Ю. Н. Андреев, Алгебраические методы пространства состояний в теории управления линейными объектами (обзор зарубежной литературы), *Автомат. и телемех.*, 1977, выпуск 3, 5–50

УДК 62-501.12

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

(обзор зарубежной литературы)

Ю. Н. АНДРЕЕВ

(Москва)

Рассматриваются алгебраические методы пространства состояний в теории линейных конечномерных систем с непрерывным временем. Приводятся основные результаты, связанные с каноническим представлением линейных систем, с управлением при помощи линейной обратной связи по состоянию и по выходу, с задачами оптимального (по квадратичному критерию качества) и модального управления, с конструированием идентификаторов (наблюдателей) состояния. Обсуждаются вопросы создания «грубых» регуляторов, приложения, вопросы использования аппарата абстрактной алгебры, связь алгебраических методов пространства состояний с методами классической теории регулирования.

1. Введение. Второй метод Ляпунова

За последние 15 лет в литературе большое внимание уделялось разработке алгебраических методов пространства состояний (МПС).

В настоящем обзоре обсуждаются результаты разработки МПС применительно к тем задачам управления, в которых рассматриваются конечномерные стационарные линейные объекты, управляемые при помощи линейной обратной связи, без ограничения фазовых координат и управляющих переменных. Этому направлению посвящено значительное количество зарубежных работ (главным образом, американских).

Наряду с традиционными результатами в обзоре обсуждаются вычислительные аспекты теории, вопросы чувствительности и приложения.

Затронутым здесь темам посвящены обзорные статьи [2, 25—27, 160, 200, 243, 265, 283, 299, 386, 390]. Среди книг необходимо отметить наиболее удачные, на наш взгляд, вводные курсы, предназначенные для начального ознакомления с предметом [126, 128, 130, 228, 255, 281, 315, 346, 418, 441, 466] и монографии [5, 6, 24, 56, 78, 94, 122, 124, 129, 131, 139, 219, 225, 244, 353, 357, 388, 389, 397, 471, 503]. Проблемы и перспективы МПС были предметом дискуссии на V Парижском конгрессе ИФАК [266].

Второй метод Ляпунова является старейшим из методов, называемых в настоящее время методами пространства состояний. Кроме того, именно аппарат второго метода в значительной степени способствовал формированию современной теории регулирования [225], в чем нетрудно убедиться, ознакомившись с подробной статьей одного из пионеров теории Р. Калмана [222], посвященной второму методу Ляпунова.

Глубокая связь основных результатов, полученных в рамках МПС, со вторым методом Ляпунова отмечалась в [5, 222, 244, 453].

В интересующем нам линейном, стационарном, конечномерном случае, когда уравнение n-мерной системы имеет вид

(1) $$\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t),$$

функция Ляпунова может быть определена как квадратичная форма $\mathbf{x}'(t)V\mathbf{x}(t)$, где положительно определенная матрица удовлетворяет линейному матричному уравнению Ляпунова

$$A'V+VA=-W. \tag{2}$$

Основной результат (теорема Ляпунова) состоит в том, что система (1) является асимптотически устойчивой тогда и только тогда, когда уравнение (2) имеет положительно определенное решение V при любой положительно определенной матрице W.

Теорема может быть усилена [222] заменой требования положительной определенности матрицы W требованием ее неотрицательной определенности при дополнительном условии, что функция $\mathbf{x}'(t)W\mathbf{x}(t)$ не обращается в тождественный нуль при любом $x(0)\neq 0$.

Существует тесная связь между теоремой Ляпунова и другими алгебраическими критериями устойчивости: критерием Рауса – Гурвица [222, 325], теоремой Эрмита [214, 368], критерием Шура – Кона [214, 326], методом сопутствующей матрицы [360]. Основное преимущество второго метода при проверке условий устойчивости связано с возможностью оперировать при вычислениях элементами матрицы A, минуя вычисления коэффициентов характеристического многочлена этой матрицы.

Второй метод используют для оценки динамики переходного процесса. Вещественная часть доминирующего собственного значения матрицы A может быть оценена, если известно решение уравнения (2), следующим образом [222]:

$$\mathrm{Re}[\lambda_{\text{макс}}(A)]\leqslant-\lambda_{\text{мин}}(WV^{-1}).$$

Кроме того, уравнение (2) может быть использовано для оценки квадратичного функционала вида

$$J=\int^{\infty}\mathbf{x}'(t)W\mathbf{x}(t)\,dt, \tag{3}$$

где $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет уравнению (1). Если выполнены условия теоремы Ляпунова, то интеграл (3) сходится и его значение равно $\mathbf{x}'(0)V\mathbf{x}(0)$. Применению функций Ляпунова для решения оптимальных задач с квадратичным критерием качества посвящены работы [5, 28, 244].

Метод Ляпунова успешно используется для оценки чувствительности по отношению к нестабильности параметров системы и по отношению к внешним возмущениям [222, 415, 416]. Во всех названных вопросах важную роль играет устанавливаемое теоремой Ляпунова соотношение между спектрами матриц A, V, W.

В этой связи дополнительно к общеизвестным теоремам полезными оказываются следующие результаты. В [272] доказано, что уравнение $A'V+VA=-2\sigma W$ при любой симметричной положительно определенной матрице W и при любом $\sigma>0$ имеет положительно определенное решение V, удовлетворяющее условию $V<W$, тогда и только тогда, когда вещественные части собственных значений матрицы A меньше, чем $-\sigma$.

Если V и W – положительно определенные матрицы с собственными значениями $0<\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\ldots\leqslant\alpha_n$ и $0<\beta_1\leqslant\beta_2\leqslant\ldots\leqslant\beta_n$ соответственно, A – устойчивая матрица, причем собственные значения положительно определенной матрицы AA' отвечают соотношению $0<\sigma_1\leqslant\sigma_2\leqslant\ldots\leqslant\sigma_n$, и если матрицы A, V, W связаны уравнением (2), то выполнены неравенства [417]:

$$\alpha_1\geqslant\frac{\beta_1}{2\sqrt{\sigma_n}},\qquad \alpha_n\geqslant\frac{\beta_n}{2\sqrt{\sigma_1}}$$

Второй метод служит основой для решения задач синтеза систем управления. Например, если под синтезом понимать выбор линейной обратной связи по состоянию (ЛОСС) вида $\mathbf{u}(t)=K\mathbf{x}(t)$ для системы, описываемой уравнением $\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t)$, где B — матрица $(n\times m)$, то решение такой задачи при помощи второго метода Ляпунова можно представить согласно следующей идеализированной схеме: 1) в соответствии с желаемыми характеристиками замкнутой системы выбираем матрицы W и V; 2) вычисляем матрицу $\tilde{A}$ замкнутой системы, используя уравнение (2); 3) определяем матрицу обратной связи K из уравнения $\tilde{A}=A+BK$.

В реальных ситуациях реализация любого из этих этапов является сложной задачей. Трудности математического порядка (существование решений, их единственность, наличие «хорошего» вычислительного алгоритма и т. п.) усугубляются разнообразными дополнительными требованиями и ограничениями, которые необходимо учесть при постановке задачи синтеза. Наиболее часто встречаются следующие задачи:

1. Считается, что требования к системе сформулированы заданием желаемого спектра матрицы $\tilde{A}$ системы с обратной связью. Тогда требуется выбрать матрицу K так, чтобы $\tilde{A}=A+BK$ имела заданный спектр. Один из подходов к решению этой задачи вторым методом Ляпунова обсуждался в [345, 453].

2. Если требуется выбрать матрицу K из условий минимума квадратичного функционала вида (3), то имеем задачу об оптимальном регуляторе состояния [208]. Связь этой задачи со вторым методом обсуждалось в [5, 222]. На практике, как правило, встречаются различные модификации этих задач, связанные с необходимостью учета ряда дополнительных условий: отсутствие полной информации о состоянии $\mathbf{x}(t)$, необходимость учета неопределенности параметров матриц A, B и учета внешних возмущений, шумов в каналах измерения, наличие требований к характеру переходного процесса и полосе частот, необходимость точного слежения за командными сигналами и т. д.

Методы решения таких алгебраических задач и составляют основу алгебраической теории управления, использующей методы пространства состояний.

В приложениях часто возникает необходимость численного решения матричных линейных уравнений типа (2).

Численные методы решения линейных матричных уравнений приведены в [21, 29, 169, 188, 189, 205, 238, 242, 246, 314, 437]. Эффективная процедура вычисления матрицы V для случая, когда матрица A является сопровождающей матрицей своего характеристического многочлена, дана в [287]. Удобная форма необходимых и достаточных условий существования решения уравнения $AX+XB=C$ и общая формула решения приведены в [242].

2. Управляемость и наблюдаемость. Канонические представления систем в пространстве состояний

Большинство работ, упоминаемых в настоящем обзоре, начинаются словами: «Пусть линейная стационарная управляемая система описывается уравнениями:

$$\text{(ЛС)}\qquad \dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t),\quad \mathbf{y}(t)=C\mathbf{x}(t),$$

где $\mathbf{x}(t)\in R^n$, $\mathbf{u}(t)\in R^m$, $\mathbf{y}(t)\in R^p$, а A, B, C — матрицы соответствующей размерности».

При изучении системы (ЛС) широко используются понятия управляемости и наблюдаемости, впервые введенные Калманом [207]. Эти понятия оказались полезными при изучении структурных свойств линейных систем и при решении задач оптимального и модального управления (см. ниже).

Наиболее удобная форма критерия управляемости имеет следующий вид [55, 150, 224]. Пара матриц $\{A, B\}$ является управляемой тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B]=n$. Двойственным образом пара матриц $\{A, C\}$ является наблюдаемой тогда и только тогда, когда пара $\{A', C'\}$ управляема.

Понятия управляемости и наблюдаемости и их приложения к решению различных задач управления обсуждались в [22, 30, 31, 150, 174, 209, 333, 352, 460]. Изучение структурных свойств системы (ЛС) было начато в работе [210], где показано, что пространство состояний системы (ЛС) может быть представлено как прямая сумма четырех подпространств, содержащих соответственно состояния: 1) управляемые, но ненаблюдаемые, 2) управляемые и наблюдаемые, 3) неуправляемые и ненаблюдаемые, 4) неуправляемые, но наблюдаемые. Такого рода декомпозиция линейной системы оказывается полезной при изучении канонической структуры линейных систем [35, 76, 174, 176, 179, 215, 217, 394, 485].

На практике основной интерес представляют системы, которые являются одновременно управляемыми и наблюдаемыми. При исследовании таких систем громадную роль играет выбор базиса в пространстве состояний. Нетрудно убедиться в том, что замена переменной $\widetilde{\mathbf{x}}(t)=P\mathbf{x}(t)$, где P — любая неособенная матрица, не меняет основных свойств системы (ЛС) (например, неизменной остается передаточная функция системы). Замена базиса в пространстве состояний является основным приемом доказательства теоретических результатов. Тот же прием часто лежит в основе вычислительных алгоритмов. Для системы с одним входом и одним выходом управляемость пары $\{A, \mathbf{b}\}$ обеспечивает наличие базиса в пространстве R^n, в котором матрица A является сопровождающей матрицей своего характеристического многочлена, а вектор $\mathbf{b}$ имеет единственную ненулевую координату $\mathbf{b}'=[00\ \ldots\ 1]$ [55, 212, 225]. Это представление пары $\{A, \mathbf{b}\}$ единственно. Результат впервые был установлен Р. Калманом [212]. Аналогичное представление имеет место и для наблюдаемой пары $\{A, \mathbf{c}\}$ ввиду дуальности понятий управляемости и наблюдаемости.

Для многомерной системы существует много способов выбрать базис, в котором матрицы $\{A, B\}$ имели бы «каноническую» форму. Канонические формы, получаемые «по аналогии» с одномерным случаем, приведены в [64, 198, 206, 261]. Другие канонические формы предлагались в работах [204, 249]. Методически простое и подробное изложение двух способов построения канонических представлений (ЛС) приведено в [78]. В [173] предложено каноническое представление, в котором матрица A имеет жорданову форму. Канонические представления для нестационарных линейных объектов обсуждались в [211, 367, 371, 374, 421]. Алгоритм вычисления двух типов канонических представлений, приспособленных «для управления» и «для наблюдения», содержит работа [500]. Обсуждение и сравнение ряда канонических представлений для многомерных систем дано в [261, 458, 498]. В [261] приведено каноническое представление (ЛС), которое является, по-видимому, наиболее популярным.

Показано [261], что для управляемой и наблюдаемой (ЛС) всегда можно построить с помощью невырожденного преобразования P эквивалентную систему $\{\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}\}$, задаваемую матрицами:

$$\widetilde{A}=PAP^{-1}=[A_{ij}],\quad i, j=1, 2, \ldots, p;\quad \widetilde{B}=BP;\quad \widetilde{C}=P^{-1}C;$$

$$A_{ii}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{ii1} & a_{ii2} & a_{ii3} & \ldots & a_{iin_i} \end{bmatrix};$$

(4)

$$A_{ij} = \underset{(n_i \times n_j)}{} \begin{bmatrix} & 0 & \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{ij1} & a_{ij2}\ \ldots & a_{ijn_i} \end{bmatrix}, \quad i \neq j, \quad P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \ldots \\ P_p \end{bmatrix},$$

$$P_i = \begin{bmatrix} c_i' \\ c_i A \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_i' A^{n_i - 1} \end{bmatrix},$$

$$P^{-1} = [D_1, D_2, \ldots, D_p], \quad D_i = [d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{in}].$$

В [167] показано, что в представлении (4) некоторые элементы матриц $[A_{ij}]$ заведомо равны нулю, а именно выполняются следующие равенства:

$$a_{ijk} = 0, \qquad k > n_i + 1,$$

$$a_{ijk} = 0, \qquad k = n_i + 1, \quad i < j.$$

Упомянутые канонические формы не являются инвариантными (за исключением вырожденных случаев). Проблема инвариантных канонических представлений для многомерных систем обсуждалась в [61, 221, 342, 382]. Основные результаты удачно изложены в [343], и на них остановимся здесь подробнее.

Для системы (ЛС) рассматривается пространство пар матриц $\{A, B\} \in R^{n \times (n+m)}$ и множество преобразований вида $\tilde{A} = PAP^{-1}$, $\tilde{B} = PB$ (для всех невырожденных матриц P). Основная идея построения канонического представления для пары $\{A, B\}$ иллюстрируется при помощи коммутативной диаграммы (рис. 1) [343], где $R^{n \times (n+m)}$ — множество всех пар матриц $\{A, B\}$ указанной размерности, Q — множество так называемых канонических форм, а y — функция (отображение), которая позволяет для каждой пары $\{A, B\}$ определить соответствующую каноническую форму в Q. Предполагается, что любое свойство пары $\{A, B\}$ может быть описано при помощи функции $f: R^{n \times (n+m)} \to S$, где S — подходящее множество. Как следует из диаграммы, после введения канонической формы изучение указанной функции f заменяется изучением новой функции h (которая проще). В соответствии с этой интерпретацией автор [343] рассматривает задачу отыскания инвариантного канонического представления пары $\{A, B\}$ как задачу отыскания универсального элемента некоторой категории. Для точной формулировки этой проблемы абстрактной алгебры вводится класс функций $W(S)$. Пусть для каждого множества S функция $W(S)$ является множеством всех функций $f: R^{n \times (n+m)} \to S(\{A, B\} \to f\{A, B\})$, таким, что для каждой неособенной матрицы $P \in R^{n \times n}$ имеет место равенство $f(PAP^{-1}, PB) = f(A, B)$. Тогда проблема универсальности формулируется так: найти множество Q и функцию $y \in W(Q)$, такую, что для каждого множества и для каждой функции $f \in W(S)$ существует в точности одна функция $h: Q \to S$, такая, что $f = h \circ y$ (т. е. диаграмма рис. 1 коммутативна). Пару $\{y, Q\}$, обладающую названным свойством, называют универсальным элементом (для функтора из категории множеств в категорию множеств) [267]. Задача имеет стандартное решение [267, 268]. Вводится отношение E, определенное следующим образом: $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$ находится в отношении E с $\{A, B\}$ тогда и толь-

$$\begin{tikzcd} R^{n \times (n+m)} \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "f"'] & & Q \arrow[dl, "h"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Рис. 1

ко тогда, когда существует неособенная матрица P, такая, что $\tilde{A}=PAP^{-1}$ и $\tilde{B}=PB$. Ясно, что E есть отношение эквивалентности в пространстве $R^{n\times(n+m)}$. Введем Q как фактор-множество по модулю $E:R^{n\times(n+m)}$ и в качестве функции y выберем проекцию $R^{n\times(n+m)}\to R^{n\times(n+m)}/E$. Тогда пара $\{y, Q\}$ является универсальным элементом для сформулированной задачи. Более того, это решение единственно в смысле, определенном теоремой о единственности универсального элемента [268]. Чтобы сделать решение доступным для численных вычислений, необходимо ввести дополнительные ограничения на y и Q. Обычно желательно получить Q в качестве подмножества пространства R^N (для некоторого целого N, которое надо выбрать наименьшим). Кроме того, желательно, чтобы функция y была по возможности простой (например, рациональной функцией). После введения таких ограничений получается уже другая проблема универсальности, которая требует нового решения (вообще говоря, эта проблема может и не иметь решения, если введено слишком много ограничений на Q и y).

В [343] показано, что решение проблемы универсальности, сформулированной выше, эквивалентно отысканию пары $\{y, Q\}$, которая удовлетворяет следующим свойством инвариантности, независимости и полноты:

инвариантность: $y(PAP^{-1}, PB)=y(A, B)$ для любой несингулярной матрицы $P\in R^{n\times n}$;

независимость: для каждого $s\in Q$ существует пара $(A, B)\in R^{n\times(n+m)}$, такая, что $y(A, B)=s$;

полнота: если для двух пар $(\tilde{A}, \tilde{B})$ и (A, B) из $R^{n\times(n+m)}$ выполнено равенство $y(\tilde{A}, \tilde{B})=y(A, B)$, то существует невырожденная матрица $P\in R^{n\times n}$, такая, что $\tilde{A}=PAP^{-1}$ и $\tilde{B}=PB$.

Приведено решение задачи отыскания для каждой пары $(A, B)\in R^{n\times(n+m)}$ положительного числа N и вектора $y(A, B)\in R^N$, координаты которого составляют полную систему независимых инвариантов для пары $\{A, B\}$ в соответствии с преобразованиями $\tilde{A}=PAP^{-1}$, $\tilde{B}=PB$ (для произвольной неособенной матрицы $P\in R^{n\times n}$).

Полный набор инвариантов системы в том случае, когда пара $\{A, B\}$ управляема и $\operatorname{rank} B=m$, определен следующим образом.

Рассматривается упорядоченная последовательность векторов:

(5) $$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m, A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \ldots, A\mathbf{b}_m, \ldots, A^2\mathbf{b}_1, \ldots, A^2\mathbf{b}_m, \ldots,$$

где $\mathbf{b}_i$ — столбцы матрицы B. Вектор $A^k\mathbf{b}_j$ из набора (5) называется предшествующим вектору $A^p\mathbf{b}_q$ из (5) тогда и только тогда, когда $A^k\mathbf{b}_j$ расположен перед $A^p\mathbf{b}_q$ в (5), т. е. тогда и только тогда, когда $km+j<pm+q$.

Для каждого числа $i\in\{1, \ldots, m\}$ i-м *инвариантом Кронекера* n_i называется наименьшее положительное число, такое, что вектор $A^{n_i}\mathbf{b}_i$ есть линейная комбинация предшествующих ему векторов. Показано, что $n_1+n_2+\ldots+n_m=n$. Далее доказано, что существует в точности одно упорядоченное множество чисел $\alpha_{ijk}\in R$, определенных для $i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, i-1$, $k=0, 1, \ldots, \min(n_i, n_j-1)$ и для $i=1, 2, \ldots, m$; $j=i, i+1, \ldots, m$; $k=0, 1, \ldots, \min(n_i, n_j)-1$, такое, что для каждого $i=1, 2, \ldots, m$ имеет место равенство

$$A^{n_i}\mathbf{b}_i=\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{\min(n_i,n_j-1)}\alpha_{ijk}A^k\mathbf{b}_j+\sum_{j=1}^{m}\sum^{\min(n_i,n_j)-1}\alpha_{ijk}A^k\mathbf{b}_j,$$

где n_i — инварианты Кронекера.

Основной результат, решающий задачу выбора независимой системы инвариантов, следующий: если пара $\{A, B\}$ управляема и $\operatorname{rank} B=m$, то числа n_i и α_{ijk}, определенные выше, составляют полную систему независимых инвариантов для пары $\{A, B\}$ по отношению к преобразованиям вида $\tilde{A}=PAP^{-1}$, $\tilde{B}=PB$ для произвольной невырожденной матрицы $P\in R^{n\times n}$.

В работе дан алгоритм вычисления канонического представления пары матриц $\{A, B\}$, которое определено только в терминах инвариантов n_i, α_{ijk}.

Подробно обсуждаются свойства инвариантов. В частности, обсуждаются приложения полученных результатов к решению проблемы выбора стационарной обратной связи по состоянию, проблемы классификации управляемых систем (см. также [61]), проблемы построения канонических форм, имеющих минимальное число параметров.

Развитая в этой работе теория может быть распространена на неуправляемые системы. Например, в случае отсутствия матрицы B рассмотренная выше задача становится эквивалентной классической задаче, решение которой дается жордановой формой матрицы. Хотя набор чисел n_i, α_{ijk} является системой независимых инвариантов задачи, но эта система уже не удовлетворяет условию полноты для неуправляемой пары $\{A, B\}$.

Различные аспекты использования инвариантов Кронекера в теории линейных систем обсуждались в [221, 388, 382, 463].

3. Модальное управление

Термин «модальное управление» введен в [384], где рассмотрена задача управления дистилляционной колонной — объектом, описываемым системой нелинейных дифференциальных уравнений 1000-го порядка. Идея метода состояла в том, чтобы при помощи небольшого числа измерений выявить наиболее медленно затухающие моды линейной модели объекта и подобрать управление в виде обратной связи, которое обеспечивало бы уменьшение постоянных времени этих мод. Дальнейшему развитию этих методов применительно к управлению химическими и другими объектами большой размерности (бойлер, ядерный реактор, летательный аппарат) посвящены работы [18, 32, 97, 106, 254, 348, 350, 387]. Значение модального анализа электрических цепей отмечалось в [121]. Для всех этих работ характерен полуэмпирический неформальный подход, свойственный пионерской работе [384]. В настоящее время под модальным управлением, как правило, понимают задачу конструирования регуляторов с заданным спектром, т. е. задачу выбора такой обратной связи, которая обеспечивает сдвиг либо желаемое размещение всех или только некоторых полюсов замкнутой системы на комплексной плоскости [134, 353, 427]. Популярное введение в теорию модального управления имеется в [134]. В [2, 155, 200, 299, 427, 470] дан обзор основных результатов развития техники модального управления.

Основной задачей модального управления является задача выбора такой линейной обратной связи по состоянию (ЛОСС) вида $\mathbf{u}=K\mathbf{x}$ (где K — постоянная матрица), чтобы матрица замкнутой системы $[A+BK]$ имела желаемый набор собственных чисел. Для случая управляемой системы с одним входом эта задача имеет простое и единственное решение [55, 219, 225]. Для случая системы с многими входами решение не является единственным. В [486] доказано, что для управляемой пары $\{A, B\}$ существует матрица K, такая, что матрица $[A+BK]$ имеет произвольный набор собственных значений (комплексные числа входят в этот набор вместе со своими сопряженными). После установления этого факта появилось много работ, посвященных решению этой задачи [77, 299, 362, 363, 365]. Это связано с неединственностью решения, а также с тем обстоятельством, что могут быть предложены различные алгоритмы вычисления матрицы K.

В [427] приведен алгоритм выбора матрицы K единичного ранга. В дальнейшем было предложено еще несколько аналогичных алгоритмов [78, 98, 142, 172, 294, 363, 365, 381]. Все эти работы основаны на том, что для выбора n собственных чисел n-мерной системы необходимо наложить n ограничений на матрицу K. Если m — размерность вектора входа, то матрица K имеет размерность $m \times n$. Ограничивая n элементов матрицы K (т. е. одну ее строку), можно, вообще говоря, расположить произвольным образом n собственных значений матрицы $[A+BK]$. При этом $n\times(m-1)$ элементов матрицы K произвольны и могут быть выбраны так, чтобы удовлетворить другим конструктивным требованиям. Основная идея работы [427] и состоит как раз в том, чтобы использовать матрицу K, имеющую лишь одну строку, т. е. матрицу единичного ранга. Такой выбор приводит к задаче только с $m-1$ произвольными элементами, именно с произвольными константами, на которые умножаются $m-1$ строк. Развитие метода [427] на случай кратных собственных значений содержится в [157].

Попытки решения задачи при помощи матриц K более высокого ранга были предприняты в [3, 36, 82, 261]. Эти попытки были основаны на преобразовании системы с многими входами к канонической форме типа (4). Полученное решение для матрицы K по-прежнему не является общим, поскольку решение не включает все ненулевые элементы, которые имеются в каноническом представлении матриц A. В [36] предложен метод выбора матрицы K, улучшающей процедуру Люенбергера [261] в том смысле, что он позволяет расширить множество матриц K, решающих задачу выбора заданного спектра системы. Попытка построения наиболее общего решения для K путем учета в вычислительной процедуре всех ненулевых элементов матрицы A, записанной в канонической форме Люенбергера, предпринята в [322]. Подход основан на использовании невырожденного преобразования T, которое преобразует матрицу замкнутой системы $[A+BK]$ к желаемой диагональной или жордановой форме. В работе показано, что матрица T может быть определена независимо от K и раньше, чем определяется K. Полученная этим методом матрица K имеет максимальное число степеней свободы, и это увеличивает возможности достижения других целей регулирования: размещение нулей замкнутой системы, получение заданной переходной характеристики, развязывание, учет ограничений на коэффициенты обратной связи, уменьшение чувствительности и т. д. Основная вычислительная трудность предложенного в [322] подхода состоит в необходимости преобразования матриц системы к канонической форме.

В [82] предложен алгоритм вычисления матрицы K, который не требует, в отличие от большинства алгоритмов, ни предварительного преобразования матриц системы к канонической форме, ни вычисления ее спектра. Необходимо лишь проверить, не совпадает ли желаемое собственное значение замкнутой системы с собственными значениями матрицы A. Дан простой алгоритм осуществления этой проверки. Получаемые методом [82] матрицы K, вообще говоря, влияют на нули передаточной функции системы. Проблема выбора ЛОСС, обеспечивающей заданные нули замкнутой системы, пока окончательно не решена. Подходы к решению этой задачи имеются в [80, 226, 395, 409, 428]. Другие алгоритмы синтеза ЛОСС, реализующей заданный сдвиг или данное размещение полюсов, имеются в [38, 145, 313].

Так как полная информация о состоянии не всегда доступна, то очень важно найти условия, при которых полюсы системы можно произвольно разместить, пользуясь линейной обратной связью по выходу (ЛОСВ). Для случая, когда доступна лишь стационарная ЛОСВ, в [99] показано, что если система управляема и наблюдаема, то m полюсов замкнутой системы можно разместить почти произвольно при помощи ЛОСВ, где m — число независимых входов. Этот результат был уточнен в [107, 439], где показано, что для управляемой и наблюдаемой системы (ЛС) можно выбрать ЛОСВ вида $\mathbf{u}=K\mathbf{y}$ так, чтобы $\max(p, m)$ собственных значений матрицы $[A+BKC]$ были бы произвольно близки (но не обязательно равны) $\max(p, m)$ желаемых собственных значений, где p — число независимых выходов. Эти результаты ничего не говорят об остальных $n-\max(p, m)$ полюсах, где n — размерность пространства состояний.

В [118] показано, что для управляемой и наблюдаемой системы (ЛС), в которой $\operatorname{rank} B=m$, а $\operatorname{rank} C=p$, почти для всех пар $\{B, C\}$ при помощи ЛОСВ $\min(n, m+p-1)$ собственных значений могут быть размещены произвольно близко к тому же числу заданных значений. В частности, из этого результата следует, что почти любая линейная стационарная система может быть сделана устойчивой введением ЛОСВ, если только $n \leqslant m+p-1$.

В [227] доказано, что если $n \leqslant m+p-1$, то системе всегда можно при помощи ЛОСВ придать заданное множество собственных чисел, при условии, что все эти числа различны.

В [110] предложен алгоритм синтеза ЛОСВ, основанный на результатах работ [99, 107], который позволяет получить заданный спектр замкнутой системы. Эффективность алгоритма иллюстрируется примером 41-го порядка.

Простой тест для проверки существования ЛОСВ, обеспечивающей заданный спектр, приведен в [408]. Нужно найти матрицу K, такую, чтобы для управляемой и наблюдаемой системы (ЛС) матрица $[A+BKC]$ имела набор $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ в качестве своих собственных значений. В силу управляемости пары $\{A, B\}$ существует такая F, что $[A+BF]$ имеет требуемый набор собственных значений. Отсюда видно, что существование искомой матрицы K эквивалентно существованию решения уравнения $KC=F$. Если обозначить через C_1 матрицу, образованную из p линейно-независимых столбцов матрицы C, а через $E_1-n\times p$ матрицу, составленную из столбцов единичной матрицы, номера которых соответствуют номерам столбцов матрицы C, то уравнение $KC=F$ запишется в виде $K[C_1 \vdots C_2]=F[E_1 \vdots E_2]$, где C_2 и $E_2-p\times(n-p)$ и $p\times(n-p)$ матрицы, образованные оставшимися $(n-p)$ столбцами матриц C и E соответственно. Матрица K, удовлетворяющая уравнению $KC=F$, существует тогда и только тогда, когда выполнено равенство $F[E_2-E_1C_1^{-1}C_2]=0$. Аналогичное условие установлено в [302].

При управлении полюсами системы при помощи ЛОСВ часто лишь ограниченное число полюсов может быть размещено желаемым образом и имеется некоторая неопределенность в расположении остальных полюсов. Наконец, если даже имеется возможность разместить все полюсы, то не всегда ясно, куда их разместить. В [279] предложен алгоритм смещения полюсов системы в заданную область комплексной плоскости. Приведена процедура выбора элементов матрицы обратной связи, обеспечивающей максимальный сдвиг влево доминирующего собственного значения (т. е. собственного значения, ближайшего к мнимой оси). Задача решена без учета ограничений, поэтому отклик системы может характеризоваться перерегулированием из-за наличия больших коэффициентов усиления в цепи обратной связи. В [263] метод [279] распространен на случай, когда ограничены все элементы матрицы обратной связи. Задача формулируется так: минимизировать действительную часть ближайшего к мнимой оси собственного значения матрицы $[A+BKC]$ при ограничении элементов матрицы K неравенствами вида $\alpha_{ij} \leqslant k_{ij} \leqslant \beta_{ij}$. Приведены алгоритм решения задачи и алгоритм исследования чувствительности системы по отношению к десятипроцентным возмущениям элементов матриц A, B, K и начальных условий. По предложенному алгоритму решены два примера: задача регулирования синхронного генератора, описываемого системой уравнений восьмого порядка с тремя входами и тремя выходами, и задача конструирования системы управления для шеститарелочного газового абсорбера, описываемого системой шестого порядка с двумя выходами.

В [327] дан рекурсивный алгоритм для достижения при помощи ЛОСВ заданного спектра замкнутой системы. Доказана сходимость алгоритма. В алгоритме используются mp независимых переменных матрицы обратной связи, вместо $m+p-1$ в случае поиска матрицы обратной связи единичного ранга, как предлагалось в [141, 184, 193, 301, 410]. Алгоритм [327] особенно эффективен в случае, когда $m+p-1<n\leqslant mp$. Некоторые алгоритмы модального управления при помощи статической ЛОСС и ЛОСВ имеются в [7, 38, 112, 125, 145, 156, 192, 194, 220, 232, 258, 313, 329, 339, 341, 391, 412, 414, 424, 443, 447, 465, 468, 473].

Возможности линейной обратной связи по выходу существенно расширяются, если в цепи обратной связи предусмотрены динамические элементы. Один из способов получения динамических обратных связей, обеспечивающих желаемые модальные свойства замкнутой системы, основан на комбинировании ЛОСС и динамической системы, называемой идентификатором состояния и позволяющей по измеряемым входам и выходам системы получить оценку ее переменных состояния (см. также разделы 5, 6 настоящего обзора). Остановимся на некоторых результатах, относящихся к динамическим обратным связям по выходу фиксированного порядка [1, 54, 79, 99, 107, 168, 323, 336, 411].

В [1] решена задача модального управления для случая, когда порядок динамического компенсатора в цепи обратной связи фиксирован и равен p. Показано, что для каждого значения p существует максимальное число собственных значений, которые могут быть выбраны произвольно в замкнутой системе. Дан алгоритм реализации процедуры вычисления коэффициентов этой обратной связи на ЭВМ. Доказано, что для управляемой и наблюдаемой системы (ЛС), где A — циклическая матрица, а матрица $[C', A'C', \ldots, A'^pC']$ имеет ранг α $(0\leqslant p\leqslant n)$, существует компенсатор порядка p, такой, что $(\alpha+p)$ собственных значений замкнутой системы произвольно близки к $(\alpha+p)$ желаемым собственным значениям.

Кроме того, в [1] обобщен результат [107] и показано, что

$$q=\max(\alpha+p,\ \beta+p) \tag{6}$$

полюсов замкнутой системы можно произвольным образом выбрать, используя динамический компенсатор p-го порядка, где

$$\alpha=\operatorname{rank}[C', A'C', \ldots, A'^pC'],\ \beta=\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^pB].$$

Если система (ЛС) полностью управляема и наблюдаема, то из (6) следует, что все $(n+p)$ полюсов замкнутой системы можно выбрать произвольно, используя компенсатор порядка

$$p=\min(\nu_0-1,\ \nu_c-1), \tag{7}$$

где ν_0 и ν_c — соответственно индексы наблюдаемости и управляемости системы (ЛС). Этот результат был впервые получен в [54]. Индексы управляемости и наблюдаемости определяются следующим образом:

$$\nu_c=\min\{p\colon \operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{p-1}B]=n\},$$
$$\nu_0=\min\{p\colon \operatorname{rank}[C', A'C', \ldots, A'^{p-1}C']=n\}.$$

Уравнение (6) дает нижнюю грань для числа полюсов, которые можно выбрать произвольно. Аналогично (7) дает верхнюю грань для порядка компенсатора, требуемого для выбора всех полюсов.

В [439] дан пример, когда все полюсы замкнутой системы размещены при помощи компенсатора, порядок которого ниже, чем этого требует равенство (7). В [227] показано, что минимальный порядок динамического компенсатора, требуемый для почти произвольного размещения полюсов замкнутой системы, не превышает числа $(n-m-p+1)$. Этот результат и результат [54] являются взаимно независимыми. Имеются случаи, когда первый дает более низкое значение порядка компенсатора, чем второй, и обратно. Оценка порядка компенсатора числом $(n-m-p+1)$ в [227] более оптимистична в тех случаях, когда m и p достаточно велики. В [431] приведен пример, когда использование оценки $(n-m+p-1)$ дает компенсатор первого порядка, в то время как использование формулы (7) приводит к компенсатору второго порядка. Решение задачи точного размещения полюсов при помощи динамического компенсатора наинизшего порядка дано в работе [431]. Там же рассмотрена задача о достижении точного или приближенного размещения полюсов при условии минимизации квадратичного функционала от переменных состояния и от управляющих переменных. Критерий оптимальности в этой формулировке учитывает квадратичную ошибку желаемого положения полюсов и обычный квадратичный критерий относительно состояний и управляющих воздействий.

В [413] для размещения полюсов замкнутой системы при помощи

ЛОСВ используются динамические компенсаторы с фиксированными собственными значениями. В [442] предложен алгоритм размещения полюсов при помощи ЛОСВ. Доказано, что произвольно можно разместить $\min[m+p-1, n]$ полюсов в том случае, если все полюсы различны и исходная система имеет различные ненулевые собственные значения.

С задачей модального управления тесно связана задача автономного управления (задача диагонального «развязывания» системы, или задача обеспечения независимого управления выходами системы).

Задача «развязывания» системы заключается в том, чтобы выбрать обратную связь так, чтобы замкнутая система имела диагональную матрицу. Для системы (ЛС) это можно попробовать осуществить при помощи обратной связи вида $\mathbf{u}=K\mathbf{x}+L\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ – новый вход. Матрицы K и L надо выбрать так, чтобы матрица передаточной функции $C[pE-(A+BK)]^{-1}BL$ была бы диагональной. Необходимые и достаточные условия существования матриц K и L, решающих задачу, а также процедура их вычисления даны в [138], где приведен обзор и более ранних результатов.

Выбор матрицы K, решающей проблему развязывания, не является единственным. Эта свобода в выборе матрицы K может быть использована для размещения полюсов замкнутой системы. В [151] продемонстрировано, в чем заключается эта свобода, и показано, что иногда невозможно получить устойчивую замкнутую систему при одновременном обеспечении развязывания. Если полное развязывание невозможно, то говорят о частичном развязывании. В [404] показано, как получить «максимально развязанную» систему с блоками на диагонали матрицы замкнутой системы, имеющими минимальный размер. Если использовать в обратной связи динамические элементы, то возможности решения задачи расширяются, и если матрица $C[pE-A]^{-1}B$ неособенная, то можно не только обеспечить полное развязывание, но и получить произвольное размещение полюсов замкнутой системы при помощи динамической обратной связи соответствующей размерности [191, 297, 423, 425]. Необходимые и достаточные условия существования ЛОСС или ЛОСВ, обеспечивающей полное развязывание системы и алгоритмы вычисления таких обратных связей, имеются в [137, 152, 190, 297, 298, 319, 321, 378, 457, 464]. Задача конструирования развязанной системы при помощи ЛОСВ с позиций частотных методов рассмотрена в [461]. Проблема диагонального развязывания линейной стационарной системы (ЛС) при $\mathbf{u}(t)\in R^m$ и $\mathbf{y}(t)\in R^m$ формулируется в [461] следующим образом:

найти ЛОСВ вида $\mathbf{u}(t)=G\mathbf{v}(t)+K\mathbf{y}(t)$, где K, $G\in R^{m\times m}$, G – неособенная матрица, так, чтобы передаточная функция замкнутой системы

$$C[pE-A-BKC]^{-1}BG=\operatorname{diag}\left[\lambda_1\frac{v_1}{w_1},\ldots,\lambda_m\frac{v_m}{w_m}\right]$$

была диагональной и все ее диагональные элементы не равнялись нулю тождественно. В работе предложен алгоритм, который позволяет за конечное число шагов проверить необходимое и достаточное условие разрешимости проблемы развязывания и вычислить матрицы K и G, а также все элементы диагональной передаточной матрицы развязанной системы. Интересно отметить, что числители v_i диагональных элементов передаточной матрицы развязанной системы зависят от матриц $\{A, B, C\}$ и не зависят от матриц обратной связи $\{G, K\}$, причем при выполнении необходимых и достаточных условий развязывания знаменатели диагональных элементов передаточных матриц w_i имеют форму $m_{ii}-\tilde{k}_{ii}\psi_i$, где m_{ii} и ψ_i полностью определяются матрицами системы (ЛС), а $\tilde{k}_i$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ есть произвольный набор вещественных чисел, определяемый выбором матрицы обратной связи K. Множество постоянных λ_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ в выражении для передаточной функции системы может совпадать с любым множеством ненулевых констант за счет выбора матрицы G. Другие алгоритмы развязывания предлагались в [177, 332].

4. Квадратичный критерий качества. Уравнение Риккати

Задача управления для (ЛС), формулируемая как задача минимизации квадратичного критерия качества

$$(\text{КК})\qquad J=\int_0^\infty [\mathbf{x}'(t)Q\mathbf{x}(t)+\mathbf{u}'(t)R\mathbf{u}(t)]\,dt,$$

где R — положительно определенная, а Q — неотрицательно определенная матрицы, получила название задачи конструирования регулятора состояния, поскольку цель этого регулятора состоит в сведении любого начального состояния к нулю. Ее решение было впервые получено Р. Калманом [208]. Оптимальное управление линейно по $\mathbf{x}$ и задано в виде $\mathbf{u}(t)=-R^{-1}B'K\mathbf{x}(t)$, где симметрическая матрица K является решением матричного алгебраического уравнения Риккати

$$(\text{УР})\qquad KBR^{-1}B'K-A'K-KA-Q=0.$$

Уравнение Риккати возникает при решении многих задач теории управления [467]. Если определить матрицу Q_1, имеющую тот же ранг, что и матрица Q, уравнением $Q=Q_1'Q_1$, то в случае, когда тройка $\{A, B, Q_1\}$ управляема и наблюдаема, существует единственное положительно определенное решение уравнения (УР), причем замкнутая система $\dot{\mathbf{x}}(t)=[A-BR^{-1}B'K]\mathbf{x}(t)$ является асимптотически устойчивой, а функция $v(\mathbf{x})=\mathbf{x}'K\mathbf{x}$ является функцией Ляпунова.

Условия управляемости и наблюдаемости могут быть заменены более слабыми условиями стабилизируемости и обнаружаемости [488]. Пара матриц $\{A, B\}$ стабилизируема, если существует действительная матрица K, такая, что $[A+BK]$ — устойчивая матрица. Дуальным образом пара матриц $\{A, C\}$ обнаружаема, если пара $\{A', C'\}$ стабилизируема. Доказанная в [240] теорема утверждает, что уравнение (УР) имеет единственное, симметрическое, положительно полуопределенное решение K, а матрица $[A-BR^{-1}B'K]$ — устойчивая матрица тогда и только тогда, когда тройка матриц $\{A, B, Q\}$ стабилизируема и обнаружаема. Если условия обнаружаемости ослабить, то (УР) не имеет уже единственного положительного полуопределенного решения и задача отыскания всех этих решений решена в предположении, что матрица

$$H=\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B' \\ -Q & -A' \end{bmatrix}$$

не имеет чисто мнимых характеристических чисел [241]. Эта работа обобщает результаты, данные в [277]. Исследованию задачи о регуляторе состояния с квадратичным критерием качества посвящено большое число журнальных статей [93, 132, 143, 180, 187, 204, 237, 273, 278, 283, 288, 324, 344, 351, 370, 372, 379, 450, 454, 467, 499] и книги [5, 56, 244].

Практическое использование решения задачи об оптимальном регуляторе состояния встречает следующие трудности: 1) необходимо измерять все переменные состояния, что не всегда возможно; 2) оптимальный закон управления требует только стационарной обратной связи и не включает интегральной составляющей; 3) требуются усилители с бесконечной полосой пропускания. Если имеются, например, постоянно действующие внешние возмущения по нагрузке или ошибки в коэффициентах уравнений модели объекта, то оптимальный регулятор может работать неудовлетворительно [181, 396].

Для линейного объекта с одним входом и с постоянным внешним возмущением в [196] получен оптимальный закон обратной связи путем минимизации не обычного квадратичного критерия, а критерия, который учитывает не только значение управляющего воздействия, но и его производную. В [251] развиты результаты [196] на случай векторного управления и векторных возмущений. Джонсон [197] развил свои результаты для случая внешних возмущений, которые могут быть представлены полиномами m-й степени от t с неизвестными коэффициентами, и затем рассмотрел значительно более общую задачу, в которой возмущение, действующее на объект, является выходом некоторой фиктивной динамической системы [199—202]. Однако и здесь закон управлений зависит от состояния и от возмущения и требует их оперативной оценки. В [256, 257] дан метод решения задачи об оптимальном регуляторе, когда интегральная составляющая в управлении получается без изменения исходного квадратичного критерия для системы с одним входом. В отличие от метода [196] этот метод не требует знания ни начального значения управления, ни измерения каждой переменной состояния в переходном процессе. Метод позволяет преодолеть названные практические трудности. Полученный оптимальный закон управления имеет интегральную составляющую, что позволяет обеспечить стремление выходной координаты к нулю при наличии постоянных возмущений в правой части уравнений движения. На простых примерах показана эффективность метода.

В [373] решена задача об оптимальном сервомеханизме для случая, когда измеряются лишь выходы системы, а желаемыми выходами являются произвольные полиномы времени. Число входов системы равно числу выходов. При решении использован метод Джонсона [196], т. е. в функционал введены производные от управляющего воздействия. Приведен алгоритм расчета порядка компенсатора.

Задачи минимизации квадратичного критерия качества при помощи обратной связи по выходу рассмотрены в [19, 69, 83, 239, 252, 253, 369]. Имеются многочисленные попытки решения задач оптимального управления с квадратичным критерием качества при учете ограничений на размещение собственных чисел системы [270, 271, 431, 438, 446, 450, 496]. Иногда такие задачи называют задачами оптимального модального управления [496]. Один из первых результатов, посвященных оптимальному модальному управлению, имеется в [4], где показано, что простое преобразование переменных состояния и управляющих переменных позволяет выбрать оптимальную обратную связь, при которой обеспечивается размещение полюсов системы в заданной области. Эти полюсы можно разместить в полуплоскости $\mathrm{Re}\,(s) < -\alpha$, где α — выбранная положительная постоянная, в том случае, если домножить квадратичный функционал на множитель $\exp\,(2\alpha t)$. Получаемая при решении такой задачи система имеет заданную степень устойчивости. В [140] обсуждается возможность использования условия оптимальности в частотной области для отыскания нужного квадратичного критерия оптимальности для предписанного размещения полюсов. Установлено, что для данного размещения полюсов можно найти (выбрать) только один из элементов весовых матриц критерия оптимальности при известных остальных элементах этих матриц. Однако поскольку это предполагается делать методом корневого годографа, то процедура получается довольно кропотливой и требует большого времени. В [431] рассмотрена задача достижения точного или приближенного размещения полюсов с помощью динамического компенсатора при условии минимизации квадратичного функционала. Аналогичная задача для случая ЛОСС была рассмотрена в [270, 271], а для случая ЛОСВ решалась в [1]. Критерий оптимальности в этих работах учитывает квадратичную ошибку желаемого положения полюсов и обычный функционал типа (КК). Часто нет необходимости точно фиксировать полюсы, а достаточно лишь разместить их внутри ограниченных заданных областей комплексной плоскости и одновременно потребовать оптимальности по заданному квадратичному критерию. Алгоритм решения такой задачи предложен в [318], где рассмотрено два вида задания области размещения полюсов: 1) $\mathrm{Re}(s) \leqslant -\alpha$, т. е. все полюса располагаются слева от вертикали $x = -\alpha$;

2) $|\operatorname{tg}^{-1}\{\operatorname{Im}(s)/\operatorname{Re}(s)\}|\leqslant\theta$, т. е. корни лежат в заданном секторе, ограниченном двумя лучами в третьем и четвертом квадрантах. Приведены алгоритмы решения задач и числовые примеры.

Задача об оптимальном регуляторе хорошо изучена и очень популярна при конструировании систем управления. К стандартной задаче сводится и исследование многих вопросов, связанных с учетом внешних возмущений, чувствительности и т. д. Задачи с квадратичным критерием сводятся, как правило, к решению уравнения Риккати. Классификация решений уравнений (УР) приведена в [467]. Основная группа методов решения уравнения Риккати основана на итерационных процедурах типа метода Ньютона, когда на каждой итерации приходится решать линейное матричное уравнение Ляпунова [83, 111, 229, 231, 284, 403, 451]. Итерационная схема, основанная на решении квадратичного матричного дифференциального уравнения, описана в [178]. Частотное представление уравнения (УР) дано в [264]. Обзоры методов решения (УР) и различные алгоритмы имеются в [5, 27, 71, 133, 161, 358, 419, 455, 487, 497]. Для стационарного случая, когда верхний предел интегрирования в (КК) конечен, в [448, 454—456] показано, каким образом решения дифференциального уравнения Риккати можно представить через стационарное решение алгебраического уравнения Риккати и выражение, которое стремится к нулю при $t\to\infty$. В [449] приведено явное выражение для оптимальной траектории $\mathbf{x}(t)$.

Простое необходимое условие существования единственного стабилизирующего решения уравнения Риккати дано в [426], где доказано, что если пара $\{A, B\}$ стабилизируема, то уравнение (УР) имеет стабилизирующее положительно определенное решение K_0 тогда и только тогда, когда найдется $n\times n$ симметрическая матрица S, такая, что $SBR^{-1}B'S-AS-SA-Q>0$.

Это безусловно полезное условие, хотя регулярной процедуры подбора матрицы S пока не найдено.

Алгоритм, данный в [252] для вычисления оптимальной обратной связи по выходу, использует необходимые условия оптимальности в виде системы уравнений, решаемой затем итерационно. На каждой итерации приходится решать нелинейное алгебраическое матричное уравнение, что безусловно «дорого» по затратам машинного времени. Алгоритм, предложенный в [5], не требует решения нелинейных уравнений, но гарантия его сходимости обеспечена, как и в остальных алгоритмах, только в том случае, если начальное приближение для матрицы K обеспечивает устойчивость замкнутой системы. Вычисление такой матрицы K можно выполнить в соответствии с процедурой, предложенной в [146]. Градиентный метод решения уравнений Риккати в задаче управления по выходу предложен в [83]. Доказана сходимость алгоритма и дан числовой пример. Общая теория уравнений Риккати изложена в [63, 65, 66, 70, 71, 289, 359, 377, 467]. Интересен метод параметрической релаксации, предложенный в [284]. Если обычные итерационные методы, основанные на решении на каждом шаге уравнения Ляпунова, требуют от n^3 до n^4 сложений и умножений или вычисления собственных значений матриц размеров $2n\times2n$, то предложенный метод требует около n операций на каждом шаге. Это достигается за счет того, что на каждом шаге начальное приближение улучшается за счет изменения только одного элемента матрицы. Метод хорошо работает при решении уравнений большой размерности. В работе приведен пример расчета оптимальной системы управления движением обеъкта 34-го порядка.

Когда для решения (УР) используют метод Ньютона, то имеется две потенциальные трудности: 1) метод может не сходиться, 2) даже если он сходится, то он может не сходиться к искомому положительно полуопределенному решению. В [229] доказано, что эти трудности удается преодолеть в том случае, если начальное приближение обеспечивает устойчивость замкнутой системы. В дальнейшем в [230] была дана простая процедура, обеспечивающая построение стабилизирующего начального приближения. В [403] доказано, что условия теоремы [229] могут быть ослаблены, и эта теорема доказана в предположении, что система стабилизируема и обнаружаема, причем начальное приближение можно построить на основании следующего результата.

Теорема [403]. Если пара $\{A, B\}$ стабилизируема, то матрица $[A+BK]$ устойчива при $K=-B'W^{+}(T)$, где $W^{+}(T)=\int\limits_{0}^{T} e^{-A\tau}BB'e^{-A'\tau}\,d\tau$, число T произвольно, $W^{+}(T)$ — псевдообратная матрица для матрицы $W(T)$.

Уравнение Риккати может иметь симметрическое решение, которое не является определенным [66, 469]. Эти решения имеют фазовый портрет типа седловой точки и потому они не могут быть определены численно, поскольку являются неустойчивыми. В [66] даны необходимые и достаточные условия структурной устойчивости решения уравнения Риккати. Приведем основной результат этой работы. Пусть уравнение Риккати имеет вид

$$S(P)=FP+PF'-PMP+C=0 \tag{8}$$

и пусть P^{*} удовлетворяет этому уравнению $S(P^{*})=0$. Пусть далее $\bar{F}_{*}=F-P^{*}M$. Тогда симметрическое решение P^{*} уравнения (8) является структурно-устойчивым тогда и только тогда, когда $\mathrm{dit}[\bar{F}_{*}\otimes E\bar{F}_{*}]\neq 0$. Здесь E — единичная матрица, а через $A\otimes B$ обозначено кронекеровское произведение двух матриц. Результат этот важен потому, что структурно-неустойчивое решение может существовать даже у управляемой и наблюдаемой (ЛС) [5, 66, 216].

Число скалярных равенств, соответствующих матричному уравнению Риккати, возрастает в квадрате при повышении порядка (ЛС). Попытки преодоления трудностей, связанных с большой размерностью задачи, основанные на аппроксимации исходных уравнений объекта уравнениями более низкого порядка, предпринимались в [67, 81, 84, 234, 246, 312, 430, 452].

5. Идентификаторы состояния

В управляемой системе (ЛС) при помощи ЛОСС можно обеспечить любую динамику замкнутой системы, решая задачу модального или оптимального управления. В тех случаях, когда не все переменные состояния могут быть измерены, пытаются оценить эти переменные при помощи специальных динамических систем — идентификаторов (наблюдателей) состояния. На вход идентификатора подаются входные и выходные сигналы исходной системы, а его выходы асимптотически стремятся к переменным состояния этой системы.

Впервые устройство для оценки состояния было предложено в [223]. Идентификатор состояния, описанный в этой работе (фильтр Калмана), представляет собой линейную систему n-го порядка, динамические свойства которой для наблюдаемой системы (ЛС) могут быть выбраны по усмотрению [219, 225]. Люенбергером [259] было предложено использовать измеримые выходы системы для снижения порядка идентификатора. Показано [259—262], что для наблюдаемой (ЛС), имеющей p линейно-независимых выходов, порядок идентификатора Люенбергера равен $(n-p)$.

Конструирование идентификаторов для системы с p выходами может быть сведено к конструированию p отдельных идентификаторов с одним выходом [260, 261]. Этот результат получен при помощи специального канонического представления (ЛС), предложенного в [266]. Приведем структуру идентификатора Люенбергера. Для системы (ЛС), если пара

$\{A, C\}$ наблюдаема и C имеет ранг p, то $(n-p)$-мерная линейная система

$$\dot{\mathbf{z}}(t)=F\mathbf{z}(t)+G\mathbf{y}(t)+H\mathbf{u}(t),$$

$$\mathbf{w}(t)=W\begin{bmatrix}\mathbf{z}(t)\\ \mathbf{y}(t)\end{bmatrix},$$

где $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{w}(t)$ — векторы размерности $(n-p)$ и n соответственно, а W — $(n\times n)$ матрица, является идентификатором состояния, если

$$\lim_{t\to\infty}\{\mathbf{x}(t)-\mathbf{w}(t)\}=0.$$

Это условие выполняется тогда и только тогда, когда: 1) F — устойчивая матрица, 2) существует $(n-p)\times n$ матрица T, такая, что $TA-FT=GC$, 3) $H=TB$, 4) матрица W удовлетворяет условию

$$E=W\begin{bmatrix}T\\ \cdots\\ G\end{bmatrix}.$$

Основная задача конструирования идентификаторов состоит в выборе таких матриц F; G; H и W, чтобы выполнялось равенство $TA-FT=GC$, а F имела заданные собственные числа.

Был предложен ряд различных алгоритмов конструирования идентификаторов состояния [49, 92, 147, 259—262, 291, 293, 304, 309, 310, 364, 380, 383, 475, 502], основанных, как правило, на построении специальных канонических форм системы с многими выходами. Существенно более простые алгоритмы построения идентификаторов Люенбергера удается получить, если принять допущение о том, что множество собственных чисел матрицы идентификатора не пересекается с множеством собственных чисел матрицы A [72, 89, 300, 303, 366]. В частности, алгоритм [89] не требует приведения системы (ЛС) к каноническому виду и позволяет осуществить конструирование идентификатора по явным формулам, если выполнены условия: 1) собственные числа матрицы A различны и не совпадают с желаемыми собственными числами матрицы идентификатора; 2) все моды системы управляемы по меньшей мере при помощи одного из входов системы; 3) строки матрицы C линейно-независимы.

В [489] на основе результатов, полученных в [493], представлена строгая геометрическая теория идентификаторов Люенбергера минимальной размерности, изложенная на языке линейных пространств. В [163] теория идентификаторов обобщена для абстрактных систем, описываемых при помощи полугрупп в банаховом пространстве. В [171] рассмотрены идентификаторы для систем с запаздыванием.

Хотя все собственные числа идентификатора могут быть выбраны при конструировании произвольно, однако вопрос об их рациональном выборе представляет собой самостоятельную сложную проблему. Ясно, что все собственные числа идентификатора по соображениям устойчивости должны лежать слева от мнимой оси. Однако, например, выбор полюсов идентификатора со слишком большими по модулю вещественными частями приводит к тому, что идентификатор превращается в дифференциатор со всеми вытекающими отсюда нежелательными последствиями. Далее, полюсы идентификатора существенно влияют на переходную характеристику системы и, особенно для систем высокого порядка, совсем не просто выбрать их таким образом, чтобы эта характеристика была удовлетворительной. В [306] предложена процедура выбора полюсов идентификатора, основанная на минимизации квадратичной ошибки слежения за переменными состояния. Даны примеры расчета идентификаторов для системы управления полетом самолета. В [245] эта идея получила дальнейшее развитие. Показано, что конструирование идентификаторов минимальной размерности можно свести к решению уравнения Риккати $(n-p)$-го порядка. В [286] предложен идентификатор, нечувствительный к колебаниям параметра объекта.

Проблема построения идентификаторов состояния для систем, входы которых неизмеримы, обсуждалась в [182, 183, 203, 280]. Основная идея оценки состояния в присутствии помех основана на представлении сигнала помехи как выхода некоторой наблюдаемой динамической системы, для которой конструируется дополнительный идентификатор состояния. Эта идея чрезвычайно популярна и широко используется при решении задач регулирования и слежения. В частности, она была применена в [225] для конструирования асимптотических дифференциаторов. Аналогичным способом пользуются при моделировании сигналов слежения [104, 202] и для других недоступных для измерения входных сигналов. Полученные в этом направлении основные результаты приведены в [203]. Другие результаты, относящиеся к оценке состояния (ЛС) в присутствии помех, имеются в [9, 33, 37, 95, 154, 166, 462].

Экспериментальному исследованию идентификаторов посвящены работы [406, 440]. В [406] экспериментально исследованы фильтр Калмана и идентификатор Люенбергера применительно к задаче оценки состояния опытного испарителя. Оба идентификатора исследованы при неточно заданных начальных условиях и в присутствии помех. Идентификатор Люенбергера оказался более чувствительным к шумам и, несмотря на известную свободу в выборе параметров идентификатора, оказалось совсем непросто подобрать его динамику для получения удовлетворительной оценки состояния при наличии различных возмущений. Более удачным оказалось использование фильтра Калмана.

6. Слежение и регулирование

Основная задача регулирования многосвязной системы заключается в конструировании динамического компенсатора, который обеспечивал бы выполнение следующих требований к замкнутой системе: а) вектор выходных переменных системы точно следует за измеряемым векотором командного сигнала — задача слежения; б) вектор выходных переменных системы стремится к нулю из произвольного начального состояния, в которое система попадает благодаря наличию внешних возмущений, не всегда измеримых, но обычно принадлежащих определенному классу функций — задача регулирования. Часто система должна решать задачу слежения в присутствии помех. Формальное различие между задачами регулирования и слежения исчезает, если ошибку слежения (разность между командным и выходным сигналами) рассматривают в качестве новой переменной, которую надо регулировать. Основной прием, при помощи которого получают структуру регулятора методами пространства состояний, заключается в построении идентификатора состояния системы и использования ЛОСС. Если на систему действуют неизмеримые помехи, то используют идентификаторы «состояния помехи». Аналогично поступают при решении задач слежения, когда отслеживаемый сигнал неизвестен заранее. Замечательный и очень полезный факт, относящийся к системе, охваченной цепью обратной связи, которая состоит из идентификатора состояния и ЛОСС, заключается в том, что собственные числа такой системы состоят из собственных чисел идентификатора состояния и собственных чисел объекта, охваченного ЛОСС. Таким образом, выбор параметров идентификатора определяет n собственных чисел (в случае использования идентификатора полной размерности фильтр Калмана) или $n-p$ собственных чисел (в случае использования идентификатора Люенбергера), и выбор матрицы ЛОСС определяет еще n собственных чисел. При этом все $2n$ или $(2n-p)$ собственных чисел (комплексные числа входят в набор вместе со своими сопряженными) можно выбрать при конструировании по своему усмотрению в том случае, если система (ЛС) управляема и наблюдаема [47, 78, 225, 299]. Популярное изложение этой схемы конструирования регуляторов, снабженное подробными, хорошо подобранными примерами, можно найти в [62, 436]. Хотя промышленные регуляторы всегда строят на основе линейной модели, эта модель, как правило, неточна. Неточности могут быть следствием аппроксимации, сделанной относительно теоретических положений о процессе, из-за линеаризации нелинейной модели, из-за ошибки в идентификации параметров и по другим причинам. Кроме того, управляемый процесс часто подвержен действию возмущений, как измеримых, так и неизмеримых. Практически регуляторы всегда содержат интегральную обратную связь, обеспечивающую статическую нечувствительность по отношению к внешним возмущениям и к ошибкам модели, и часто содержат контур управления по возмущению, если возмущение можно измерить.

Обоснование введения интегральной обратной связи методами пространства состояний дано в [39, 42, 60, 105, 196, 197, 308, 336, 349, 434, 436]. Алгоритмы управления по возмущению при помощи МПС даны в [53, 103, 104, 114, 115, 162]. В [436] рассматривается система, описываемая уравнениями:

$$\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+B\mathbf{u}+F\mathbf{w},\ \mathbf{y}=C\mathbf{x}+D\mathbf{u}+F\mathbf{w},$$

где $\mathbf{w}$ — произвольный постоянный вектор измеримых и неизмеримых возмущений. Показывается, что для системы тогда и только тогда существует регулятор, содержащий интегральную обратную связь и/или контур управления по возмущению, такой, что $\mathbf{y}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)\to 0$ при $t\to\infty$ и при всех $\mathbf{w}$, когда выполнены следующие условия: а) пара $\{A, B\}$ стабилизируема, б) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=n+m$. При этом предполагается без потери общности, что

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B & E \\ C & D & F \end{bmatrix}=n+m.$$

В [115] дано простое алгебраическое доказательство этого результата.

В [102] решена задача слежения в присутствии неизмеримых возмущений для линейной системы:

$$\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+B\mathbf{u}+\mathbf{w},\ \mathbf{y}=C\mathbf{x},\ \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0,\ t\geqslant 0,$$

где y — p-вектор выходов, а $\mathbf{w}$ — n-вектор неизмеримых возмущений. Требуется найти динамическую обратную связь по выходу минимального порядка, такую, чтобы: 1) $\mathbf{y}(t)\to\mathbf{y}_{\mathrm{ref}}(t)$ при $t\to\infty$, где $\mathbf{y}_{\mathrm{ref}}(t)$ — функция времени (командный сигнал), удовлетворяющая некоторому линейному дифференциальному уравнению; 2) динамическое поведение замкнутой системы определялось либо заданным спектром, либо минимумом данного квадратичного критерия качества; 3) условия 1), 2) выполнялись при всех неизмеримых возмущениях $\mathbf{w}$, которые удовлетворяют линейному векторному дифференциальному уравнению, имеющему неизвестные начальные условия и, возможно, характеристические числа с положительными вещественными частями. Эта задача была рассмотрена в [108] для случая, когда w — постоянное возмущение. Джонсон [196, 197] рассмотрел эту задачу для специального случая $\operatorname{rank} C=n$. В [45] эта задача исследована с использованием геометрического подхода и получены достаточные условия устойчивости системы. В [101, 102] принят чисто алгебраический подход к решению задачи. Основная теорема устанавливает необходимые и достаточные условия существования такой динамической стационарной обратной связи по выходу, что для любых неизмеримых возмущений $\mathbf{w}$, генерируемых линейным дифференциальным уравнением r-го порядка, и любых командных сигналов, удовлетворяющих соответствующему векторному дифференциальному уравнению r-го порядка, выполнены условия: $\mathbf{y}(t) \to \mathbf{y}_{ref}(t)$ при $t \to \infty$ и замкнутая система управляема. Эти необходимые и достаточные условия содержат требование управляемости пары $\{A, B\}$ и требование равенства величине $n+rp$ ранга некоторой матрицы, составленной из матриц системы и матриц систем, генерирующих командный сигнал и помеху.

Получена формула для динамической обратной связи минимального порядка и доказано, что замкнутая система может быть построена как по условию минимума квадратичного функционала, так и по условию произвольного размещения полюсов на комплексной плоскости. Здесь же показано, что система является грубой в том смысле, что при любых конечных (не обязательно малых) возмущениях матриц системы $\{A, B, C\}$ или матрицы K в цепи обратной связи, не нарушающих условий устойчивости, система обеспечивает решение задачи в присутствии неизмеримых возмущений.

В [103] сформулированы необходимые и достаточные условия существования управления по возмущению, такого, что выходы линейной многомерной системы становятся асимптотически равными некоторым заранее выбранным функциям времени, независимо от любого измеримого возмущения, действующего на систему. Управление при этом имеет вид

$$\mathbf{u}(t) = K_1\mathbf{x}(t) + K_2\hat{\mathbf{w}}(t) + K_3\hat{\mathbf{y}}(t),$$

где $\hat{\mathbf{w}}(t)$, $\hat{\mathbf{y}}(t)$ — выходы идентификаторов помехи и командного сигнала соответственно. В работе показано, что для класса возмущений $\mathbf{w}(t)$, командных сигналов $\mathbf{y}_{ref}(t)$, описанных выше, для того чтобы система была устойчивой, а $\mathbf{y}(t) \to \mathbf{y}_{ref}(t)$ при $t \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы пара $\{A, B\}$ была стабилизируемой и ранг некоторой матрицы, определяемой матрицами системы и коэффициентами уравнений, описывающих помеху и командный сигнал, был равен заданному числу. Регулятор состоит из идентификаторов и матриц коэффициентов, связывающих выходы идентификаторов состояния системы, «состояния» помехи и «состояния» отслеживаемого командного сигнала с входом системы. Матрицы коэффициентов обратной связи определяются единственным образом, когда число входов равно числу выходов, решение задачи не существует, когда число входов меньше числа выходов и матрицы определяются не единственным образом, если входов больше, чем выходов. Интересно заметить, что полная ЛОСС не является необходимой. Динамика системы может быть выбрана произвольно при помощи подходящей обратной связи по выходу. Решение задачи интерпретируется как решение задачи асимптотического развязывания.

Задачи слежения за полиномиальными входными сигналами для многосвязной системы рассмотрены в [44, 113, 158]. В [324] дана процедура конструирования такого пропорционально интегрального регулятора для многосвязной системы, который позволяет отслеживать ступенчатые возмущения на входе с нулевой статической ошибкой.

Хорошей иллюстрацией общего алгебраического подхода к конструированию многомерной следящей системы в присутствии активных неизмеримых помех служит работа [202]. Следящая система содержит идентификаторы сигнала помехи, командного сигнала, состояния объекта, а выходы этих идентификаторов используются в линейной обратной связи по состоянию. В работе получен ряд структурных результатов для линейных многомерных нестационарных объектов. Следящая система удовлетворительно работает даже в тех случаях, когда помеха в точности совпадает по форме с командным сигналом. Приведен пример конструирования следящей системы для объекта второго порядка.

Идеи работ [335, 336], в которых были определены структура и порядок динамического компенсатора, позволяющего получить произвольное размещение полюсов замкнутой системы, развиты в [334], где предлагается компенсатор заданной структуры. Для объекта, имеющего уравнения:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=A(\mathbf{x})(t)+B\mathbf{u}_0(t),$$

$$\mathbf{y}_0(t)=C_0\mathbf{x}(t)+D_0\mathbf{u}_0(t),$$

$$\mathbf{y}_f(t)=C_f\mathbf{x}(t)+D_f\mathbf{u}_0(t),$$

где $\mathbf{y}_f(t)$ — выходные переменные для обратной связи, $\mathbf{y}_0(t)$ — управляемый выход объекта, $\mathbf{u}_0(t)$ — управляющий сигнал, искомый компенсатор имеет схему, представленную на рис. 2 [334]. Размерность векторов следующая: $\mathbf{x}: n\times 1$, $\mathbf{y}_0: q_0\times 1$, $\mathbf{u}_0: m\times 1$, $\mathbf{r}: m_0\times 1$, $\mathbf{y}_f: q_f\times 1$. Порядок этого компенсатора mp, а матрицы компенсатора $(F_1, \ldots, F_p,\ Y_0, \ldots, Y_p,\ S_0, \ldots, S_p)$

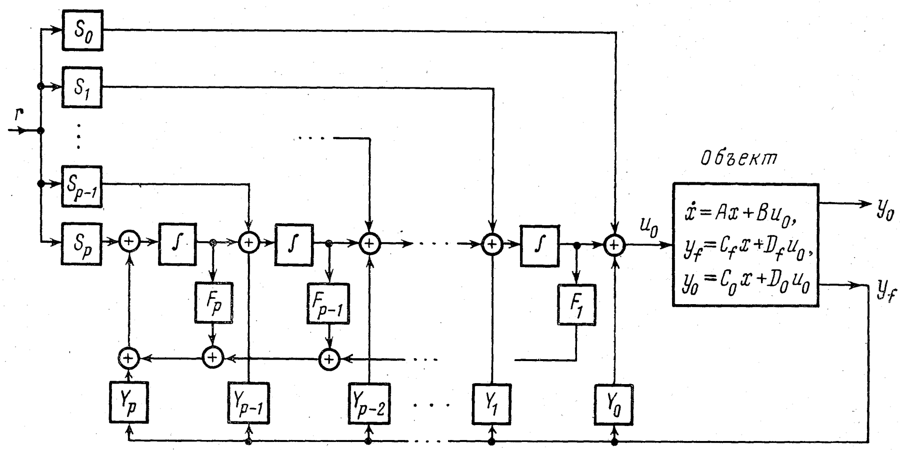

Рис. 2

выбраны так, чтобы обеспечить достижение следующих целей конструирования: 1) устойчивость в терминах желаемого размещения полюсов, 2) статическое или динамическое развязывание между различными компонентами командного входного сигнала $\mathbf{r}(t)$ и компонентами контролируемого выхода $\mathbf{y}_0(t)$ и 3) желаемый отклик на различные входные командные сигнала типа скачков и линейно-нарастающих сигналов.

Процедура конструирования предполагает сначала выбор матриц $(F_1, \ldots, F_p,\ Y_0, \ldots, Y_p)$ так, чтобы получить желаемое размещение полюсов, и затем выбор матриц $(S_0, \ldots, S_p)$, чтобы выполнять остальные цели конструирования. Если цели недостижимы при данном p, то порядок компенсатора может быть повышен до $(p+1)m$ с тем, чтобы обеспечить дополнительную свободу в достижении целей 2) и 3). Алгоритм выбора параметров матриц компенсатора основан на модификации одной из канонических форм Люенбергера [261]. Метод не гарантирует построения компенсатора наименьшего порядка, однако имеет определенные вычислительные преимущества, так как, например, желаемые полюсы системы выражены прямо в терминах жордановой канонической формы, а не косвенным образом через коэффициенты характеристического многочлена. Результаты применены к решению конкретной задачи выбора системы управления объектом 11-го порядка.

Основной «недостаток» конструирования регуляторов по схеме «идентификатор+ЛОСС» состоит в том, что качество переходного процесса в системе нельзя оценить на стадии конструирования. На качество переходного процесса оказывает влияние ошибка оценки состояния, получаемая на идентификаторе [282]. В [43] строго показано, что переходная характеристика системы зависит как от идентификатора, так и от коэффициентов обратной связи. В [285] исследовано действие ошибки оценки состояния на переходный процесс. Показано, что использование последовательного соединения идентификатора и динамической обратной связи (вместо обычно используемой стационарной), основанной на однократном дифференцировании управляющих сигналов, имеет определенные преимущества в том случае, когда на стадии конструирования предъявляются определенные требования к переходному процессу. Показано, что ошибки в оценке состояния объекта влияют на переходный процесс примерно так же, как начальные условия в оптимальном регуляторе. Вместо обычного первого этапа конструирования — выбора ЛОСС в работе предлагается искать динамическую обратную связь вида $\dot{\mathbf{u}}(t)=K_1\mathbf{x}(t)+K_2\mathbf{u}(t)$, а для замкнутой с помощью такой обратной связи системы, размерность вектора состояний которой возросла за счет компонент вектора $\mathbf{u}(t)$, строится обычный идентификатор состояния. Сравнение системы с такой обратной связью и обычной системы, состоящей из идентификатора и обратной связи, показывает, что первая система никогда не бывает более чувствительной к возмущениям параметров, чем вторая. Преимущество предложенного подхода заключается еще и в том, что при использовании стандартной процедуры все динамические эффекты обратной связи, вызванные наличием идентификатора, не могут быть оценены до его конструирования, а в предлагаемом подходе переходные характеристики системы можно оценить до выбора идентификатора. Предложенный подход может основываться на обратной связи, содержащей не только первые производные, но и вторые или более высокого порядка. Так, в [335, 336] показано, что закон управления, основанный на $r(k-1)$ раз продифференцированном управлении, где k — индекс наблюдаемости объекта, а r — число его линейно-независимых выходов, обеспечивает произвольную динамику замкнутой системы. Однако вычислительные трудности при этом могут быть значительными [290] и, что иногда более важно, теряется интуитивное понимание задачи в тех случаях, когда приходится иметь дело с много раз продифференцированным управлением. Закон управления, предложенный в [285] и основанный на первой производной от управления, достаточно гибок, чтобы можно было объяснить влияние ошибок оценки состояния, и вместе с тем интуитивно достаточно прост, так как сохраняет наглядность подхода, основанного на конструировании идентификатора.

Основные результаты, связанные с конструированием регуляторов методами пространства состояний, являются чисто алгебраическими и могут быть наиболее строго и компактно изложены на геометрическом языке конечномерных линейных пространств. Эта работа частично выполнена в [148, 472, 489—496, 500]. Основной результат, полученный в [492] и сформулированный на языке n-мерных линейных пространств, звучит так. Задача регулирования выхода разрешима (быть может, при помощи динамической компенсации) тогда и только тогда, когда: 1) влияние нестабильных и ненаблюдаемых мод объекта на выход системы равно нулю, 2) стабилизация системы при помощи линейной обратной связи по выходу возможна, несмотря на ограничения наблюдаемости объекта. Приведенная в [492] теория конструктивна, полна и дает полезную структурную информацию.

В [73, 74] при помощи геометрического подхода исследована возможность одновременного достижения в стандартной линейной многомерной системе, подверженной действию неизмеримых возмущений, нескольких целей регулирования на основе использования ЛОСС и, возможно, динамических компенсаторов. Среди желаемых целей рассмотрены: развязывание, компенсация возмущений, стабилизация, заданное размещение полюсов. Получены необходимые и достаточные условия существования решения задач одновременной локализации возмущений и заданного размещения полюсов или развязывания. Показано, что задача одновременной локализации возмущений и стабилизации может быть решена на основе использования динамической обратной связи тогда и только тогда, когда ее можно решить при помощи статической обратной связи. При стандартных допущениях показано, что задача одновременной компенсации возмущений, развязывания и размещения полюсов не имеет решения.

В [481, 482] предложен алгоритм синтеза линейных многомерных систем в частотной области. Метод дает общую схему синтеза, которая применима для достижения любой из следующих целей: произвольного размещения полюсов замкнутой системы, обеспечения независимого управления выходами или развязывания, точного слежения за моделями [459, 478]. Он эквивалентен обычно используемым для решения этих задач методам пространства состояний, в которых применяются ЛОСС, идентификаторы состояния и динамическая компенсация. Предложенный алгоритм основан на факторизации матричных передаточных функций. Приведены частотные эквиваленты ЛОСС и идентификаторов состояния. Основное преимущество алгоритма заключается в том, что он дает полную и достаточно общую процедуру конструирования, в которой динамическая система оценки состояния получается естественным образом и естественным же образом эта система исчезает в том случае, когда доступно измерение состояния.

При решении задач конструирования регуляторов методами пространства состояний редко учитывают переходную характеристику системы, которая существенно зависит не только от полюсов передаточной матрицы, но и от ее нулей. Вопросам размещения нулей передаточных функций посвящены работы [80, 226, 395, 409].

Поскольку для многомерной системы матрица K, обеспечивающая системе заданный спектр, не является единственной, то, вообще говоря, эта неединственность может быть использована для размещения нулей. В [361] показано, что произвол в выборе матрицы K может быть использован для влияния на положение нулей многомерной системы. В [82] описан алгоритм выбора матрицы K, обеспечивающей заданный спектр многомерной системы и влияющей на положение ее нулей. Однако процедур, которые позволяли бы произвольно выбирать все нули замкнутой многомерной системы, пока, по-видимому, не существует.

Для скалярной линейной системы, имеющей один вход и один выход, характеризуемой рациональной передаточной функцией $t(s)=r(s)/p(s)$, можно произвольно разместить при помощи ЛОСС нули $p(s)$ и таким образом компенсировать нули $r(s)$ в том случае, если степень многочлена числителя $r(s)$ не превышает степени знаменателя $p(s)$, т. е. ЛОСС можно выбрать так, чтобы компенсировать все нули знаменателя. Этот результат формально справедлив и для линейных многомерных систем. Впервые на это обстоятельство было указано в [480, 483]. В [484] дано строгое доказательство того факта, что все нули многомерной системы могут быть компенсированы выбором соответствующей ЛОСС.

Важную роль при конструировании многомерных систем играет понятие передаточных нулей, введенное в [388]. Оно оказалось важным при изучении различных вопросов теории управления [100, 102, 244, 292, 296, 485]. В [116] дано определение передаточных нулей и предложен алгоритм их вычисления. Множество комплексных чисел λ, таких, что

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A-\lambda E & B \\ C & D \end{bmatrix} < n+\min(r,m),$$

называется *множеством передаточных нулей* системы $\{A, B, C, D\}$, где r и m — число выходов и входов системы соответственно. Показано, что любая система, в которой больше входов, чем выходов, почти всегда не имеет передаточных нулей и для такой системы почти всегда разрешима задача об идеальном регулировании.

Понятие передаточных нулей имеет прямое отношение к теории конструирования «грубых» сервомеханизмов [117]. Пусть дана линейная стационарная система:

(9) $$\mathbf{x}=A\mathbf{x}+B\mathbf{u}+F\mathbf{w},\quad \mathbf{y}=C\mathbf{x}+D\mathbf{u}+F\mathbf{w},$$

где $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{u} \in R^m$, $\mathbf{y} \in R^r$, $\mathbf{w} \in R^{\varrho}$ — вектор возмущений, неизмеримый и удовлетворяющий уравнениям $\dot{\mathbf{z}}_1 = A_1 \mathbf{z}_1$, $\mathbf{w} = E_1 \mathbf{z}_1$, в которых $\mathbf{z}_1 \in R^{n_1}$, пара $\{A_1 E_1\}$ наблюдаема и $\mathbf{z}_1(0)$ неизвестно.

Требуется найти такой регулятор для системы (9), чтобы $\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\text{ref}} \to 0$ при $t \to \infty$, $\forall \mathbf{x}(0) \in R^n$ и $\forall \mathbf{z}_1(0) \in R^n$ и для любых таких конечных возмущений элементов матриц A, B, C, D, которые не приводят к неустойчивости системы. Здесь $\mathbf{y}_{\text{ref}}$ определено следующим образом:

$$\mathbf{y}_{\text{ref}} = G\sigma, \quad \dot{\mathbf{z}}_2 = A_2 \mathbf{z}_2, \quad \sigma = E_2 \mathbf{z}_2,$$

где $\mathbf{z} \in R^{n_2}$, $\{A_2, E_2\}$ наблюдаема, а $\mathbf{z}_2(0)$ задано.

Необходимые и достаточные условия существования такого регулятора, сформулированные в [117], состоят в следующем: а) пара $\{A, B\}$ управляема (или стабилизируема); б) $m \geqslant r$; с) — передаточные нули системы $\{A, B, C, D\}$ не совпадают с λ_i; $i = 1, 2, \ldots, q$, где $\{\lambda_i\} = \{\Lambda_1\} \cup \{\Lambda_2\}$ ($\{\Lambda_1\}$, $\{\Lambda_2\}$ — множества нулей минимальных полиномов матриц A_1 и A_2 соответственно). В условиях теоремы минимальный порядок регулятора равен rq и управление имеет вид $\mathbf{u} = K_0 x + \sum_{i=1}^{r} K_i n_i$.

Работа [330] содержит краткий обзор различных способов определения нулей передаточных функций. Дана процедура факторизации передаточной матрицы многомерной системы в предположении, что эта система обратима (проблема обращения линейной системы рассмотрена в [194, 195]). Показано, что нули такой системы совпадают с нулями линейной системы, порядок которой ниже. Доказано, что система (ЛС) n-го порядка имеет $\min(n-m, n-p)$ нулей. Метод позволяет сократить расчет при вычислении нулей системы (ЛС) путем сведения задачи к обращению системы более низкого порядка.

7. Чувствительность

Исследование грубости характеристик системы управления по отношению к отклонениям параметров объекта и регулятора — важнейший вопрос всякой теории, претендующей на практическое использование. В последнее время ему уделяется все большее внимание в литературе, посвященной методам пространства состояний.

В настоящем обзоре не рассматриваются многочисленные работы, в которых проблемы чувствительности исследуются при помощи второго метода Ляпунова. Эти вопросы подробно освещены в отечественной литературе.

При конструировании грубых систем управления и при исследовании вопросов чувствительности популярен минимаксный подход [41, 75, 154, 233, 504], обычная мотивировка которого заключается в следующем. Часто не представляется возможным получить статистику неопределенных параметров системы и статистическое описание этих параметров выбирают исключительно в целях математического удобства. Вместе с тем надежные границы для возмущений и для значений параметров могут быть установлены априори на стадии проектирования системы. Наконец, во многих приложениях, где надежность и безопасность более важны, чем оптимальность, получение надежных оценок функционирования системы является вполне достаточным результатом. В [40] рассмотрена задача конструирования оптимального линейного регулятора для линейной дискретной системы с неопределенными коэффициентами, для которых заданы лишь множества, которым они могут принадлежать. Решена задача выбора обратной связи, обеспечивающей минимум максимального значения (максимум берется по множеству значений неопределенных параметров) критерия оптимальности. Для решения задачи использован метод динамического программирования.

Минимаксный подход к задаче оценки состояния системы использован в [405], где предполагается, что возмущение входов, выходов и начальных условий принадлежат заданным выпуклым множествам. Оценка состояния определяется исходя из динамики системы, границ заданных множеств и возможных наблюдений.

В [120] даны геометрические необходимые и достаточные условия достижимости и строгой достижимости линейных управляемых процессов в присутствии аддитивных возмущений, принадлежащих некоторым ограниченным выпуклым множествам. Управляемый процесс является строго достижимым, если существует допустимое управление, переводящее систему в заданное целевое множество в присутствии «худшего» возмущения. В [34] минимаксный подход применен к конструированию системы управления для объекта с одним входом и одним выходом, имеющего неопределенные параметры и нелинейные элементы с неизвестными характеристиками. Ищется максмин квадратичного критерия оптимальности, включающего ошибку слежения, норму управления и оценку неопределенности параметров. Рассмотрены примеры практического применения полученных решений. Минимаксный подход при конструировании грубых систем использован также в [402, 474].

Когда при конструировании системы управления требуется достигнуть компромисс между оптимальностью характеристик системы и чувствительностью по отношению к вариациям ее параметров, часто формируют единый критерий, учитывающий обе названные цели конструирования. Такой подход с квадратичным критерием развит в [235, 236, 375]. В [135, 136] предложен алгоритм решения задачи конструирования оптимальной системы, обладающей нулевой или почти нулевой чувствительностью критерия оптимальности по отношению к колебаниям параметров объекта и цели обратной связи.

В [58, 164, 165] установлено, что условия траекторной и терминальной нечувствительности системы по отношению к вариациям параметров системы в определенном смысле эквивалентны условиям функциональной управляемости системы по выходу [58, 401], управляемости [164], наблюдаемости и управляемости [165].

Попытка распространить геометрический подход для формулирования условий траекторной нечувствительности в линейных нестационарных системах и сформулировать эти условия в терминах некоторых инвариантных подпространств предпринята в [85].

Некоторые результаты относительно достижения траекторной нечувствительности при помощи управления по разомкнутому контуру приведены в [51]. В [127] задача конструирования нечувствительной системы сведена к стационарной задаче об оптимальном регуляторе при квадратичном критерии качества, путем включения в критерий оптимальности квадратичной формы от функций чувствительности.

В [159] рассмотрена проблема чувствительности оптимальной системы управления, имеющей критерий качества в виде функционала $J_p = \int_0^\infty (\mathbf{x}'Q\mathbf{x} + \mathbf{u}'R\mathbf{u})\,dt$. Введен вектор параметров p, элементами которого являются элементы матриц A и B и функционал $J^1 = \int_0^\infty \mathbf{x}'K\mathbf{x}\,dt$. Здесь K — симметрическая неотрицательно определенная матрица, которая дает веса чувствительности различных состояний по отношению к другим состояниям, вообще говоря, $K \neq Q$. Чувствительность S различных состояний к изменениям параметров задана для малых вариаций параметров с использованием интеграла J^1 следующим образом: $S=\partial J^1/\partial p$. Вводится далее общий критерий задачи, который имеет вид:

$$J^* = \beta_1 J_p + \beta_2 J_S, \quad \beta_1 + \beta_2 = 1, \quad 0 \leqslant \beta_1 \leqslant 1,$$

$$J_S = \mathrm{tr}\left(\frac{\partial J^1}{\partial p}\,\delta\mathbf{p}'\right) = \mathrm{tr}\,(S\delta\mathbf{p}').$$

Вектор $\delta\mathbf{p}'$ состоит из элементов матриц $\{A, B\}$. Как обычно, ищется такая матрица F, что вдоль траектории движения системы $\dot{\mathbf{x}}(t) = [A+BF]\mathbf{x}(t)$ функционал J^* достигал бы минимума. Задача вычисления оптимальной матрицы F сведена к итерационному решению системы шести алгебраических матричных уравнений. В работе дано эвристическое доказательство существования решения.

Вопросы чувствительности оптимального по квадратичному критерию управления исследованы в работах [23, 316, 445]. В [311] показано, что добавление члена $\mathbf{w}'S\mathbf{w}$, где $\mathbf{w}=\partial\mathbf{x}/\partial\theta$, а S – положительно определенная матрица, к подынтегральному выражению критерия (КК) приводит к линейному управлению, которое делает систему менее чувствительной к изменению параметра θ. Показано, однако, что решения этой задачи в форме $\mathbf{u}=K_1\mathbf{x}+K_2\mathbf{w}$, где K_1 и K_2 не зависит от $\mathbf{x}$, вообще говоря, не существует. Эти примеры являются типичными для учета грубости системы при постановке и решении оптимальной задачи. Дополнительный материал имеется в [46, 50, 90, 91, 307]. Чувствительность модальных регуляторов исследована в [48, 88, 274, 275, 295, 340, 353, 376, 420, 429, 432]. Здесь внимание уделено, главным образом, дифференциальной чувствительности собственных значений и собственных векторов системы. Типичной в этом плане является работа [444], где формулируется следующая задача. Для линейной системы (ЛС) с матрицами, заданными в виде $A_0+\Delta A$, $B_0+\Delta B$, $C_0+\Delta C$, где A_0, B_0, C_0 — известные номинальные значения, а ΔA, ΔB, ΔC — малые отклонения, требуется найти матрицу F в законе обратной связи $\mathbf{u}=F\mathbf{x}+\mathbf{w}$, такую, чтобы собственные значения замкнутой системы были равны заданным числам набора Λ^d $(\lambda_1^d, \lambda_2^d, \ldots, \lambda_n^d)$ с точностью до величин первого порядка по отношению к малым вариациям ΔA, ΔB, ΔC, т. е. чтобы собственные числа замкнутой системы, действительно получаемые при использовании матрицы F, отклонялись от желаемых значений $(\lambda_1^d, \lambda_2^d, \ldots, \lambda_n^d)$ на величины второго или более высокого порядка малости по отношению к ΔA, ΔB, ΔC. Получены необходимые и достаточные условия решения задачи и алгоритм вычисления матрицы F. Предложенный алгоритм предполагает использование в законе управления сигнала о величине отклонения параметра объекта от номинального значения. Однако эта теория часто не может быть использована из-за наличия конечных, а не обязательно бесконечно малых возмущений параметров объекта, и, кроме того, вопросы чувствительности собственных значений безусловно не исчерпывают проблемы построения «грубой» системы.

Основной прием, позволяющий снизить чувствительность системы к вариациям ее параметров, заключается, помимо выбора величин коэффициентов обратной связи, во введении дополнительных динамических элементов. В [337] доказано, что повышение порядка динамического компенсатора благоприятно сказывается на чувствительности системы. Хороший пример в этом смысле дает работа [440], где выяснено на реальном объекте, что использование идентификатора полной размерности (фильтра Калмана) выгоднее использования идентификатора Люенбергера, поскольку идентификатор Люенбергера более чувствителен как к шумам и ошибкам измерения, так и к ошибкам параметров, чем идентификатор полной размерности. В работе это проверено вычислением соответствующих функций чувствительности.

Влияние паразитных инерционностей, индуктивностей и емкостей иногда [347] учитывают, записывая уравнение движения системы в виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=A_1\mathbf{x}(t)+A_2\mathbf{z}(t)+B_1\mathbf{u}(t),$$

$$\varepsilon\dot{\mathbf{z}}(t)=A_3\mathbf{x}(t)+A_4\mathbf{z}(t)+B_2\mathbf{u}(t),$$

где ε — малый параметр, векторы $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ имеют размерность $n\times 1$, $p\times 1$, $m\times 1$. Вообще говоря, присутствие параметра $\varepsilon\neq 0$ усложняет задачу конструирования, повышая порядок системы. В работе показано, что конструирование регулятора для такой системы можно свести к конструированию регулятора для системы n-го порядка, получающейся при $\varepsilon=0$. Показано, что если A_4 — устойчивая матрица и если пара $\{[A_1-A_2A_4^{-1}A_3], [B_1-A_2A_4^{-1}B]\}$ управляема, то существуют матрица K_0 и значение $\varepsilon_0>0$, такое, что для каждого $\varepsilon\in[0, \varepsilon_0]$ состояние равновесия $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{z}=0$ системы, замкнутой обратной связью $\mathbf{u}=K_0\mathbf{x}$, асимптотически устойчиво. Эта теорема формулирует условия, при выполнении которых можно пренебречь паразитными элементами при конструировании систем управления.

Главный интерес, однако, представляют работы, в которых чувствительность (грубость) системы является важнейшей составной частью критерия конструирования или, во всяком случае, важнейшим обстоятельством, учитываемым при конструировании. В [337] требование грубости системы включено в общую постановку задачи конструирования и получены необходимые и достаточные условия существования грубого регулятора. Для системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t)+D\mathbf{w}(t),$$

$$\dot{\mathbf{w}}(t)=0, \quad \mathbf{y}(t)=C\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{w}(0)=\mathbf{w}_0$$

задача формулируется так. Найти матрицу обратной связи по состоянию K, такую, что матрица $[A+BK]$ устойчива и $\lim_{t\to\infty}\mathbf{y}(t)=0$ для любого начального состояния $(\mathbf{x}_0, \mathbf{w}_0)$. Кроме того, малые, но произвольные возмущения в K не должны влиять ни на устойчивость, ни на условие регулирования выхода. В работе даны необходимые и достаточные условия того, что возмущения матрицы K произвольные, но конечные, вида $K+\varepsilon\tilde{K}$, где матрица $\tilde{K}$ — произвольная конечная матрица, а ε — любое число, удовлетворяющее условию $|\varepsilon|<\varepsilon^*$, не меняют свойств системы. Этот результат характеризует системы, для которых задача может быть решена без введения динамических элементов в обратную связь. Для случая, когда требуется динамическая компенсация, получен аналогичный результат. Далее в работе рассмотрена задача с учетом возмущения матриц объекта $\{A, B, C, D\}$ (впервые на грубость в этом смысле некоторых решений задачи регулирования выхода было указано в [101]). Показано, что задача стабилизации многомерной системы с помощью ЛОСС при произвольных возмущениях матриц объекта не имеет решения. Даны необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять матрицы системы и матрицы обратной связи, чтобы такое решение существовало. Распространение этих результатов на задачи регулирования с условиями внутренней устойчивости дано в [338]. Все эти результаты изложены на геометрическом языке конечномерных линейных пространств. Интересный подход к проблеме конструирования грубых систем предложен в [96], где показано, что применение динамического компенсатора более высокого порядка в сравнении с его минимальной размерностью удовлетворительно решает проблему нечувствительности системы по отношению к большим вариациям параметров объекта и коэффициентов в матрице обратной связи, если рационально выбрать свободные параметры динамического компенсатора. Задача решена для линейного объекта, имеющего один вход и один выход, но метод решения может быть применен и для объекта многомерного.

В [432] развит алгоритм [431] применительно к конструированию таких обратных связей по выходу, обеспечивающих заданное размещение полюсов замкнутой системы, при которых имеет место минимальная чувствительность полюсов к вариациям параметров объекта. Рассмотрены две различные формулировки проблемы. В одной из них вариации параметров объекта предполагаются малыми (но неизвестными) в сравнении с их номинальными значениями, в другой постановке вариации параметров объекта могут быть сравнимы с номинальными значениями этих параметров и предполагается, что задано распределение вероятностей для этих параметров в окрестности их номинальных значений. В [117] получены необходимые и достаточные условия решения задачи конструирования «грубой» следящей системы, такой, что асимптотическое слежение в присутствии измеримого или неизмеримого возмущения реализуется при любых вариациях параметров объекта и/или коэффициентов в цепи обратной связи. Получено описание всех грубых регуляторов. Показано, что всякий «грубый» регулятор должен состоять из двух различных устройств: 1) сервокомпенсатора, который совершенно отличен от идентификатора и, скорее, соответствует обобщению интегрального регулятора классической теории, 2) стабилизирующего компенсатора, единственная цель которого состоит в стабилизации системы, полученной после присоединения сервокомпенсатора к объекту. Полученный результат весьма интересен, поскольку он служит теоретическим обоснованием в терминах МПС широко используемого на практике регулирования по сигналу ошибки. В работе проведено исследование случая, когда допустимы возмущения параметров обратной связи. Доказана теорема, которая налагает фундаментальные ограничения на способность практически используемых сервомеханизмов обеспечивать удовлетворительное решение задач регулирования и слежения.

Известно, что для конструирования систем управления используется решение задачи обращения оптимальной линейной системы [119]. Обратная задача формулируется так. Для данного объекта с заданным законом управления определить все критерии оптимальности, для которых данный закон управления является оптимальным. Этот подход используется как один из способов синтеза оптимальных регуляторов [119, 194, 195, 422]. Приведенные в [119] результаты получены для детерминированных систем, т. е. для систем, динамика которых точно известна. Изучению проблемы обращения в том случае, когда динамика известна не полностью, посвящена работа [320]. Изучена следующая задача. Для данного объекта с заданным законом управления, содержащего неопределенные параметры, определить все критерии оптимальности, если таковые найдутся, для которых данный закон управления является гарантирующим. Используя метод размытого (fuzzy) динамического программирования, автор [320] получил алгебраические условия, выполнения которых достаточно для того, чтобы управление было гарантирующего типа. Эти условия, однако, затруднительно проверить непосредственно. Для того чтобы получить явные условия, рассмотрен случай системы с одним входом и одним выходом.

В заключение этого краткого обзора методов исследования чувствительности и методов построения «грубых» систем управления необходимо отметить, что сама постановка задачи конструирования «грубого» регулятора, рассматриваемая в рамках МПС, весьма перспективна, поскольку при проектировании часто имеется возможность выбора как величин параметров закона управления, так и точности их реализации в натуре (эта точность может быть связана с допусками на изготовление отдельных элементов схемы, степенью стабильности используемых усилителей и т. д.). Ясно, что за более высокую стабильность отдельных параметров системы необходимо нести соответствующие затраты и потому теоретические решения, позволяющие количественно оценивать и выбирать степень нестабильности отдельных элементов системы управления с тем, чтобы получить ее удовлетворительные выходные характеристики, могут оказаться весьма полезными. Отметим, что подобных постановок задач не было в рамках классической теории синтеза, основанной, например, на частотных методах, хотя в рамках этой теории и была построена довольно эффективная теория чувствительности.

8. Приложения

Большинство примеров, рассмотренных в терминах МПС, носит иллюстративный характер и относится к динамическим объектам невысокого порядка ($n=2\div4$). Однако, несмотря на сравнительную молодость теории, основанной на МПС, имеется ряд прикладных задач управления объектами большой размерности, которые были эффективно решены при помощи МПС. Наиболее выпукло эффективность алгебраического подхода, основанного на комбинировании ЛОСС и идентификаторов, иллюстрируется, вообще говоря, модельным примером стабилизации двойного перевернутого маятника на тележке, рассмотренным в [440]. Объект здесь является существенно неустойчивой нелинейной системой, которая стабилизируется с использованием методов модального управления и идентификаторов состояния. Математическая модель маятника в окрестности положения неустойчивого равновесия представляет собой систему (ЛС) шестого порядка с одним входом и тремя выходами. В качестве идентификатора состояния был использован фильтр Калмана, а все 12 характеристических чисел замкнутой системы располагались на вещественной оси в отрезке [—4, —6]. Регулятор обеспечивал стабилизацию маятника в присутствии значительных шумов измерения. Приведены экспериментальные переходные характеристики замкнутой системы. Были предприняты попытки стабилизации маятника при помощи идентификатора Люенбергера, имеющего три динамических элемента. Хотя на модели маятника, набранной на аналоговой ЭВМ, регулятор, использующий идентификатор Люенбергера, обеспечивал динамические характеристики, почти идентичные с первоначально рассмотренным фильтром Калмана, стабилизировать реальный маятник не удалось. Объяснение состоит в том, что идентификатор Люенбергера является более чувствительным к нестабильности параметров и к шумам измерения, чем фильтр Калмана. На это обстоятельство указывалось также в [406].

Теория модального управления успешно использовалась при расчете систем управления химическими объектами [97, 101, 109, 110, 170, 185, 250, 384, 385, 435]. В [110] при помощи алгоритма размещения полюсов замкнутой системы, охваченной обратной связью по выходу, решена задача управления химическим объектом 41-го порядка, имеющим три выхода и восемь входов. Эта же задача с позиций модального управления была рассмотрена в [109]. В [384] решена задача управления дистилляционной колонной. Этот же объект был исследован с помощью методов модального управления в [97, 106, 185, 254]. Задача управления бойлером, описываемым уравнением девятого порядка, изучена в [103, 116]. В [263] решена задача модального управления на основе ЛОСВ шеститарелочным газовым абсорбером — объектом шестого порядка с двумя выходами. Там же приведен пример управления ветровой электростанцией — объектом восьмого порядка с тремя выходами и с тремя входами.

Задача управления опытным парогенератором — объектом пятого порядка с тремя входами и тремя выходами — решена в [406]. В [334] использован метод конструирования динамических компенсаторов заданной структуры, имеющих минимальную размерность, для управления энергетической установкой, состоящей из бойлера, парогенератора, регулятора и двухступенчатой турбины. Принятая упрощенная линеаризованная модель системы имела 11-й порядок при восьми входах и четырех выходах. Замкнутая динамической обратной связью по выходу система имела заданное размещение всех 19 полюсов.

В [18] на основе МПС сконструирована система управления ядерной энергетической установкой — объектом, полная математическая модель которого содержит 220 нелинейных дифференциальных уравнений. Модель была аппроксимирована линейной системой дифференциальных уравнений сначала 48-го, а затем 18-го порядка. Для этих моделей при помощи МПС подобраны динамические компенсаторы, обеспечивающие заданные динамические свойства замкнутому объекту.

В [170] теория оптимальных регуляторов состояния использована для конструирования системы управления бойлером. Размерность матриц объекта $A : (28\times28)$, $B : (28\times4)$, $C : (6\times28)$. Система управления ядерным реактором — объектом девятого порядка сконструирована при помощи МПС в [433].

Методы МПС широко используются при конструировании электрических фильтров и других линейных цепей [6, 16].

В [83, 86, 87, 144, 269, 276, 305, 306, 356] современные алгебраические методы использованы для решения различных задач управления полетом. В [269] рассмотрена оптимальная система управления объектом девятого порядка, обеспечивающая заданные полюсы системы. В [356] рассмотрена задача конструирования регулятора для вертолета в условиях действия ветровой помехи, а в [83] — пример конструирования ЛОСВ для сверхзвукового транспортного самолета (объект четвертого порядка с двумя входами и тремя выходами).

Задачи управления электродвигателями и генераторами (объекты $3\div8$-го порядка) рассматривались в [8, 17, 68, 136, 263, 317, 407, 501], на основе методов модального и оптимального управления. В [400] с использованием схемы «идентификатор+ЛОСС» решена задача конструирования системы управления движением электрических транспортных средств. Приведены примеры расчетов систем управления и характеристики их функционирования в присутствии шумов измерения. В качестве критерия оптимальности взят квадратичный критерий. Система управления обеспечивала эффективное поддержание ошибок положения и скорости движения вблизи нулевых значений, несмотря на большое входное возмущение и шумы измерения. Аналогичная проблема рассмотрена в [398, 399]. Задача оптимального управления движением транспорта на основе линейных моделей 34-го порядка решалась в [149, 284]. Примеры приложений МПС в экономике имеются в [52, 354, 355].

9. Применение абстрактной алгебры

Алгебраическая формулировка задач синтеза систем управления, основанная на МПС, стимулировала применение аппарата абстрактной алгебры для постановки и решения основных задач теории. В этой связи следует в первую очередь отметить алгебраическую теорию линейных систем, изложенную Р. Калманом в 10-й главе книги [225] и основанную на алгебраической теории модулей над кольцом многочленов (см. также [392, 490, 491]).

В [12] было замечено, что концепции Р. Калмана являются специальным случаем подхода, развитого в теории автоматов при исследовании нелинейных машин. Авторы [12] предположили, что новый математический язык, называемый «теорией категорий», позволит изложить основные результаты теории наиболее ясно и общо. Попытки реализовать эту программу были предприняты в [13, 14, 153]. Другой подход к абстрактной теории систем содержит работа [57]. В ней исследованы системы, в которых множества состояний, входов и выходов являются группами. В [11] показано, как классическая теория систем может быть распространена на такого рода «групповые машины».

Все эти исследования [10—15, 57, 153] потребовали нового аппарата, значительно более общего, чем аппарат векторов и матриц.

В [14, 15] показано, что при помощи формализма «теории категорий» можно рассмотреть и калмановскую теорию [225], и теорию групповых машин [57]. В частности, показано, что линейность не играет существенной роли в основных результатах теории линейных систем. Этот подход позволяет с единой точки зрения рассмотреть теорию линейных систем непрерывных и дискретных, алгебраическую теорию автоматов, теорию нелинейных последовательных машин и теорию групповых машин. Он дает ясную теорию дуальности и обеспечивает простоту всех доказательств. Кроме того, подход позволяет включить в общие концепции и бесконечномерные системы. Высказывается мнение [14], что абстрактный язык теории категорий будет находить все большее применение в теории систем, являясь универсальным языком для описания линейных и нелинейных, непрерывных и дискретных, конечномерных и бесконечномерных систем. При формулировке теории систем в терминах категорий естественную трактовку получает задача построения минимальной реализации для заданного отображения вход — выход, которая эквивалентна задаче отыскания терминального объекта категории. Решение этой общей задачи включает решения Р. Калмана в теории линейных систем, основанные на теории R-модулей, и решения, полученные в теории автоматов, основанные на теории групп. Отдельные результаты применения аппарата абстрактной алгебры в теории систем содержат работы [58, 59, 218].

10. Заключение

Основные трудности использования МПС в инженерном проектировании систем управления линейными объектами связаны с необходимостью учета ограничений управляющих воздействий, фазовых переменных, полос пропускания усилителей, переходных характеристик и т. п. Даже при возможности получить решение задачи об оптимальном или модальном регуляторе не всегда бывает просто определить расположение полюсов замкнутой системы или выбрать коэффициенты в квадратичном критерии качества так, чтобы переходный процесс удовлетворял нужным техническим условиям [181, 396]. Кроме того, существенное влияние на переходный процесс оказывают нули передаточной функции замкнутой системы, а алгоритмы эффективного управления нулями пока не разработаны. Трудности применения алгебраического подхода, основанного на МПС, к синтезу систем управления дают почву для оживленной полемики в литературе по управлению [20, 181, 225, 243, 266] относительно теоретической ценности и практической целесообразности использования алгебраических методов пространства состояний примерно в том плане, как они изложены в работах, которым посвящен настоящий обзор. Крайняя точка зрения высказана в [181], где утверждается, что методы пространства состояний являются «крайне наивными и несовершенными в практическом смысле», что «хотя все эти задачи и интересны с математической точки зрения, но они либо несущественны с инженерной точки зрения конструирования систем с обратной связью, либо формализм пространства состояний значительно усложняет проблему, в то время как много более прозрачные результаты получены при помощи передаточных функций».

Безусловно, трудно представить теорию управления без передаточных функций и частотных методов, которые имеют ясный физический смысл, многократно апробированы и хорошо зарекомендовали себя при решении различных проблем конструирования реальных систем управления. Но нельзя согласиться и с точкой зрения авторов [181] на роль методов пространства состояний. По-видимому, нецелесообразно противопоставлять классические частотные методы, основанные на аппарате передаточных функций, и современную теорию, основанную на МПС. Безусловно, эти теории не исключают одна другую, а, скорее, являются двумя ветвями общей теории управления; каждая ветвь имеет свои преимущества и свои типичные трудности. Дальнейшее развитие должно заключаться не в отрицании одного из этих направлений, а в интенсивном развитии обоих направлений и в отыскании связующих звеньев между этими направлениями. Полезная работа в этом смысле проделана в [123, 175, 186, 213, 328, 331, 380, 393, 476—479], где основные понятия МПС интерпретированы в терминах передаточных функций.

О перспективности МПС свидетельствуют два обстоятельства. Во-первых, формируя единообразный формальный, строго математический подход к типичным проблемам теории управления, современная алгебраическая теория, основанная на МПС, позволяет совершенно естественным образом привлечь развитый аппарат различных разделов аналитической механики, теории дифференциальных уравнений, алгебры и машинной математики для решения важнейших проблем синтеза систем управления. Во-вторых, этот подход позволяет получать совершенно формальным путем решение задач конструирования систем с наперед заданными динамическими характеристиками, которые в принципе могут быть произвольно хорошими, и указывает средства реализации таких систем. Необходимо отметить, что подобная постановка задачи синтеза была не доступна в рамках классической теории регулирования.

Поступила в редакцию
10 марта 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Amari R., Vacroux A. G.* On the pole assignment in linear systems with fixed order compensators. Int. J. Control, vol. 17, No. 2, pp. 397–405, 1975.
2. *Anderson B. D. O.* Linear multivariable control systems, a survey. Proc. 5th IFAC Congress, Paris, paper S–8, 1972.
3. *Anderson B. D. O., Luenberger D. G.* Design of multivariable Feedback Systems. Proc. IEE, vol. 114, p. 395–399, 1967.
4. *Anderson B. D. O., Moore I. B.* Linear system Optimization with Prescribed degree of stability. Proc. IEE, vol. 116, No. 12, pp. 2083–2087, 1969.
5. *Anderson B. D. O., Moore I. B.* Linear optimal Control. N. Y., Prentice-Hall, 1971.
6. *Anderson B. D. O., Vongpanitlerd S.* Network Analysis and Synthesis. A modern system Approach. Prentice-Hall, N. Y., 1972.
7. *Anderson B. D. O., Bose N. K., Juri E. I.* Output feedback Stabilization and related Problems — Solution via Decision Methods. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-20, No. 1, pp. 53–66, 1975.
8. *Anderson J. H.* The control of synchronous machine using optimal control theory. Proc. IEEE, vol. 59, No. 1, pp. 25–35, 1971.
9. *Aoki M., Huddle J. R.* Estimation of the state vector of a linear stochastic system with a constrained estimator. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-12, pp. 432–433, 1967.
10. *Arbib M. A.* A common framework for automata theory and control theory. SIAM J. Control, vol. 3, pp. 206–222, 1965.
11. *Arbib M. A.* Coproducts and group machines. J. Computer Syst. Sci., vol. 7, pp. 278–287, 1973.
12. *Arbib M. A., Zeiger H. P.* On the relevance of abstract algebra to control theory. Automatica, vol. 5, pp. 589–606, 1969.
13. *Arbib M. A., Manes E. G.* Machines in a category. SIAM Rev., vol. 16, No. 2, 1974.
14. *Arbib M. A., Manes E. G.* Foundations of System Theory: Decomposable Systems. Automatica, vol. 10, No. 3, pp. 285–302, 1974.
15. *Arbib M. A., Manes E. G.* Adjoint Machines, state-behavior machines and duality. J. Pure Appl. Algebra, vol. 6, No. 3, pp. 313–314, 1975.
16. *Aronhime P.* Realizations of Complex Pole All-Pass Networks. IEEE Trans. Cir. Syst., vol. CAS-22, No. 4, pp. 324–328, 1975.
17. *Arumugam M., Ramamoorty M.* Suboptimal linear feedback control of devided winding rotor synchronous machine. IEEE Conf. paper No. 72-426-5, N. Y., 1972.
18. *Atary J., Shah M. M.* Modelling and analytical control system design of a complete nuclear power plant prototip. Proc. 5th IFAC Congress, Paris, pt. 1, paper 6. 1, 1972.
19. *Athans M.* On the design of p.i.d. controllers using optimal linear regulator theory. Automatica, vol. 7, pp. 643–647, 1971.
20. *Axelby G. S.* Relevance of Control Theory. Automatica, vol. 9, No. 2, pp. 279–283, 1973.
21. *Barker G. Ph.* Normal Matrices and the Lyapunov Equation. SIAM J. Appl. Math., vol. 26, No. 1, 1974.
22. *Bar-Ness Y., Langholz G.* Preservation of controllability under linear transformation. Int. J. Systems Sci., vol. 6, No. 11, pp. 1089–1092, 1975.

23. *Barnett S.* Sensitivity of optimal linear systems to small variations in parameters. Int. J. Control, vol. 4, pp. 41–48, 1966.
24. *Barnett S.* Matrices in control theory with applications to linear programming. N. Y., Van Nostrand Reinhold, 1971.
25. *Barnett S.* Matrices, polinomials and linear time-invariant systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-18, pp. 1–10, 1973.
26. *Barnett S.* Some applications of matrices to location of zeros of polinomials. Int. J. Control, vol. 17, pp. 823–831, 1973.
27. *Barnett S.* Some topics in algebraic systems theory. A survey. Int. J. Control, vol. 19, No. 4, pp. 668–688, 1974.
28. *Barnett S., Storey C.* Matrix methods in stability theory. London, Nelson, 1970.
29. *Bartells R. H., Stewart G. W.* Solution of the matrix equation $AX+XB=C$. Comm. ACM, vol. 15, pp. 820–826, 1972.
30. *Basile G., Marro G.* Controlled and conditioned invariant subspaces in linear sistem theory. J. Optimiz. Theory Appl., vol. 3, No. 5, pp. 306–315, 1969.
31. *Basile G., Marro G.* A new characterization of some structural properties of linear systems: unknown-input observability, invertability and functional controllability. Int. J. Control, vol. 17, pp. 931–943, 1973.
32. *Bass R. W., Cura I.* High order system design via state — space considerations. Preprints JACC, pp. 311–318, N. Y. IEEE, 1965.
33. *Basuthakup S., Knapp C. H.* A reduced order Suboptimal Estimation for Systems with Process Uncertainty. Int. Conf. Cybernetics and Society, Washington, D. C., 1972.
34. *Basuthakup S., Knapp C. H.* Minimax Control of Substate Space of a System with Process Uncertainty. Automatica, vol. 10, No. 1, pp. 37–47, 1974.
35. *Beck R. R., Lance G. M.* Direct and inverse transformations between phase variable and canonical forms. Trans. ASME, ser. G., vol. 94, pp. 315–318, 1973.
36. *Beghelli S., Bertoni G., Capitani G.* A simple Generalization of Luenberger Method for Pole Assignment. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-19, pp. 412–414, 1974.
37. *Belanger P. R.* Observations and control of Linear Systems with Constant Disturbances. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-15, pp. 695–696, 1970.
38. *Belletrutti J., Macfarlane A. G. J.* Characteristic loci technique in multivariable control system design. Proc. IEE, vol. 118, pp. 1291–1297, 1971.
39. *Bertoni G., Tibaldi M.* Pole assignment and Integral Control for Multi-Input, Multi-Output Systems. Ricerche di Automatica, vol. 3, No. 1, pp. 1–18, 1972.
40. *Bertsekas D. P., Rhodes I. B.* On the minimax feedback control of uncertain dynamic systems. IEEE Decision and Control Conf., Miami Beach, Florida, paper F3—3, pp. 451–455, 1971.
41. *Bertsekas D. P., Rhodes I. B.* Recursive State estimation for a Set-Membership Description of the Uncertainty. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, No. 2, 1971.
42. *Bhattacharyya S. P.* Disturbance rejection in linear systems. Int. J. Systems Sci., vol. 5, No. 7, pp. 633–637, 1974.
43. *Bhattacharyya S. P.* Compensator Design Based on the Invariance Phinciple. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-20, No. 5, pp. 708–710, 1975.
44. *Bhattacharyya S. P., Pearson J. B.* Error Systems and the Servomechanism Problem. Phinceton Conf. Inform. Systems Sci., Princeton Univers., March, 1971.
45. *Bhattacharyya S. P., Pearson J. B., Wonham W. M.* On zeroing the output of a linear system. Inform. Control, vol. 20, pp. 135–142, 1972.
46. *Bobrovsky B. Z., Grauppe D.* Analysis of optimal-cost sensitivity to parameter changes. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, pp. 487–488, 1971.
47. *Bona B. E.* Linear regulators and observers. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-18, No. 1, pp. 73–74, 1973.
48. *Bongiorno J. J.* Minimum sensitivity design of linear multivariable feedback systems by matrix spectral factorization. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-14, pp. 665–673, 1969.
49. *Bongiorno J. J., Youla D. C.* On observers in multivariable control systems. Int. J. Control, vol. 8, No. 3, pp. 221–243, 1968.
50. *Bonivento C.* Structural insensitivity versus identifiability. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-18, pp. 190–192, 1973.
51. *Bonivento C., Guidorzi R., Marro G.* Parametric Insensitivity and Controlled Invariance. Automatica, vol. 11, pp. 381–388, 1975.
52. *Bradshaw A., Porter B.* Synthesis of control policies for a production-inventory tracking systems. Int. J. Systems Sci., vol. 6, No. 3, pp. 225–232, 1975.
53. *Bradshaw A., Porter B.* Design of linear multivariable continuous-time tracking systems incorporating freedforward and feedback controllers. Int. J. Systems Sci., vol. 6, No. 11, pp. 1021–1032, 1975.
54. *Brasch F. M., Pearson J. B.* Pole Placement Using Dynamic Compensators. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-15, No. 1, pp. 34–43, 1970.
55. *Brockett R. W.* Poles, Zeros, and Feedback: State Space Interpretation. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-15, No. 1, pp. 34–43, 1970.
56. *Brockett R. W.* Finite Dimensional Linear Systems. N. Y. Wiley, 1970.

57. *Brockett R. W.* System Theory on Group Manifolds and Coset Spaces. SIAM J. Control, vol. 10, pp. 265–284, 1972.
58. *Brockett R. W., Mesarovic M. D.* The reproducibility of multivariable systems. J. Math. Anal. Appl., vol. 11, pp. 548–563, 1965.
59. *Brockett R. W., Wielsky A. S.* Finite-state homomorphic sequential machines. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-17, pp. 483–490, 1972.
60. *Brunovsky P.* On stabilization of linear systems under a certain class of persistent perturbations. Diff. Equations, vol. 2, pp. 401–405, 1966.
61. *Brunovsky P.* A classification of linear controllable systems. Kybernetika, vol. 3, No. 6, pp. 173–188, 1970.
62. *Bryson A. E., Luenberger D. G.* The synthesis of regulator logic using state-variable concepts. Proc. IEEE, vol. 58, pp. 1803–1811, 1970.
63. *Bucy R. S.* Global Theory of the Riccati Equation. J. Computer Syst. Sci., vol. 1, pp. 349–361, 1967.
64. *Bucy R. S.* Canonical Forms for Multivariable Systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-13, No. 3, pp. 567–569, 1968.
65. *Bucy R. S.* The Riccati Equation and its Bounds. J. Computer Syst. Sci., vol. 6, No. 4, pp. 343–353, 1972.
66. *Bucy R. S.* Structural stability for the Riccati Equation. SIAM J. Control, vol. 13, No. 4, pp. 749–753, 1975.
67. *Calfe M. R., Healey M.* Continued-fraction model-reduction technique for multivariable systems. Proc. IEE, vol. 121, No. 5, pp. 393–395, 1974.
68. *Calovic M. S.* Power system load and frequency control using an optimum linear regulator wth integral feedback. Proc. 5th IFAC Congress, Paris, pt. 1, paper 7–3, 1972.
69. *Calovic M. S., Cluk N. M.* Proportional-integral derivative realization of optimal linear-quadratic requlators. Proc. IEE, vol. 121, No. 11, pp. 1441–1443, 1974.
70. *Canabal J. R.* Geometry of the Riccati Equation. Stochastics, vol. 1, pp. 129–149, 1973.
71. *Casti J., Ljung L.* Some new analitic and computational results for operator Riccati equations. SIAM J. Control, vol. 13, No. 4, pp. 817–826, 1975.
72. *Cavin R. K., Thisayakorn C., Howze J. W.* On the design of observers with specified eigenvalues. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-20, No. 4, pp. 568–570, 1975.
73. *Chang M.-F., Rhodes I. B.* Disturbance localization in linear systems with simultanious pole assignment or decoupling. Proc. 1973 IEEE Decision and Control Conf., pp. 326–330, San Diego, Calif., Dec. 1973.
74. *Chang M.-F., Rhodes I. B.* Disturbance Localization in Linear Systems with Simultanious Decoupling, Pole Placement, or Stabilization. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-20, No. 4, 1975.
75. *Chang S. S. L., Peng T. K. C.* Adaptive Guaranteed Cost Control of systems with Uncertain Parameters. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-17, pp. 474–483, 1972.
76. *Chen C. T.* Representations of linear time — invariant composite systems. IEEE Trans. Automat. Control. vol. AC-13, pp. 277–283, 1968.
77. *Chen C. T.* A note on pole assignment. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-13, pp. 597–598, 1968.
78. *Chen C. T.* Introduction to linear systems theory. N. Y., Holt, Renehart and Winston, 1970.
79. *Chen C. T., Hsu C. H.* Design of dynamic compensators for Multivariable Control Systems. Proc. 1971 JACC, pp. 893—900. N. Y., IEEE, 1971.
80. *Chen R. T. N.* A Method of Pole — Zero Placement for Multivariable Control Systems. Proc. JACC, pp. 901–907, N. Y., IEEE, 1971.
81. *Chidambara M. R.* Two simple techniques for the simplification of large dynamic systems. JACC preprints, pp. 669–674, N. Y., IEEE, 1969.
82. *Chidambara M. R., Broen R. B., Laborzky J.* A Simple Algorithm for Pole Placement in a Multiple Input Linear Time Invariant Dynamic System. Trans. ASME J. Dynamic Systems, Meas. and Control, pp. 13–18, 1974.
83. *Choi S. S., Sirisena H. R.* Computation of Optimal Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-19, pp. 257–258, 1974.
84. *Chuang S. G.* A method for linear Systems order reduction. IEE Conf. Computer Aided Control Systems Design, Cambridge, 1973.
85. *Gori-Giorgi C., Crasselli O. M.* A new Approach to the Study of Parameter Insensitivity. Automatica, vol. 11, No. 2, pp. 181–188, 1975.
86. *Crossley T. R., Porter B.* Synthesis of aircraft modal control systems. Aeronaut. J., vol. 72, pp. 697–701, 1968.
87. *Crossley T. R., Porter B.* Synthesis of aircraft modal control systems having real or complex eigenvalues. Aeronaut. J., vol. 73, pp. 138–142, 1969.
88. *Crossley T. R., Porter B.* Eigenvalue and eigenvector sensitivity in linear systems theory. Int. J. Control, vol. 10, No. 2, pp. 163–170, 1969.
89. *Crossley T. R., Porter B.* Modal theory of state observers. Proc. IEE, vol. 118, No. 12, pp. 1835–1838, 1971.
90. *Cruz J. B., Perkins W. R.* A new approach to the sensitivity problem in multiva-

riable feedback system design. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-9, pp. 216–223, 1964.
91. *Cruz J. B., Perkins W. R.* Conditions for signal and parameter invariance in dynamical systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-11, pp. 614–615, 1966.
92. *Cumming S. D. G.* Design of observer of reduced dynamics. Electron. Lett., vol. 5, pp. 213–214, 1969.
93. *Dabke K. P.* Suboptimal linear regulators with incomplete feedback. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-15, pp. 120–122, 1970.
94. * *D'Angelo H.* Linear Time-Varying Systems. Boston, 1970.
95. *D'Appolito J. A., Hutchinson C. E.* A minimax approach to the design of low sensitivity state estimators. Proc. 5th IFAC Congress, Paris, pt. 3, paper 31.3, 1972.
96. *Dave M. P.* Design of arbitrary pole-placement taking large parameter sensitivity into account. Regelungstechnic und Process-Datenverarbeitung, Bd 22, No. 4, ss. 114–119, 1974.
97. *Davison E. J.* Control of a distillation column with incomplete state feedback. Trans. Instn Chem. Engrs, vol. 45, pp. T250–T279, 1967.
98. *Davison E. J.* On Pole Assignment in Multivariable Systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-13, pp. 747–748, 1968.
99. *Davison E. J.* On pole assignment in linear systems with incomplete state feedback. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-15, pp. 348–351, 1970.
100. *Davison E. J.* A computational method for finding the zeros of a multivariable linear time-invariant system. Automatica, vol. 6, pp. 481–474, 1970.
101. *Davison E. J.* The systematic design of control systems for large multivariable linear time-invariant systems. Preprints 5th IFAC, 1972, Paris, paper 29.2, pp. 1–7, 1972.
102. *Davison E. J.* The output control of linear time-invariant multivariable systems with unmeasurable arbitrary disturbances. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-17, pp. 621–630, 1972.
103. *Davison E. J.* The Feedforward Control of Linear multivariable Time-Invariant Systems. Automatica, vol. 9, pp. 561–573, 1973.
104. *Davison E. J.* The Feedforward and Feedback Control of a General Servomechanism Problem. Pts 1, 2. Department Elect. Eng., University of Toronto, Control System Report NNo 7305, 7306, April, 1973. Presented 11th Allerton Conf. on Circuit and System Theory, Oct., 1973.
105. *Davison E. J.* The output control of linear time-invariant multivariable systems with unmeasurable arbitrary disturbances. Proc. 6th Hawaii Int. Conf. on Systems Sci., pp. 146–157, Hawaii, 1973.
106. *Davison E. J., Goldenberg R. W.* A design technique for the incomplete state feedback problem. Automatica, vol. 5, pp. 335–346, 1969.
107. *Davison E. J., Chatterie R.* A note on pole assignment in linear system with incomplete state feedback. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, No. 1, pp. 98–99, 1971.
108. *Davison E. J., Smith H. W.* Pole assignment in linear time-invariant multivariable systems with constant disturbances. Automatica, vol. 7, pp. 489–498, 1971.
109. *Davison E. J., Chadha K. J.* On the control of a large chemical plant by modal analysis. Automatica, vol. 8, pp. 263–273, 1972.
110. *Davison E. J., Chow S. G.* An algorithm for the assignment of closed-loop poles using output feedback in large linear multivariable systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-18, No. 1, pp. 74–75, 1973.
111. *Davison E. J., Maki M. C.* The Numerical Solution of the Matrix Riccati Equation. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-18, No. 1, pp. 73–77, 1973.
112. *Davison E. J., Wang S. H.* Properties of linear time-invariant multivariable systems subject to arbitrary output and state feedback. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-18, No. 1, pp. 24–32, 1973.
113. *Davison E. J., Chow S. G.* Perfect control in linear time-invariant multivariable systems: the control inequality principle. 8th Annual Princeton Conf. on Information Sci. and Systems. March, 1974.
114. *Davison E. J., Smith H. W.* A Note on the Design of Industrial Regulators: Integral Feedback and Feedforward Controllers. Automatica, vol. 10, pp. 329–332, 1974.
115. *Davison E. J., Smith H. W.* Feedback and feedforward design of industrial regulators. Proc. IEEE, vol. 121, No. 5, p. 397, 1974.
116. *Davison E. J., Wang S. H.* Properties and Calculation of Transmission Zeros of Linear Multivariable Systems. Automatica, vol. 10, pp. 643–658, 1974.
117. *Davison E. J., Goldenberg A.* Robust Control of a General Servomechanism Problem: The Servo Compensator. Automatica, vol. 11, No. 5, pp. 461–471, 1975.
118. *Davison E. J., Wang S. H.* On Pole Assignment in Linear Multivariable Systems Using Output Feedback. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-20, No. 4, pp. 516–518, 1975.
119. *Debs A. S., Athans M.* On the Optimal Angular Velocity Control of Asymmetrical Space Vehicles. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-14, No. 1, pp. 80–82, 1969.

* Звездочкой отмечены работы, переведенные на русский язык.

120. *Delfour M. C., Mitter S. K.* Rechability of perturbed systems and min sup problems. SIAM J. Control. vol. 7, No. 4, pp. 521–533, 1969.
121. *Desoer C. A.* Modes in linear circuits. IRE Trans. Circuit Theory, vol. CT-7, pp. 211–223, 1960.
122. *Desoer C. A.* Notes for a Second Course on Linear Systems. N. Y. Van Nostrand, 1970.
123. *Desoer C. A., Schulman J. D.* Zeros and poles of matrix transfer function and their dynamic interpretation. IEEE Trans. Automat. Control Circuit Theory, vol. CAS-21, pp. 3–8, 1974.
124. *Desoer C. A., Vidyasagar M.* Feedback Systems: Input-Output Properties. N. Y., Acad. Press, 1975.
125. *Ding C. Y., Brasch F. M., Pearson J. B.* On Multivariable Linear Systems, IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-15, No. 1, pp. 96—97, 1970.
126.* *Director C. A., Roher R. A.* Introduction to system theory. N. Y. Wiley, 1972.
127. *Dorato P.* On Sensitivity in Optimal Control Systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-8, No. 3, p. 256, 1963.
128. *Dorf R. C.* Modern Control Systems. Reading (Mass.) Addison — Wesley, 1967.
129. *Dorf R. C.* Algebraic methods for dynamic systems. Washington, 1966.
130. *Dorf R. C.* Modern Control Systems. 2nd ed. Addison — Wesley, 1974.
131. *Douglas J. M.* Process Dynamics and Control, vol. 1. Analysis of Dynamic Systems: vol. 2. Control System Synthesis. Englewood Cliffs, (N. Y.) Prentice-Hall, 1972.
132. *Douglas P. B., Sarachik P. E.* The design of optimal compensators for linear constant systems with inaccessible states. IEEE Trans. Automat. Control., vol. AC-18, No. 5, pp. 509—512, 1972.
133. *Duven D. J.* Solution of the general quadratic matrix equation. Proc. nat. Electron. Confer., U. S. A., vol. 27, pp. 329—333, 1972.
134. *Ellis J. K., White G. W. T.* An introduction to modal analysis and control. Control, vol. 9, No. 82, pp. 193—197; No. 83, pp. 252—266; No. 84, pp. 317—321, 1965.
135. *Elmetwally M. M., Rao N. D.* Design of near-zero sensitivity optimal control systems. Int. J. Control, vol. 18, No. 2, pp. 353—357, 1973.
136. *Elmetwally M. M., Rao N. D.* Design of low sensitivity optimal regulators for synchronous machines. Int. J. Control, vol. 19, No. 3, pp. 593—607, 1974.
137. *Fabian E., Wonham W. M.* Decoupling and disturbance rejection. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-20, pp. 399—401, 1975.
138. *Falb P. L., Wolovich W. A.* Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-12, No. 5, pp. 651—659, 1967.
139. *Fallside F.* Control System Design by Pole-Zero Assignment. N. Y., Acad. Press, 1975.
140. *Fallside F., Seraji H.* Design of optimal systems by a frequency-domain technique. Proc. IEE, vol. 117, No. 10, pp. 2017—2024, 1970.
141. *Fallside F., Seraji H.* Direct design procedure for multivariable feedback systems. Proc. IEE, vol. 118, No. 6, pp. 797—802, 1971.
142. *Fallside F., Seraji H.* Design of multivariable systems using unity-rank feedback. Int. J. Control, vol. 17, No. 2, pp. 351–364, 1973.
143. *Ferguson J. D., Rekasius Z. V.* Optimal linear control systems with incomplete state measurements. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-14, pp. 135–140, 1969.
144. *Fisher E. E.* An Application of the Quadratic Penalty Function Criterion to the Determination of a Linear Control for a Flexible Vehicle. AIAA J., vol. 3, No. 7, pp. 1262–1267, 1965.
145. *Flower J. O.* Linear feedback design using matrix traces. Int. J. Control, vol. 21, No. 1, pp. 73–80, 1975.
146. *Fortmann T. E.* Stabilization of multivariable systems with constant-gain output feedback. Proc. JACC, paper 10–6, N. Y., IEEE, 1973.
147. *Fortmann T. E., Williamson D.* Design of low – order observers for linear feedback control laws. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-17, pp. 301–308, 1972.
148. *Fransis B., Sebakhy O. A., Wonham W. M.* Synthesis of multivariable regulators. The internal model principle. Int. J. Appl. Math. Opt., vol. 1, pp. 64–86, 1974.
149. *Garrard W. L., Kornhauser A. L.* Design of optimal feedback systems for longitudinal control of automated transit vehicles. Transp. Research, vol. 7, pp. 125–144, 1973.
150. *Gilbert E. G.* Controllability and Observability in Multivariable Control Systems. J. Soc. Ind. Appl. Math. Control, ser. A, vol. 1, No. 2, pp. 128–151, 1963.
151. *Gilbert E. G.* The Decoupling of Multivariable Systems by State Feedback. SIAM J. Control. vol. 7, pp. 50–63, 1969.
152. *Gilbert E. G., Pivnichy J. R.* A computer program for the synthesis of decoupling multivariable feedback systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-14, pp. 652–659, 1969.
153. *Goguen J. A.* Minimal realization of machines in closed categories. Bull. Ann. Math. Soc., vol. 78, pp. 777–783, 1972.
154. *Goldstein B. F.* Minimax control of linear unknown systems using mismatched state observers. Int. J. Control, vol. 20, No. 5, pp. 753–767, 1974.

155. *Gopinath B.* On the control of linear multiple input – output systems. Bell Syst. Tech. J. vol. 50, pp. 1063–1081, 1971.
156. *Gordon-Clark M. R.* A novel approach to the control of dynamically unfavourable processes. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-9, pp. 411–419, 1964.
157. *Gould L. A., Murphy A. T., Berkman E. F.* On the Simon – Mitter pole allocation algorithm-explicit gains for repeated eigen-values. IEEE Trans. Automal. Control, vol. AC-15, pp. 259–260, 1970.
158. *Gourushankar V., Ramar K.* Design of proportional--integral derivative controllers for tracking polynomial – type inputs. Proc. IEEE, vol. 121, No. 4, pp. 521–524, 1973.
159. *Graupe D.* Optimal Linear Control Subject to Sensitivity Constraints. IEEE Trans. Automat. Control. vol. AC-19, No. 5, pp. 593–594, 1974.
160. *Grayson L. P.* The status of synthesis using Lyapunov's method. Automatica, vol. 3, pp. 91–121, 1965.
161. *Greenberg S. G., Bard Y.* A comparison of computational methods for solving the algebraic matrix Riccati equation. IEEE Conf. on Decision and Control, Miami, Florida, 1971.
162. *Greenfield G. G., Ward T. J.* Feedforward and dynamic uncoupling control of linear multivariable systems. AICHE J., vol. 14, No. 5, pp. 783–789, 1968.
163. *Gressang R. V., Lamont G. B.* Observers for Systems Characterized by Semigroups. IEEE Trans. Automat. Confrol, vol. AC-20, No. 4, pp. 523–528, 1975.
164. *Guardabassi G., Locatelli A.* Terminal insensitivity via feedback Ricerche di Automatica, vol. 4, pp. 54–67, 1973.
165. *Guardabassi G., Locatelli A., Rinaldi S.* Controllability, observability and sensitivity. IFAC Simposium on Sensitivity, Adaptivity and Optimality. Ishia, Italy, 1973.
166. *Guidorzi R., Marro G.* On Wonham stabilizability condition in the synthesis of observers for unknown-input systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, pp. 499–500, 1971.
167. *Gupta R. D., Fairman F. W.* Luenberger's Canonical Form Revisited. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-19, pp. 440–441, 1974.
168. *Haingjun P., Dale S. E.* Eigenvalue assignment using proportional-integral feedback control. Int. J. Control. vol. 20, No. 3, pp. 517–523, 1974.
169. *Hartwig R. E.* $AX+AX+XB=C$, Resultants and generalized inverses. SIAM J. Appl. Math., vol. 28, No. 1, pp. 154–183, 1974.
170. *Herbrik R., Jamshidi M.* Design of an optimum state regulator for a once-through boiler. Proc. 5th IFAC Congress, Paris, 1972, pt. 1, paper 5, 4, 1972.
171. *Hewer G. A., Nazaroff G. J.* Observer theory for delayed differential equations Int. J. Control, vol. 18, No. 1, pp. 1–7, 1973.
172. *Heymann M.* Comment on Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-13, pp. 346–353, 1968.
173. *Heymann M.* A unique cononical form of multivariable linear systems. Int. J. Control, vol. 12, pp. 913–927, 1970.
174. *Heymann M.* The prime structure of linear dynamical systems. SIAM J. Control, vol. 10, pp. 460–469, 1972.
175. *Heymann M., Thorpe J. A.* Transfer equivalence of linear dynamical systems. SIAM J. Control, vol. 8, pp. 9–40, 1970.
176. *Heymann M., Stern R. J.* Controllability of Linear Systems with Positive Controls: Geometric Considerations. J. Math. Anal. Appl., vol. 52, No. 1, pp. 36–41, 1975.
177. *Hirzinger G.* Decoupling multivariable systems by optimal controltechniques. Int. J. Control, vol. 22, No. 2, pp. 157–168, 1975.
178. *Hitz K. L., Anderson B. D. O.* Iterative method of computing the limiting solution of the matrix Riccati differential equations. Proc. IEEE, vol. 119, pp. 1402–1406, 1973.
179. *Ho Y. C.* What Constitutes a Controllable System? IRE Trans. Automat. Control, vol. AC-7, No. 3, p. 76, 1962.
180. *Horisberger H. P., Belanger P. R.* Solution of the optimal constant output feedback problem by conjugate gradients. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-19, pp. 434–435, 1974.
181. *Horowitz I. M., Shaked U.* Superiority of Transfer Function Over State-Variable Methods in Linear Time-Invariant Feedback System Design. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-20, No. 1, pp. 84–97, 1975.
182. *Hostetter G. H., Meditch J. S.* Observing Systems with Unmeasurable Inputs. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-18, pp. 307–308, 1973.
183. *Hostetter G. H., Meditch J. S.* On the Generalization of Observers to Systems with Unmeasurable and Unknown Inputs. Automatica, vol. 9, pp. 721–724, 1973.
184. *Hostetter G. H., Meditch J. S.* The reduction of multivariable system controller disign to a single-output problem. Proc. JACC, University Tex., N. Y., IEEE, pp. 303–308, 1974.
185. *Howarth B. R., Foss A. S., Grens E. A.* II. Mode – Based Prozess Control with Small Numbers of Measurements and Manipulations. Ind. Eng. Chem. Fundam., vol. 11, No. 4, pp. 517–524, 1972.
186. *Howarth B. R., Grens E. A., Foss A. S.* A Root – Locus Interpretation of Modal Control. Ind. Eng. Chem. Fundam., vol. 11, No. 3, pp. 403–406, 1972.

187. *Howerton R. D., Hammond J. L.* A new computational solution of the linear regulator problem. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, pp. 645–651, 1971.
188. *Howlang J. L.* Matrix equations and the separation of matrix eigenvalues. J. Math. Anal. Appl., vol. 33, pp. 683–691, 1971.
189. *Howland J. L., Senez J. A.* A constructive method for the solution of the stability problem. Numer. Math., vol. 16, pp. 1–7, 1970.
190. *Howze J. W.* Necessary and Sufficient Conditions for Decoupling Using Output Feedback. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-18, No. 1, pp. 44–46, 1973.
191. *Howze J. W., Pearson J. B.* Decoupling and Arbitrary Pole Placement in Linear Systems Using Output Feedback. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-15, No. 6, pp. 660–663, 1970.
192. *Hsu C. H., Chen C. T.* A proof of the stability of multivariable feedback systems. Proc. IEEE (Lett.), vol. 56, pp. 2061–2062, 1968.
193. *Ichikawa K.* Output feedback stabilisation. Int. J. Control, vol. 16, No. 3, pp. 513–522, 1972.
194. *Jameson A.* Design of a single-input system for specified roots using output feedback. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-15, pp. 345–348, 1970.
195. *Jameson A., Kreindler E.* Inverse problem of linear optimal control. SIAM J. Control, vol. 11, No. 1, pp. 1–19, 1973.
196. *Johnson C. D.* Optimal control of the linear regulator with Constant disturbances. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-13, No. 4, pp. 416–421, 1968.
197. *Johnson C. D.* Further Study of the Linear Regulator with Disturbances – the Case of Vector Disturbances Satisfying a Linear Differential Equation. IEEE Trans. Automat. Control. vol. AC-15, No. 2, pp. 222–228, 1970.
198. *Johnson C. D.* A Unifield Canonical Form for Controllable and Uncontrollable Linear Dynamical Systems. Int. J. Control, vol. 13, No. 3, pp. 487–517, 1971.
199. *Johnson C. D.* Accomodation of Disturbances in Linear Regulator and Servomechanism Problems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, pp. 635–644, 1971.
200. *Johnson C. D.* Stabilization of linear systems with output feedback. Proc. 5th IFAC Congress, paper 29.3, Paris, 1972.
201. *Johnson C. D.* Stabilization of Linear Dynamic Systems with Respect to Arbitrary Linear Subspaces. J. Math. Anal. Appl., vol. 44, No. 1, pp. 175–186, 1973.
202. *Johnson C. D.* Algebraic Solution of the Servomechanism Problem with External Disturbances. Trans. ASME, ser. D, J. Dynamic Syst. Measurement Control, March, pp. 25–35, 1974.
203. *Johnson C. D.* On observers for systems with unknown and in accessible inputs. Int. J. Control, vol. 21, No. 5, pp. 825–831, 1975.
204. *Johnson T. L., Athans M.* On the Design of Optimal Constrained Dynamic Compensators for Linear Constant Systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-15, pp. 658–660, 1970.
205. *Jones J. Jr.* Solution of certain matrix equation. Proc. Amer. Math. Soc., vol. 31, pp. 333–339, 1972.
206. *Jordon D., Sridar B.* An Efficient Algorithm for Calculation of the Luenberger Canonical Form. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-18, pp. 292–295, 1973.
207*. *Kalman R. E.* On the general theory of control systems. Proc. 1th IFAC Congress, Moscow, Butterworths, London, 1960.
208. *Kalman R. E.* Contributions to the theory of optimal control. Boletin de la Sociedad Mathematica Mexicana, vol. 5, Segunda serie, No. 1, pp. 102–119, 1960.
209. *Kalman R. E.* Mathematical Description of Linear Dynamical Systems. J. Soc. Ind. Appl. Math. Control, vol. AC-5, No. 2, pp. 94–105, 1960.
210. *Kalman R. E.* Canonical structure of linear dynamical systems. Proc. Nat. Acad. Sci., (USA), vol. 48, pp. 596–600, 1962.
211. *Kalman R. E.* On the stability of time-varying linear systems. Trans. IRE PGCT, vol. 9, pp. 420–422, 1962.
212. *Kalman R. E.* Mathematical description of linear dynamical systems. SIAM J. Control, vol. 1, pp. 152–192, 1963.
213*. *Kalman R. E.* When is a linear system optimal? J. Basic Engn (Trans. ASME, ser. D), vol. 86D, pp. 51–60, 1964.
214. *Kalman R.* E. On the Hermite-Fujiwara Theorems in stability theory. Quart. Appl. Math., vol. 23, pp. 279–282, 1965.
215. *Kalman R. E.* Algebraic structure of linear dynamical systems. 1. The module of Σ. Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), vol. 54, pp. 1503–1508, 1965.
216. *Kalman R. E.* Toward a theory of difficalty of computation in optimal control. Proc. 4th IBM Scientific Computing Symposium, pp. 25–43, 1966.
217. *Kalman R. E.* On structural properties of linear, constant, multivariable systems. Proc. 3rd IFAC Congress, London, 1966.
218. *Kalman R. E.* Algebraic aspects of the theory of dynamical systems, in «Differential Equations and Dynamical Systems» J. K. Halle and J. P. LaSalle (eds), Acad. Press, pp. 133–146, 1967.
219. *Kalman R. E.* Lectures on controllability and observability. Centro Intern. Matematico Estino, Bologna, Italy, 1968.

220. *Kalman R. E.* Algebraic characterization of polynomials whose zeros lie in certain algebraic domains. Proc. Nat. Acad. Sci., vol. 64, pp. 818–882, 1969.
221. *Kalman R. E.* Kronecker invariants and feedback. In «Ordinary Differential Equations», ed. E. D. Weiss, N. Y. Acad. Press, pp. 959–971, 1972.
222. *Kalman R. E., Bertram J. E.* Control System Analysis and Design Via the «Second Method» of Lyapunov. 1. Continuous-Time Systems. Trans. ASME J. Basic Engr., pp. 371–393, 1960.
223* *Kalman R. E., Bucy R. S.* New results in linear filtering and prediction theory. Trans. ASME J. Basic Engr., vol. 83D, pp. 95—108, 1961.
224. *Kalman R. E., Ho Y. C., Narendra K.* Controllability of Linear Dynamical Systems. Contrib. Diff. Equations, vol. 1, no. 2, pp. 189–213, 1963.
225*. *Kalman R. E., Falb P. Z., Arbib M. A.* Topics in Mathematical System Theory. N. Y. McGraw-Hill, 1969.
226. *Kaufmann I.* On Pole and Zeros of Linear Systems. IEEE Trans., vol. CT-20, No. 2, pp. 93–101, 1973.
227. *Kimura H.* Pole Assignment by Gain Output Feedback. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-20, No. 4, pp. 509–516, 1975.
228. *Kirk D. E.* Optimal Control Theory. An Introduction. N. Y. Englewood Cliffs, 1970.
229. *Kleinmann D. L.* On an iterative technique for Riccati equation computations. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-13, pp. 114–115, 1968.
230. *Kleinman D. L.* An easy way to stabilize a linear constant system. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-15, p. 692, 1970.
231. *Kleinman D. L.* Stabilizing a Discrete, Constant, Linear Systems with Application to Iterative Methods for Solving the Riccati Equation. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-19, pp. 252–254, 1974.
232. *Koenigsberg W. D., Frederick D. K.* Output Feedback Control with Application to Unstable Linear Systems. Preprints JACC, N. Y., IEEE, pp. 674–682, 1970.
233. *Koivuniemi A. J.* Parameter Optimization in Systems Subject to Worst (Bounded) Disturbance. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-11, No. 3, pp. 427–433, 1966.
234. *Koivuniemi A. J.* A computational technique for the design of a specific optimal controller. IEEE Trans Automat. Control, vol. AC-12, pp. 180–183, 1967.
235. *Kreindler E.* Closed — loop sensitivity reduction of linear optimalco control systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-13, pp. 254–262, 1968.
236. *Kreindler E.* Formulation of the minimum trajectory sensitivity problem. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-14, pp. 206–207, 1969.
237. *Kreindler E., Hedrick J. K.* On the equivalence of quadratic loss functions. Int. J. Control, vol. 11, pp. 213–222, 1970.
238. *Kreisselmeier G.* A solution of bilinear matrix equation. SIAM J. Appl. Math., vol. 23, pp. 334–338, 1972.
239. *Kreisselmeier G.* Stabilization of Linear Systems by Constant Output Feedback Using the Riccati Equation. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-20, pp. 556–557, 1975.
240. *Kucera V.* A contribution to matrix quadratic equations. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-17, pp. 344–347, 1972.
241. *Kucera V.* On nonnegative definite solution to matrix quadratic equations. Proc. 5th IFAC Congress, Paris, paper 29.4, 1972.
242. *Kucera V.* The matrix equation $AX+XB=C$. SIAM J. Appl. Math., vol. 26, No. 1, pp. 15–25, 1974.
243. *Kwakernaak H.* The state of the art in linear systems. Proc. 5th IFAC Congress. Paris, paper C-35, 1972.
244. *Kwakernaak H., Sivan R.* Linear Optimal Control Systems. N. Y., Wiley — Interscience, 1972.
245. *Kwatny H. G.* Minimal Order Observers and Certain Singular Problems of Optimal Estimation and Control. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-19, pp. 274–276, 1974.
246. *Lamba S. S., Rao V. S.* Derivation of aggregation matrices for simplified models of linear dynamic systems and their application for optimum control. JACC preprints, pp. 498–503, N. Y., IEEE, 1973.
247. *Lancaster P.* Explicit Solutions of Linear Matrix Equations. SIAM Review, vol. 12, No. 4, pp. 544–566, 1970.
248. *Langenhop C. E.* On the stabilization of linear systems. Proc. Amer. Math. Soc., vol. 15, No. 5, pp. 735–742, 1964.
249. *Langholz G., Frankenthal S.* Reduction to normal form of a state equation in the presence of input derivatives. Int. J. Control Systems Sci., vol. 5, No. 7, pp. 705–706, 1974.
250. *Lapidus L., Luus R.* Optimal Control of Engineering Process. Waltman, Mass, Blaissdell, 1967.
251. *Latour P. R.* Optimal control of linear multivariable plants with constant disturbances. Proc. JACC, paper 8-E3, pp. 908–916, N. Y., IEEE, 1971.
252. *Levine W. S., Athans M.* On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Multivariable Systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-15, No. 1, pp. 44–48, 1970.
253. *Levine W. S., Johnson T. L., Athans M.* Optimal limited state variable ftedback

controller for linear systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, pp. 785–793, 1971.
254. *Levy R. E., Foss A. S., Grens E. A.* II. Response Modes of a Binary Distillation Column. Ind. Eng. Chem. Fundam., vol. 8, pp. 765–776, 1969.
255. *Liferman J.* Systems lineaires variable d'etat. Paris, Masson, 1972.
256. *Lion C. T., Weigand W. A., Lim H. C.* Optimal output feedback control for systems with inaccessible state variables. Int. J. Control, vol. 15, No. 1, pp. 129–141, 1972.
257. *Lion C. T., Weigand W. A., Lim H. C.* Integral action in the optimal control of linear systems with some inaccessible state variables. Int. J. Control, vol. 17, No. 5, pp. 1029–1039, 1973.
258. *Lovass-Nagy V., Powers D. L.* On output feedback control. Int. J. Control, vol. 21, No. 6, pp. 1025–1028, 1975.
259. *Luenberger D. G.* Observing the state of linear system. IEEE Trans. on Mil Electr., MIL-8, No. 2, pp. 190–197, 1964.
260. *Luenberger D. G.* Observers for multivariable systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-11, pp. 190–197, 1966.
261. *Luenberger D. G.* Canonical Forms for Linear Multivariable Systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-12, pp. 290–293, 1967.
262. *Luenberger D. G.* An introduction to observers. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, No. 6, pp. 596–602, 1971.
263. *Luus R., Mutharasan R.* Stabilization of linear system behaviour by pole shifting. Int. J. Control, vol. 20, No. 3, pp. 395–405, 1974.
264. *MacFarlane A. G. J.* Return-difference and return-ration matrices and their use in analysis and design of multivariable feedback control systems. Proc. IEE, vol. 117, pp. 2037–2049, 1970.
265. *MacFarlane A. G. J.* Linear multivariable feedback theory: a survey. Automatica, vol. 8, pp. 455–492, 1972.
266. *MacFarlane A. G. J.* Trends in linear multivariable control theory. Automatica, vol. 2, pp. 273–277, 1973.
267. *MacLane S.* Categories for Working Mathematician. N. Y., Springer, 1971.
268. *MacLane S., Birkhoff G.* Algebra. N. Y., Macmillan, 1967.
269. *Maki M. C., Van de Vegte J.* Optimal and Constrained-Optimal Control of a Flexible Launch Vehicle. AIAA J., vol. 10, No. 6, pp. 796–799, 1972.
270. *Maki M. C., Van de Vegte J.* Optimization of Multi-Input Systems with Assigned Poles. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-19, No. 2, pp. 130–133, 1974.
271. *Maki M. G., Van de Vegte J.* Output feedback optimization of multi-input systems with assigned poles. Int. J. Control. vol. 22, No. 3, 389–397, 1975.
272. *Man F. T.* A Theorem in the Lyapunov Matrix Equation. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-14, pp. 306, 1969.
273. *Man F. T.* Suboptimal Control of Linear Time-Invariant Systems with Incomplete Feedback. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-15, pp. 112–114, 1970.
274. *Mantey P. E.* Eigenvalue sensitivity and state variable selection. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-13, pp. 263–269, 1968.
275. *Marino P. J.* On the synthesis of insensitive linear feedback systems. Int. J. Control, vol. 6, pp. 33–50, 1967.
276. *Markland C. A.* Optimal model-following control system synthesis techniques. Proc. IEE, vol. 117, pp. 623–627, 1970.
277. *Martensson K.* On the matrix Riccati equation. Inf. Sci., vol. 3, pp. 17–49, 1971.
278. *Martin C.* Equivalence of quadratic performance criteria. Int. J. Control, vol. 17, pp. 653–658, 1973.
279. *McBrinn D. E., Roy R. J.* Stabilization of linear Multivariable Systems by Output Feedback. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-17, pp. 243–245, 1972.
280. *Meditch J., Hostetter G.* Observers for systems with unknown and inaccessible inputs, Int. J. Control, vol. 19, No. 3, pp. 473–480, 1974.
281. *Melsa J. L., Schultz D.* Linear Control Systems. N. Y., McGraw-Hill, 1969.
282. *Mendel J. M.* On the Need for the Use of a Measure of State Estimation Errors in the Design of Quadratic-Optimal Control Gains. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, No. 5, pp. 500–503, 1971.
283. *Mendel J. M., Gieseking D. L.* Bibliography on the linearquadratic Gaussian problem. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, pp. 847–869, 1971.
284. *Meyer G. G. L., Payne H. J.* An Iterative Method of Solution of the Algebraic Riccati Equation. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-17, pp. 550–551, 1972.
285. *Miller R.* A. On the design of dynamic output feedback regulators for linear systems. Int. J. Control, vol. 21, No. 4, pp. 545–559, 1975.
286. *Mita T.* Design of a zero-sensitive observer. Int. J. Control, vol. 22, No. 2, pp. 215–228, 1975.
287. *Molinari B. P.* Algebraic solution of matrix linear equations in control theory. Proc. IEE, vol. 116, pp. 1748–1754, 1969.
288. *Molinary B. R.* Redundancy in linear optimal regulator problem. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, No. 1, pp. 83–85, 1971.
289. *Molinari B. R.* The stabilizing solution of the algebraic Riccati equation SIAM J. Control, vol. 11, pp. 262–271, 1973.

290. *Moore J. B.* A Note on Feedback Compensators in Optimal Linear Systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-15, N. 4, pp. 494–495, 1970.
291. *Moore J. B.* A Note on Minimal-Order Observers. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-17, No. 1, pp. 255–256, 1972.
292. *Moore J. B., Silverman L. M.* Equivalent characterization of zeros in multivariable systems. IEEE Decision and Control Conf., 1972.
293. *Moore J. B., Ledwich G. F.* Minimal Order Observers for Estimating Linear Functions of a State Vector. IEEE Trans. Automat. Control., vol. AC-20, No. 5, pp. 623–632, 1975.
294. *Morgan B. S.* The synthesis of linear multivariable systems by state variable feedback. Preprints, JACC, Stanford, Calif., pp. 468–472, 1964.
295. *Morgan B. S.* Sensitivity analysis and synthesis of multivariable systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-11, pp. 506–512, 1966.
296. *Morse A. S.* Structural invariants of linear multivariable systems. SIAM J. Control, vol. 11, pp. 446–465, 1973.
297. *Morse A. S., Wonham W. M.* Decoupling and pole assignment by dynamic compensation. SIAM J. Control, vol. 8, pp. 317–337, 1970.
298. *Morse A. S., Wonham W. M.* Status of noninteracting control. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, pp. 568–581, 1971.
299. *Mufti J. H.* A review of the pole assignment problem for multivariable systems. National Research council of Canada. Mechanical Eng. report., Ottawa, 1971.
300. *Munro N.* Computer-aided-design procedure for reduced-order observers. Estimate of entire state vector. Proc. IEE, vol. 120, No. 2, pp. 319–324, 1973.
301. *Munro N.* Further results on pole-shifting using output feedback. Int. J. Control, vol. 20, No. 5, pp. 775–786, 1974.
302. *Munro N., Vardulakis A.* Pole-shifting using output feedback. Int. J. Control. vol. 18, No. 6, pp. 1267–1273, 1973.
303. *Munro N., Vardulakis A. I.* Computer-aided design procedure for reduced-order observers. Proc. IEE, vol. 121, No. 4, pp. 310–312, 1974.
304. *Murdock P.* Observer design for a linear functional of the state vector. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-18, pp. 308–310, 1973.
305. *Murphy R. D., Narendra K. S.* Design of helicopter stabilization systems using optimal control theory. J. Aircr., vol. 6, pp. 129–136, 1969.
306. *Nazaroff G. J.* Placement of observer eigenvalues. AIAA J., vol. 10, No. 12, pp. 1686–1688, 1972.
307. *Neill T. B. M.* The inefficiency of the adjoint network approach to the calculation of first order sensitivity coefficients. Computer aided design, vol. 6, No. 1, pp. 32–34, 1974.
308. *Newman A. K.* Ageneral theory for compensating constant linear systems. Int. J. Control, vol. 15, No. 4, pp. 641–649, 1972.
309. *Newman M. M.* Design algorithms for minimal order Luenberger observers. Electronics Lett., vol. 5, pp. 390–392, 1969.
310. *Newman M. M.* Optimal and sub-optimal control using an observer when some of the state variables are not measurable. Int. J. Control, vol. 9, pp. 281–290, 1969.
311. *Newman M. M.* On attempts to reduce the sensitivity of the optimal linear regulator to a parameter change. Int. J. Control, vol. 11, pp. 1079–1084, 1970.
312. *Nikiforuk P. N., Gupta M. M., Choe H. H.* Control of unknown plants in reduced state space. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-14, pp. 489–496, 1969.
313. *Pace I. S., Barnett S.* Numerical comparison of root-location algorithms for constant linear systems. IMA Conf. on Recent Math. Developments in Control, Bath., 1972.
314. *Pace I. S., Barnett S.* Comparison of numerical methods for solving Liapunov Matrix Equations. Int. J. Control, vol. 15, pp. 907–915, 1972.
315. *Padulo L., Arbib M. A.* Deterministic Systems: A Unified State — Variable Approach to Discrete and Continuous Systems. Philad. Saunders, 1974.
316. *Pagurek B.* Sensitivity of the performance of optimal control systems to plant parameter variations. Int. J. Control, vol. 1, pp. 33–45, 1965.
317. *Pai M. A., Prabhu S. S., Ramana I. V.* Modal control of a power systems. Int. J. Systems Sci., vol. 6, No. 1, pp. 87–100, 1975.
318. *Pal J. K., Mahalanabis A. K.* Optimal stationary feedback control with specified relative stability. Proc. IEE, vol. 120, No. 4, 1973.
319. *Panda S. P.* Compensator design for decoupling of multivariable systems by state feedback. Int. J. Control, vol. 13, No. 4, pp. 721–735, 1971.
320. *Panda S. P.* Inverse Problem for Linear Systems Containing Uncertain Parameters. Trans. ASME, J. Dynamic Systems Meas. Control, pp. 17–23, March 1973.
321. *Paraskevopoulos P. N., Tzafestas S. G.* Group decoupling theory for a generalized linear multivariable control system. Int. J. Syst. Sci., vol. 6, No. 3, pp. 239–248, 1975.
322. *Paraskevopoulos P. N., Tzafestas S. G.* New results in feedback modal-controller design. Int. J. Control, vol. 21, No. 6, pp. 911–928, 1975.
323. *Park H., Seborg D. E.* Eigenvalue assignment using proportional-integral feedback control. Int. J. Control, vol. 20, No. 3, pp. 517–523, 1974.
324. *Parker K. T.* Design of proportional-integral derivative controllers by the use of optimal-linear-regulator theory. Proc. IEE, vol. 119, No. 7, pp. 911–914, 1972.

325. *Parks P. C.* A new proff of the Routh-Hurwitz stability criterion using the second method of Liapunov. Proc. Camb. Phil. Soc. Math. Phys. Sci., vol. 58, pp. 694–702, 1962.
326. *Parks P. C.* Liapunov and the Schur-Cohn stability criterion. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-9, p. 121, 1964.
327. *Patel R. V.* Pole assignment by Means of Unrestricted-rank Output Feedback. Proc. IEE, vol. 121, No. 8, pp. 874–878, 1974.
328. *Patel R. V.* Relationship between feedback and the transfer — function matrix of multivariable system. Electron. Lett., vol. 10, No. 18, pp. 386–387, 1974.
329. *Patel R. V.* On output feedback pole assignability. Int. J. Control, vol. 20, No. 7, pp. 955–959, 1974.
330. *Patel R. V.* On zeros of multivariable systems. Int. J. Control, vol. 21, No. 4, pp. 599–608, 1975.
331. *Patel R. V.* Multivariable systems design by transfer function synthesis. Int. J. Systems Sci., vol. 6, No. 9, pp. 819–832, 1975.
332. *Paul C. R.* Pole specifications in decoupling systems. Int. J. Control. vol. 15, No. 4, pp. 651–664, 1972.
333. *Paul C. R., Kuo Y. L.* Controllability and observability of linear dynamical systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, pp. 207–209, 1971.
334. *Pearson A. E., Anakwa W. N.* A design procedure for multivariable control systems. Proc. 6th Hawaii Int. Conf. on System Sci., paper 30–2, pp. 866–875, 1973.
335. *Pearson J. B.* Compensator design for dynamic optimization. Int. J. Control, vol. 9, No. 4, pp. 473–482, 1969.
336. *Pearson J. B., Ding C. Y.* Compensator Design for Multivariable Linear Systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-14, pp. 130–134, 1969.
337. *Pearson J. B., Staats P. W.* Robust Controllers for Linear Regulators. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-19, pp. 231–234, 1974.
338. *Pearson J. B., Shields R. W., Staats P. W.* Robust Solutions to Linear Multivariable Control Problems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-19, No. 5, pp. 508–517, 1974.
339. *Pederson J. O., Ponher F., Solheim O. A.* Computer aided design of multivariable control systems. Proc. 5th IFAC Congress, Paris, pt 1, paper 10.5, 1972.
340. *Perkins W. R., Cruz J. B., Gonzales R. L.* Design of minimum sensitivity systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-13, pp. 159–167, 1968.
341. *Perkins W. R., Cruz J. B.* Feedback properties of linear regulators. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, No. 6, pp. 659–664, 1971.
342. *Popov V. M.* Some properties of the control systems with irreducible matrix-transfer functions. Lecture Notes en Math, No. 144, Seminar on Diff. Equat. and Dynamic. Syst. II, Springer — Verlag, Berlin, 1969.
343. *Popov V. M.* Invariant description of linear time-invariant controllable systems. SIAM J. Control, vol. 10, pp. 252–284, 1972.
344. *Porter B.* Design of optimal linear control systems with quadratic performance indeces. Proc. IEE, vol. 115, pp. 1373–1374, 1968.
345. *Porter B.* Assignment of closed-loop eigenvalues by the direct method of Liapunov. Int. J. Control, vol. 10, pp. 153–157, 1969.
346. *Porter B.* Synthesis of Dynamical Systems. London, Nelson, 1969.
347. *Porter B.* Singular perturbation methods in the design of stabilizing feedback controllers for multivariable linear systems. Int. J. Control, vol. 20, No. 4, pp. 689–692, 1974.
348. *Porter B., Bradshaw A.* Multivariable time-invariant linear systems with input-derivative control: state controllability and eigenvalue assignment assignability. Int. J. Control., vol. 16, No. 1, pp. 101–104, 1972.
349. *Porter B., Bradshaw A.* Mode-controllability characteristics of multivariable time-invariant linear systems with input-derivative control. Int. J. Control, vol. 16, No. 1, pp. 105–107, 1972.
350. *Porter B., Bradshaw A.* Eigenvalue assignment in multivariable linear systems with input-output control. Int. J. Control, vol. 16, No. 1, pp. 109–113, 1972.
351. *Porter B., Woodhead M. A.* Performance of optimal control when some of the state variables are not measurement. Int. J. Control, vol. 8, pp. 191–195, 1968.
352. *Porter B., Power H. M.* Controllability of multivariable systems incorporating integral feedback. Electron. Lett., vol. 6, pp. 689–690, 1970.
353. *Porter B., Crossley T. R.* Modal Control. London Taylor & Francis, 1972.
354. *Porter B., Taylor F.* Modal control of production-inventory systems. Int. J. Systems Sci., vol. 3, pp. 325–331, 1972.
355. *Porter B., Bradshaw A.* Modal control of production-inventory systems using piecewise-constant control policies. Int. J. Systems Sci., vol. 5, No. 8, pp. 733–742, 1974.
356. *Porter B., Crossley T. R., Bradshaw A.* Synthesis of Disturbance-Rejection Controllers for Linear Multivariable Continuous-Time Systems. Israel J. Technology, vol. 13. pp. 25–30, 1975.
357. *Porter W. A.* Modern Foundation of System Engineering. N. Y., MacMillan, 1966.
358. *Porter W. A.* On the matrix Riccati equation. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-12, pp. 746–749, 1967.

359. *Potter J. E.* Matrix Quadratic Solutions. SIAM J. Appl. Math., vol. 14, pp. 496–501, 1966.
360. *Power H. M.* The companion matrix and Liapunov Functions for linear multivariable time-invariant systems. J. Franklin Inst., vol. 283, pp. 214–234, 1967.
361. *Power H. M.* Effect of State-Variable Feedback on the Numerators of Transfer Functions. Electron. Lett., vol. 6, No. 15, pp. 490–491, 1970.
362. *Power H. M.* Extension to the method of Anderson and Luenberger for eigenvalue assignment. Electron. Lett., vol. 7, pp. 158–160, 1971.
363. *Power H. M.* Dyadic feedback lows for linear multivariable systems. Int. J. Syst. Sci., vol. 3, pp. 293–312, 1972.
364. *Power H. M.* On the solution of a matrix equation in the theory of Luenberger observers. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-18, pp. 70–71, 1973.
365. *Power H. M.* A new result on eigenvalue assignment by means of dyadic output feedback. Int. J. Control, vol. 21, No. 1, pp. 149–158, 1975.
366. *Power H. M.* New solution to a problem in Luenberger observer design. Electron. Lett., vol. 11, pp. 65–66, 1975.
367. *Puri S., Singh H., Lal M.* Transformation of time-varying autonomous systems to companion form. Electron. Lett., vol. 10, No. 2, pp. 24, 1974.
368. *Ralston A.* A symmetric matrix formulation of the Hurwitz-Routh stability criterion. IRE Trans. Automat. Control, vol. AC-7, pp. 50–51, 1962.
369. *Ramani H., Atherton D. P.* Design of regulators using time-multipler quadratic performance indices. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-19, pp. 65–67, 1974.
370. *Ramar K., Ramaswami B.* A note on optimal linear regulators with incomplete state feedback. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-13, pp. 443–444, 1968.
371. *Ramar K., Ramaswami B.* Transformation of time-variable multi-input systems to a canonical form. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, 371–374, 1971.
372. *Ramar K., Ramaswami B.* A new method of evaluating quadratic and time-weighted quadratic form performance indices. Int. J. Control, vol. 13, pp. 83–96, 1971.
373. *Ramar K., Ramaswami B.* Optimal servo problems with incomplete state feedback. 5th Hawaii Int. Conf. on Syst. Sci., Hawaii, 1972.
374. *Ramaswami B., Ramar K.* On the transformation of time-variable systems to the phase-variable canonical form. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-14, pp. 417–419, 1969.
375. *Rao S. G., Soudrack A. C.* Synthesis of Optimal Control Systems with Near Zero Sensitivity Feedback. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, No. 2, pp. 194–196, 1971.
376. *Reddy D. C.* Sensitivity of an eigenvalue of a multivariable control systems. Electron. Lett., vol. 2, pp. 446, 1966.
377. *Reid W. T.* Riccati Differential Equation. N. Y.– L., Acad. Press, 1972.
378. *Rekasius Z. V.* Decoupling of multivariable systems by means of state feedback. Proc. 3rd Allerton Conf., Monticello, pp. 437–448, 1965.
379. *Rekasius Z. V.* Optimal linear regulators with incomplete state feedback. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-12, pp. 296–299, 1967.
380. *Retallack D. G.* Transfer-function matrix approach to observer design. Proc. IEE, vol. 117, pp. 1153–1155, 1970.
381. *Retallack D. G., MacFarlane A. G. J.* Pole-shifting techniques for multivariable systems. Proc. IEE, vol. 117, pp. 1037–1038, 1970.
382. *Rissanen J.* Basis of invariants and canonical forms for linear dynamic systems. Automatica, vol. 10, pp. 175–182, 1974.
383. *Roman J. R., Bullock T. E.* Design of Minimal Order State Observers for Linear Functions of the State Via Realization Theory. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-20, No. 5, pp. 613–622, 1975.
384. *Rosenbrock H. H.* Distinctive problems of process control. Chem. Engng Progr., vol. 58, No. 9, pp. 43–50, 1962.
385. *Rosenbrock H. H.* Control of distillation columns. Trans. Instn. Chem. Engrs, vol. 40, pp. 35–53, 1962.
386. *Rosenbrock H. H.* On linear system theory. Proc. IEE, vol. 114, pp. 1353–1359, 1967.
387. *Rosenbrock H. H.* The assignment of closed-loop poles. University of Manchester, Inst. of Sci. and Technology, Control Systems Centre, Report 20, 1967.
388. *Rosenbrock H. H.* State Space and Multivariable Theory. London, Nelson, 1970.
389. *Rosenbrock H. H., Storey C.* Mathematics of Dynamical Systems. N. Y., Wiley, 1970.
390. *Rosenbrock H. H.* Progress in the design of multivariable control systems. Trans. Inst. Meas. Control, vol. 4, pp. 9–11, 1971.
391. *Rosenbrock H. H.* The Stability of Multivariable Systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-17, No. 1, pp. 105–107, 1972.
392. *Rosenbrock H. H.* Modules and definition of state. Int. J. Control, vol. 16, pp. 433–435, 1972.
393. *Rosenbrock H. H.* Computer Aided Control Systems Design. L., Acad. Press, 1974.
394. *Rosenbrock H. H.* Structural properties of linear dynamical systems. Int. J. Control, vol. 20, No. 2, pp. 191–202. 1974.

395. *Rosenbrock H. H., Rowe A.* Allocation of poles and zeros. Proc. IEEE, vol. 117, pp. 1879–1886, 1970.
396. *Rosenbrock H. H., McMorran P. D.* Good, Bad, or Optimal? IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, No. 6, pp. 552–553, 1971.
397. *Rubio J. E.* The Theory of Linear Systems. N. Y.– L., Acad. Press, 1971.
398. *Rumsey A. F., Pouner E. T.* Digital-computer control of vehicles in automated transportation systems. Proc. IEE, vol. 120, No. 10, pp. 1267–1272, 1973.
399. *Rumsey A. F., Powner E. T.* The synchronous moving cell control philosophy for automated transportation systems. Trans. Plann. & Technol., vol. 2, pp. 157–164, 1974.
400. *Rumsey A. F., Powner E. T.* Longitudinal control of automated vehicles in quided transportation systems. Proc. IEE, vol. 121, No. 11, pp. 1435–1440, 1974.
401. *Sain M. K.* Functional reproducibility and the existence of classical sensitivity matrices. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-12, p. 458, 1967.
402. *Salmon D. M.* Minimax controller design. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-13, pp. 369–376, 1968.
403. *Sandell N. R.* On Newton's Method for Riccati Equation Solution. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-19, pp. 254–255, 1974.
404. *Sato S. M., Lopresti P. V.* New Results in Multivariable Decoupling Theory. Automatica, vol. 7, pp. 499–508, 1971.
405. *Schlaepfer F. M., Schweppe F. C.* Continuous-Time State Estimation under Disturbances Bounded by Convex Sets. IEEE Trans. Automat. Control., vol. AC-17, No. 2, 1972.
406. *Seborg D. E., Fisher D. G., Hamilton J. C.* An Experimental Evaluation of State Estimation in Multivariable Control Systems. Automatica, vol. 11, pp. 351–359, 1975.
407. *Seraji H.* Design of pole shifting and optimal controllers for a synchronous generator. Proc. IEE, vol. 121, No. 6, 1974.
408. *Seraji H.* On pole-shifting using output feedback. Int. J. Control, vol. 20, No. 5, pp. 721–726, 1974.
409. *Seraji H.* Design of cascade controllers for zero assignment in multivariable systems. Int. J. Control, vol. 21, No. 3, pp. 485–496, 1975.
410. *Seraji H.* Pole assignment techniques for multivariable systems using unity rank output feedback. Int. J. Control, vol. 21, No. 6, pp. 945–954, 1975.
411. *Seraji H.* An approach to dynamic compenstor design for pole assignment. Ont. J. Control, vol. 21, No. 6, pp. 955–966, 1975.
412. *Seraji H.* Unattainability of certain pole positions in single-input systems with output feedback. Int. J. Control, vol. 22, No. 1, pp. 119–123, 1975.
413. *Seraji H.* Pole assignment using dynamic compensators with prescribed poles. Int. J. Control, vol. 22, No. 2, 271–280, 1975.
414. *Shamash Y.* Continued fraction methods for the reduction of linear time-invariant systems. IEE Conf. on Computer Aided Syst. Design, Cambridge, 1973.
415. *Shane B. A., Barnett S.* Insensitivity of constant linear systems to finite variations in parameters. IMA Conf. on Recent Math. Develop. in Control, Bath., September, 1972.
416. *Shane B. A., Barnett S.* Insensitivity of asymptotically stal stable matrices to variations in submatrices. Int. J. Systems Sci., vol. 6, No. 7, pp. 621–632, 1975.
417. *Shapiro E. Y.* On the Lyapunov Matrix Equation. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-19, No. 5, pp. 594–596, 1974.
418. *Shinners S. M.* Modern Control System Theory and Application. Reading Mass. N. Y., Addison – Wesley, 1972.
419. *Shubert H. A.* An Analytic Solution for an Algebraic Matrix Riccati Equation. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-19, pp. 255–256, 1974.
420. *Sibjak D. D.* On stability of large scale systems under structural perturbations. IEEE Trans. Syst. Man, Cybernetics, SMC-3, pp. 415–417, 1973.
421. *Silverman L. M.* Transformation of time-variable systems to canonical (phase-variable) form. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-11, pp. 300–303, 1966.
422. *Silverman L. M.* Inversion of Multivariable Linear Systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-14, pp. 270–276, 1969.
423. *Silverman L. M.* Decoupling with State Feedback and Precompensation. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-15, pp. 487–489, 1970.
424. *Silverman L. M.* Realization of linear dynamical systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, pp. 554–567, 1971.
425. *Silverman L. M., Payne H. J.* Input-Output Structure of Linear Systems with Application to the Decoupling Problem. SIAM J. Control, vol. 9, pp. 199–203, 1971.
426. *Simaan M.* A note on the stabilizing solution of the algebraic Riccati equation. Int. J. Control, vol. 20, No. 2, pp. 239–241, 1974.
427. *Simon J. D., Mitter S. K.* A theory of modal control. Inf. and Control, vol. 13, pp. 316–353, 1968.
428. *Simon J. D., Mitter S. K.* Synthesis of transfer function matrices with invariant zeros. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-14, pp. 420–421, 1969.

429. *Singer R. A.* Selecting state variables to minimize eigenvalue sensitivity of multivariable systems. Automatica, vol. 5, pp. 85–93, 1969.
430. *Sinha N. K., Bereznai G. T.* Optimum approximation of high-order system by low-order models. Int. J. Control, vol. 14, pp. 951–959, 1971.
431. *Sirisena H. R., Choi S. S.* Optimal pole placement in linear multivariable systems using dynamic output feedback. Int. J. Control, vol. 21, No. 4, pp. 661–671, 1975.
432. *Sirisena H. R., Choi S. S.* Pole placement in output feedback control systems for minimum sensitivity to plant parameter variations. Int. J. Control, vol. 22, No. 1, pp. 129–140, 1975.
433. ***Slivinsky Ch. R., Schultz D. G., Weaver L. E.*** The design of linear multivariable control systems using modern control theory (with applications to coupled core reaction control). NASA Contractor report CR-1345, Wash., 1969.
434. *Smith C. L., Murrill P. W.* An optimal controller for multivariable systems with disturbance inputs. JACC Preprints, pp. 469–470, N. Y., IEEE, 1969.
435. *Smith H. W.* Dynamic control of a two-stand cold mill. Automatica, vol. 5, pp. 183–190, 1969.
436. *Smith H.W., Davison E. J.* The design of industrial regulators: Integral feedback and feedforward control. Proc. IEE, vol. 119, pp. 1210–1216, 1972.
437. *Smith P. G.* Numerical solution of the matrix equation $AX+XA^t+B=0$. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, pp. 278–279, 1971.
438. *Solheim O. A.* Design of optimal control systems with prescribed eigenvalues. Int. J. Control, vol. 15, No. 1, pp. 143–160, 1972.
439. *Sridhar B., Lindhar D. P.* A note on pole assignment. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-17, pp. 822–823, 1972.
440. *Sturgeon W. R., Loscutoff W. V.* Application of Modal Control and Dynamic Observers to Control of a double Inverted Pendulum. Proc. 6th Hawaii Int. Conf. on System Sci., Hawaii, paper 30–1, pp. 857–865, 1973.
441. *Timothy L., Bona B. E.* State space analysis. An introduction. N. Y., McGraw-Hill, 1968.
442. *Topaloglu T., Seborg D. E.* Adesign procedure for pole assignment using output feedback. Int. J. Control, vol. 22, No. 6, pp. 741–748, 1975.
443. *Toros T., Dale S. E.* An algoritm for pole assignment using output feedback. Proc. JACC, Univer. Tex., pp. 309–312, N. Y., 1974.
444. *Tzafestas S. G., Paraskevopoulos P. N.* Sensitivity reduction in modal control systems. J. Frankl. Inst., vol. 298, No. 1, pp. 29–43, 1974.
445. *Tuel W. G., Lee I., De Russo P. M.* Synthesis of optimal control systems with sensitivity constraints. Proc. 3rd IFAC Congress, paper 24, book 2, 1966.
446. *Van de Vegte J., Maki M. C.* Optimization of systems with assigned poles. Int. J. Control, vol. 18, No. 5, pp. 1105–1112, 1973.
447. *Vardulakis A. I.* Cyclicity and conversion to cyclicity. Int. J. Control, vol. 22, No. 6, pp. 801–806, 1975.
448. *Vaughan D. R.* A negative exponential solution for matrix Riccati equations. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-14, pp. 72–75, 1969.
449. *Vaughan D. R.* Further comments on «Eigenvector scaling in a solution of the matrix Riccati equation», IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, pp. 211–212, 1972.
450. *Viswanadham N., Sarma V. V. S.* Equivalent optimal control problems for multi-input systems. Proc. JACC, Univer. Tex., pp. 721–725, N. Y., 1974.
451. Vit Karel Iterative solution of the Riccati equation. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-17, pp. 258–259, 1972.
452. *Vittal Rao, Lamba S. S.* Suboptimal control of linear systems via simplified models of Chidambara. Proc. IEE, vol. 121, No. 8, pp. 879–882, 1974.
453. *Wall E. T., Stewart D. F.* A Direct Synthesis of Q in the Lyapunov Equation $Q=-]A'R+RA]$. IEEE Trans. Automat. Control. vol. AC-17, p. 726–1972.
454. *Walter O. H. D.* Eigenvector scaling in a solution of the matrix Riccati equation. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-15, pp. 486–487, 1970.
455. *Walter O. H. D.* Eigenvector scaling in a solution of the matrix Riccati equation. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-15, pp. 486–487, 1970.
456. *Walter O. H. D.* Real-matrix solutions for the linear optimal regulator. Proc. IEE, vol. 119, pp. 621–624, 1972.
457. *Wang S. H.* Relationship between triangular decoupling and invertability of linear multivariable systems. Int. J. Control, vol. 15, pp. 395–399, 1972.
458. *Wang S. H., Davison E. J.* Canonical forms of linear multivariable systems. Dep. Elec. Eng. Univ. Toronto, Canada, Control Systems Report 7203, Apr. 1972.
459. *Wang S. H., Desoer C. A.* The exact model matching of linear multivariable systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-17, pp. 347–348, 1972.
460. *Wang S. H., Davison E. J.* On the Controllability and Observability of Composite Systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-18, No. 1, 1973.
461. *Wang S. H., Davison E. J.* Design of decoupled control systems. A frequency domain approach. Int. J. Control, vol. 21, No. 4, pp. 529–536, 1975.
462. *Wang S. H., Davison E. J., Dorato P.* Observing the States of Systems with Unmeasurable Disturbances. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-20, No. 5, pp. 716–717, 1975.

463. *Wang S. H., Dorato P., Davison E. J.* On the computation of minimal indeces for linear multivariable systems. Int. J. Control, vol. 21, pp. 537–543, 1975.
464. *Warren M. E., Mitter S. K.* A necessary condition for decoupling multivariable systems. Int. J. Control, vol. 21, No. 2, pp. 177–193, 1975.
465. *Weston J. E., Bongiorno J. J.* Extention of analytical design techniques to multivariable feedback control systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-17, pp. 613–620, 1972.
466. *Wiberg D. M.* State Space and Linear Systems. N. Y.. McGraw-Hill, 1971.
467. *Willems J. C.* Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, pp. 621–634, 1971.
468. *Willems J. C.* Analysis of feedback systems. Cambridge, Mass. M.I.T. Press, pp. 136–154, 1971.
469. *Willems J. C.* On the existence of a Nonpositive Solution to the Riccati Equation. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-19, pp. 592–596, 1971.
470. *Willems J. C., Mitter S. K.* Controllability, Observability, Pole Allocation and State Reconstraction. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, pp. 582–595, 1971.
471. *Willems J. L.* Stability Theory of Dynamical Systems. London, Nelson, 1970.
472. *Willems J. L.* Disturbance isolation in linear feedback systems. Int. J. Syst. Sci., vol. 6, No. 3, pp. 233–238, 1975.
473. *Wilson R. G., Seborg D. E., Fisher D. G.* Modal approach to control law reduction. Proc. JACC, pp. 554–565, N. Y., IEEE, 1973.
474. *Witsenhausen H. S.* Sets of Possible States of Linear Systems Given Perturbed Observations. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-13, No. 5, 1968.
475. *Wolovich W. A.* On the state estimation of observable systems. Proc. 9th JACC, pp. 210–222, N. Y., IEEE, 1968.
476. *Wolovich W. A.* The Determination of State-Space Representation for Linear Multivariable Systems. 2nd IFAC Symp. on Multivariable Technical Control Systems, Dusseldorf, Germany, 1971.
477. *Wolovich W. A.* A Frequency Domain Approach to State Feedback and Estimation. IEEE Decision and Control Conf., Miami Beach, Florida, December, 1971.
478. *Wolovich W. A.* The use of state feedback for exact model matching. SIAM J. Control, vol. 10, pp. 512—523, 1972.
479. *Wolovich W. A.* Frequency domain state feedback and estimation. Int. J. Control, vol. 17, No. 2, pp. 417—428, 1973.
480. *Wolovich W. A.* On the numerators and zeros of rational transfer matrix. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-18, pp. 544—546, 1973.
481. *Wolovich W. A.* On the synthesis of multivariable systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-18, pp. 46—50, 1973.
482. *Wolovich W. A.* On the synthesis of multivariable systems. Proc. 6th Hawaii Int. Conf. on System Sci., paper 7—5, pp. 158—165, 1973.
483. *Wolovich W. A.* On Determining the Zeros of State-Space Systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-18, pp. 542—544, 1973.
484. *Wolovich W. A.* On the cancellation of multivariable system zeros by state feedback. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-19, pp. 276–277, 1974.
485. *Wolovich W. A., Falb P. L.* On the structure of multivariable systems. SIAM J. Control, vol. 7, No. 3, pp. 437—451, 1969.
486. *Wonham W. M.* On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-12, No. 6, pp. 660—665, 1967.
487. *Wonham W. M.* On Matrix Quadratic Equations and Matrix Riccati Equations. Technical Report 67—5. Center for Dynam. Syst., Brown Univer., 1967.
488. *Wonham W. M.* On a matrix Riccati equation of stochastic control. SIAM J. Control, vol. 6, pp. 681—697, 1968.
489. *Wonham W. M.* Dynamic observers: geometric theory. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-15, pp. 258—259, 1970.
490. *Wonham W. M.* Algebraic methods in linear multivariable control. Preprints JACC, St. Louis, Missouri, paper 6-A3, 1971.
491. *Wonham W. M.* Review on «Topics in Mathematical System Theory». IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-17, pp. 182—183, 1972.
492. *Wonham W. M.* Tracking and regulation in linear multivariable systems. SIAM J. Control, vol. 11, No. 3, pp. 424—437, 1973.
493. *Wonham W. M., Morse A. S.* Decoupling and Pole Assignment in Linear Multivariable Systems: a Geometric Approach. SIAM J. Control, vol. 8, pp. 1—18, 1970.
494. *Wonham W. M., Morse A. S.* Feedback invariants of linear multivariable systems. Automatica, vol. 8, pp. 93—100, 1972.
495. *Wonham W. M., Pearson J. B.* Regulation and internal stabilization in linear multivariable systems. SIAM J. Control, vol. 12, No. 1, 1974.
496. *Woodhead M. A., Porter B.* Optimal modal control. Meas. and control, vol. 6, No. 7, pp. 301—303, 1973.
497. *Yackel R. A., Kokotovic P. V.* A Boundary Layer Method for the Matrix Riccati Equation. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-18, No. 1, pp. 17—23, 1973.
498. *Yokoyama R., Kinnen E.* Phase-variable canonical form for linear multi-input multi-output systems. Int. J. Control, vol. 17, No. 6, 1973.

499. *Youla D. C., Dorato P.* On the comparision of open-loop and closed-loop optimal control systems. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-13, pp. 186—188, 1968.
500. *Young P. C., Willems J. C.* An Approach to the Linear Multivariable Servomechanism Problem. Int. J. Control, vol. 15, No. 5, pp. 961—979, 1972.
501. *Yu. Y.-N., Yongsuriya K., Wedman L. N.* Application of an optimal control theory to a power system. IEEE Trans., vol. PAS-89, pp. 55—62, 1970.
502. *Yuksel Y. O., Bongiorno J. J.* Observers for linear multivariable systems with application. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-16, pp. 603—613, 1971.
503. * *Zade L. A., Desoer C. A.* Linear Systems Theory: the State Space Approach. N. Y., McGraw-Hill, 1963.
504. *Zadicario J., Sivan R.* The Optimal Control of Linear Systems with Unknown Parameters. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-11, No. 3, 1966.

ALGEBRAICAL METHODS OF STATE SPACE IN LINEAR PLANT CONTROL THEORY

(Review of Foreign Literature)

Yu. N. ANDREEV

The paper is concerned with algebraical methods of state space in theory of linear finite dimensional systems with infinite time. Basic results in canonical representation of linear systems, in control with linear state and output feedback, in optimal (in terms of the r.m.s. performance criterion) and model control with design of state identifier (observer) are given. Design of «crude» controllers, applications, the use of tools of abstract algebra and relation of the algebraical state space methods with methods of the classical control theory are discussed.
