать уравнения вида

$$(20)\qquad \begin{vmatrix} a_{1i}+a_{1i}^{\tau}e^{-s\tau}-s & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\,n-1} \\ a_{2i}+a_{2i}^{\tau}e^{-s\tau} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2\,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ni}+a_{ni}^{\tau}e^{-s\tau} & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n\,n-1} \end{vmatrix}=0.$$

Уравнение (20) для каждого фиксированного i, $1\leqslant i\leqslant n$ фактически представляет собой характеристическое уравнение одномерной системы с запаздывающим аргументом (при этом в некоторых случаях какое-нибудь из уравнений вида (20) может вырождаться в линейное, что предельно упрощает задачу (см. пример)).

Изучая сравнительно легко поддающееся исследованию уравнение (20) (например, методом D-разбиений), можно получить информацию о корнях системы (19). В частности, если какое-нибудь из уравнений вида (20) для данной системы не имеет корней с $\operatorname{Re} s\geqslant 0$, то система стабилизируема. Если же рассмотренное нами уравнение вида (20) имеет корни с $\operatorname{Re} s\geqslant 0$, то, подставляя поочередно эти корни в остальные уравнения (19), проверяем, является ли какой-нибудь из них решением всей системы (19). Рассматриваемая система будет стабилизируемой, если ни один из этих корней не удовлетворяет системе уравнений (19), и нестабилизируемой в противном случае.

Таким образом, предложенный алгоритмический способ позволяет заменить в процедуре проверки критерия стабилизируемости (8) задачу решения характеристического уравнения системы с запаздывающим аргументом n-го порядка нахождением корней наиболее простого из квазиполиномов $|\tilde{\Delta}_i(s)|$, $i=1,\dots,N$.

Проиллюстрируем сказанное на простом примере.

3. Пример

Рассмотрим систему

$$(21)\qquad \begin{aligned} dx_1(t)/dt&=\sum_{i=1}^{2}\left(a_{1i}x_i(t)+a_{1i}^{\tau}x_i(t-\tau)\right)+b_1u,\\ dx_2(t)/dt&=\sum_{i=1}^{2}\left(a_{2i}x_i(t)+a_{2i}^{\tau}x_i(t-\tau)\right)+b_2u. \end{aligned}$$

Пусть (21) не является асимптотически устойчивой при $u=0$. Покажем, что (21) стабилизируема в классе линейных функционалов при условии, что ее коэффициенты удовлетворяют условиям

$$(22)\qquad b_2\neq 0,\qquad a_{11}^{\tau}b_2-a_{21}^{\tau}b_1=0,\qquad a_{11}-a_{21}\frac{b_1}{b_2}<0.$$

Действительно, одно из уравнений системы (19) в этом случае будет иметь вид

$$(23)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}+a_{11}^{\tau}e^{-s\tau}-s & b_1 \\ a_{21}+a_{21}^{\tau}e^{-s\tau} & b_2 \end{vmatrix}=(a_{11}b_2-b_1a_{21})+(a_{11}^{\tau}b_2-a_{21}^{\tau}b_1)e^{-s\tau}-sb_2=0.$$

Уравнение (23) при выполнении (22) имеет единственное решение

$$s=a_{11}-a_{21}\frac{b_1}{b_2}<0.$$

Таким образом, система уравнений (19) для рассмотренного случая не будет иметь решений с $\operatorname{Re} s\geqslant 0$, откуда заключаем выполнение условия теоремы 2, т. е.

$$\operatorname*{rank}_{\forall s,\ \mathrm{Re}\, s\geqslant 0}\begin{pmatrix} a_{11}+a_{11}^{\tau}e^{-s\tau}-s & a_{12}+a_{12}^{\tau}e^{-s\tau} & b_1 \\ a_{21}+a_{21}^{\tau}e^{-s\tau} & a_{22}+a_{22}^{\tau}e^{-s\tau}-s & b_2 \end{pmatrix}=2.$$

Аналогично можно показать стабилизируемость системы (21) при выполнении условий

$$b_1\neq 0,\qquad a_{12}^{\tau}b_2-a_{22}^{\tau}b_1=0,\qquad a_{22}-a_{12}\frac{b_2}{b_1}<0.$$

Пусть далее коэффициенты системы (21) удовлетворяют условиям

$$b_2\neq 0,\qquad a_{11}^{\tau}b_2-a_{21}^{\tau}b_1=0,\qquad a_{11}-a_{21}\frac{b_1}{b_2}\geqslant 0. \tag{24}$$

Тогда уравнение (23) имеет решение

$$s=a_{11}-a_{21}b_1/b_2\geqslant 0,$$

и для несовместности в правой полуплоскости (включая мнимую ось) системы (19) в данном случае необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{11}^{\tau}e^{-\left(a_{11}-a_{21}\frac{b_1}{b_2}\right)\tau}-\left(a_{11}-a_{21}\frac{b_1}{b_2}\right) & a_{12}+a_{12}^{\tau}e^{-\left(a_{11}-a_{21}\frac{b_1}{b_2}\right)\tau} \\ a_{21}+a_{21}^{\tau}e^{-\left(a_{11}-a_{21}\frac{b_1}{b_2}\right)\tau} & a_{22}+a_{22}^{\tau}e^{-\left(a_{11}-a_{21}\frac{b_1}{b_2}\right)\tau}-\left(a_{11}-a_{21}\frac{b_1}{b_2}\right) \end{vmatrix}^2+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{12}+a_{12}^{\tau}e^{-\left(a_{11}-a_{21}\frac{b_1}{b_2}\right)\tau} & b_1 \\ a_{22}+a_{22}^{\tau}e^{-\left(a_{11}-a_{21}\frac{b_1}{b_2}\right)\tau}-\left(a_{11}-a_{21}\frac{b_1}{b_2}\right) & b_2 \end{vmatrix}^2\neq 0.$$

Таким образом, приходим к выводу: система (21) стабилизируема при выполнении условий (24), (25).

Аналогично можно исследовать стабилизируемость системы (19) при выполнении условий

$$b_1\neq 0,\qquad a_{12}^{\tau}b_2-a_{22}^{\tau}b_1=0,\qquad a_{22}-a_{12}\frac{b_2}{b_1}\geqslant 0.$$

В заключение отметим, что полученный критерий стабилизируемости является обобщением ранее полученного авторами критерия для системы, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями [5], на системы с запаздыванием.

Поступила в редакцию
2 июня 1975 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.
2. *Красовский Н. Н., Осипов Ю. С.* О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования. Техническая кибернетика, № 6, стр. 3–15, 1963.
3. *Красовский Н. Н.* О стабилизации динамических систем дополнительными силами. Дифференциальные уравнения, т. 1, № 1, стр. 5–16, 1965.
4. *Осипов Ю. С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием. Дифференциальные уравнения, т. 1, № 5, стр. 605–618, 1965.
5. *Габелая А. Г., Иваненко В. И., Одарич О. Н.* О необходимых и достаточных условиях стабилизации линейных систем. Докл. АН УССР, сер. А, № 4, стр. 329–332, 1975.

STABILIZABILITY OF LINEAR AUTONOMOUS SYSTEMS WITH A DELAYED ARGUMENT

A. G. GABELAYA, V. I. IVANENKO, O. N. ODARICH

A theorem is proved which contains new necessary and sufficient conditions for stabilizability of a plant described by a linear differential equation with a delayed argument. An algorithmical method to check the resulant criterion is proposed.
