Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Г. Бутковский, С. С. Постнов, Е. А. Постнова, Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. I. Математические основы и проблема интерпретации, *Автомат. и телемех.*, 2013, выпуск 4, 3–42

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 3.145.170.164
29 декабря 2024 г., 22:22:26

Автоматика и телемеханика, № 4, 2013

Обзоры

© 2013 г. А.Г. БУТКОВСКИЙ, д-р техн. наук,
С.С. ПОСТНОВ
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
Е.А. ПОСТНОВА
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

ДРОБНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ. I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ПРОБЛЕМА ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Обзор посвящён проблемам использования дробного интегро-дифференциального исчисления для описания динамики различных систем и процессов управления. Рассматриваются основные понятия и проблема интерпретации дробных операторов. Приведены примеры физических систем, адекватное описание которых требует привлечения обсуждаемого аппарата.

1. Введение

Дробное интегро-дифференциальное исчисление (в дальнейшем – дробное исчисление, ДИ) развивается уже более трёхсот лет, беря начало от обсуждения в 1695 г. в переписке между Г. Лопиталем и Г. Лейбницем вопроса о смысле производной порядка $1/2$ [1]. Считается [1], что первый шаг в построении ДИ был сделан Л. Эйлером в 1738 г., заметившим, что результату вычисления производной порядка p от степенной функции можно придать смысл при нецелом p. Исследования в данном направлении проводились также П. Лапласом, С. Лакруа и Ж. Фурье, который в 1822 г. предложил первое в истории определение дробной производной произвольного положительного нецелого порядка p от произвольной, но достаточно гладкой функции $f(x)$ на основе следующего интегрального равенства:

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^p d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\left(tx - t\lambda + \frac{p\pi}{2}\right) dt,$$

где t и λ – переменные интегрирования.

Достаточно богатая история развития ДИ, вплоть до середины XX в., неоднократно и весьма полно описана в [1–8]. В первой половине XX в., примерно с 20-х гг., начали развиваться исследования не только фундаментального математического характера, но и исследования, связанные с моделированием физических систем и объяснением их свойств на основе использования аппарата ДИ. Следует отметить, что первые попытки таких исследований предпринимались ещё Ж. Лиувиллем и Н. Абелем при решении задачи о таутохроне и других классических задач, в которых возникают интегральные уравнения или соотношения, представляющие собой интегралы и производные дробного порядка. В конце XIX – начале XX вв. О. Хевисайдом было построено операционное исчисление, позволяющее проводить расчёты электрических схем. О. Хевисайдом и Т. Бромвичем было показано, что для распределённых систем, таких как полубесконечная резистивно-ёмкостная линия, передаточная функция (импеданс) выражается интегро-дифференциальным оператором, представляющим собой производную порядка $^1/_2$. В 30–40-е гг. XX в. А. Гемантом (A. Gemant), А.Н. Герасимовым, Г. Скоттом-Блэром (G.W. Scott-Blair) и Ю.Н. Работновым были проведены обширные исследования свойств вязкоупругих материалов, в ходе которых также было продемонстрировано, что в волокнистых полимерах напряжение представляется в виде свёртки дробно-степенной функции и деформации или производной от деформации. При этом дробный показатель в степенной функции обусловлен реальными физическими свойствами таких материалов. В середине XX в. Ф. Майнарди и М. Капуто показали, что использование дифференциальных уравнений дробного порядка для построения моделей в задачах термовязкоупругости более адекватно из физических соображений и позволяет более точно воспроизводить в расчётах экспериментально наблюдаемые данные. Дальнейшие обобщения привели к моделям Ю.Н. Работнова и Р. Бэгли и П. Торвика, позволившим объяснить ряд экспериментальных данных, касающихся наблюдений эффекта гистерезиса при деформации вязкоупругих материалов и различном поведении этих материалов при разном режиме динамического нагружения. В настоящее время существует уже ряд более сложных и глубоко проработанных моделей поведения вязкоупругих сред, основанных на использовании ДИ, для которых продемонстрировано более точное соответствие с экспериментом и физическим смыслом по сравнению с моделями, использующими только дифференциальные уравнения целого порядка [6, 8]. Аналогичные физические факторы, выражающиеся в возникновении в определяющих уравнениях не просто некоторых функций и/или их производных, а их интегральных свёрток (причём с дробно-степенным ядром), характерны и для пористых, гранулированных, трубчатых, волокнистых и других неоднородных сложно-структурированных сред и процессов переноса в них. В середине XX в. появились публикации, касающиеся вопросов релаксации в диэлектриках и поведения электрохимических сред [6, 8]. Были проведены эксперименты, показавшие наличие феномена памяти в процессах зарядки-разрядки конденсаторов и электрохимических ячеек. Для этих экспериментов были построены модели на основе дифференциальных уравнений дробного порядка и продемонстрировано лучшее соответствие результатов моделирования по сравнению с моделями на основе уравнений целого порядка. В дальнейшем ДИ было успешно применено для построения моделей разных процессов (сверхмедленной релаксации, переноса и волновых процессов в неупорядоченной среде) в физике полупроводников, физике плазмы, астрофизике и т.д.

Во второй половине XX в. исследователи обратили внимание на возможность использования ДИ в теории систем и сигналов. В связи с этим стали развиваться работы по “дробному” обобщению вариационного исчисления и теории дробных дифференциальных включений, а также по дробному обобщению классических интегральных преобразований (Фурье, Лапласа, Гильберта и др.). В 1974 г. вышла первая монография по дробному исчислению [2]. В том же году Б. Росс (B. Ross) организовал в Университете Нью-Хэвена I Международную конференцию по проблемам ДИ и его приложениям (Fractional Calculus and Its Applications) [3]. На рубеже XX и XXI в. получило развитие векторное обобщение ДИ [9, 10]. В связи с заметным ростом количества реальных систем, для которых более адекватно описание в терминах ДИ, весьма актуальной стала необходимость разработки эффективных методов и устройств управления данными системами. В последние годы активно развивается направление, посвящённое проектированию контроллеров дробного порядка. Такие устройства имеют больше настраиваемых параметров, чем обычные пропорционально-интегрально-дифференциальные контроллеры (ПИД-контроллеры), за счёт возможности изменения показателей интегрирующего и дифференцирующего звеньев и показали бóльшую эффективность и гибкость в задачах управления системами как целого, так и дробного порядков.

В настоящее время, под влиянием бурного научно-технического прогресса ДИ превратилось в мощное научное направление, включающее как фундаментальные, так и прикладные исследования. Это обусловлено необходимостью более точного описания физических систем и процессов, ставших объектами интереса современных исследователей. Отличительными чертами таких систем и процессов являются их нелокальный характер и/или феномен памяти. Например, это касается микро- и наноструктурированных сред, детерминированных и хаотических (в том числе “фрактально-хаотических”) процессов в природе и технике.

О значительной степени проработки вопросов ДИ свидетельствует богатая библиография публикаций по проблемам ДИ и его приложениям в разных областях науки и техники. Насчитывается много монографий и тематических сборников статей [1, 2, 4–32], посвящённых как вопросам развития ДИ, так и разным аспектам его применения. Поисковые запросы по ключевым словам “fractional calculus”, “fractional operators”, “fractional equations” в известных базах научных публикаций (Science Direct, E-Library, Scopus, IOP Publishing, SpringerLink и др.) выдают более 100 тысяч публикаций! Регулярно проводятся конференции по дробному анализу, в том числе конференция “Fractional Differentiation and Its Applications” (FDA) совместно с Международным конгрессом по автоматическому управлению (IFAC).

В мире существует несколько основных научных школ, развивающих идеи ДИ и связанных с именами Ф. Майнарди (F. Mainardi), И. Подлубного (I. Podlubny), Я.К. Чена (Y.Q. Chen), А.М. Нахушева, А.А. Килбаса, Р.Ш. Нигматуллина и др. Издаются четыре специализированных журнала по проблемам ДИ и его приложений: “Fractional Calculation and Applied Analysis” (издаётся с 1998 г. Институтом математики и информатики Болгарской Академии наук) [33], “Journal of Fractional Calculus” (издаётся с 1992 г. компанией Descartes Press Co.), “Fractional Differential Equations” (издаётся с 2010 г. издательским домом “Element d.o.o”) [34], “Communications in Fractional Calculus” (издаётся с 2010 г. компанией Asian Academic Publisher Ltd.) [35].

В настоящем обзоре основное внимание сосредоточено на работах, посвящённых поиску адекватной интерпретации операций дробного интегрирования и дифференцирования, и на работах, посвящённых использованию ДИ в задачах моделирования дробных динамических систем и управления такими системами. В первой части обзора рассматриваются математические основы ДИ, теории дифференциальных (вернее, интегро-дифференциальных или дифферинтегральных) уравнений и включений с дробными производными и дробного вариационного исчисления. Также рассматриваются разные подходы к интерпретации (геометрической, физической, вероятностно-статистической) дробных операций. Кратко обсуждаются реальные проявления дробной динамики, физический смысл и физические следствия использования дробных операторов для описания реальных систем.

2. Основные определения

Интеграл дробного порядка определяется на основе обобщения известной формулы Коши, позволяющей свести многократный интеграл целого порядка к однократному:

$$\int\limits_a^x d\xi_n \int\limits_a^{\xi_n} d\xi_{n-1} \dots \int\limits_a^{\xi_2} d\xi_1 f(\xi_1) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_a^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi) d\xi, \quad n \in \mathrm{N}. \tag{1}$$

В случае нецелого n, обозначаемого в дальнейшем α, в правой части (1) выражение $(n-1)!$ заменяется гамма-функцией $\Gamma(\alpha)$. Отличия разных формальных определений дробных интегралов связаны с различными способами задания пределов интегрирования и подынтегральной функции (вернее, интегрального ядра).

При определении производной дробного порядка существует, по-видимому, два основных подхода. Первый из них, как и в случае дробного интеграла, основан на обобщении формулы Коши (1). Такой подход использовался в работах Ж. Лиувилля, Б. Римана, Х. Хольмгрена, Г. Вейля, А. Маршо, Ж. Адамара, М. Рисса [1], Н.Я. Сонина [1, 36] и А.В. Летникова [1, 37]. Этот же подход лежит и в основе модификаций А. Эрдейи и Х. Кобера [38], Ж. Коссара [39], С.Г. Самко [40], С.П. Гейсберга [41] и др. Второй подход развит в работах А. Грюнвальда и А.В. Летникова [1, 6, 16, 37, 42, 43] и основан на обобщении определения производной как предела отношения бесконечно малых приращений функции и её аргумента. Идея данного подхода была высказана Ж. Лиувиллем [1]. Э. Пост предложил обобщение подхода Грюнвальда–Летникова к определению дробной производной через предел конечно-разностного отношения, названное Э. Постом обобщённым дифференцированием [44].

Наиболее распространённым и используемым в подавляющем большинстве приложений определением дробного интеграла является определение Римана–Лиувилля. В случае дробных производных аналогичное положение занимают определения Римана–Лиувилля, Капуто и Грюнвальда–Летникова. Ниже приведём строгие формулировки этих определений для левосторонних операторов.

Определение 2.1. Дробный интеграл Римана–Лиувилля произвольного нецелого порядка $\alpha > 0$ от функции $f(x) \in L^1(a,b)$, $a,b \in R^1$, определяется выражением

$$ {}_aI_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}}. $$

Определение 2.2. Дробная производная Римана–Лиувилля произвольного нецелого порядка $\alpha > 0$ от функции $f(x) \in L^1(a,b)$, $a,b \in R^1$, определяется выражением

$$ {}_{a+}^{RL}D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} \int\limits_a^x \frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{\{\alpha\}}}, $$

где $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ – соответственно целая и дробная части числа α.

Определение 2.3. Дробная производная Капуто произвольного нецелого порядка $\alpha > 0$ от функции $f(x) \in AC^{[\alpha]+1}(a,b)$, $a,b \in R^1$ определяется выражением

$$ {}_{a+}^{C}D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \int\limits_a^x \frac{d^{[\alpha]+1}f(\xi)}{d\xi^{[\alpha]+1}} \frac{d\xi}{(x-\xi)^{\{\alpha\}}}. $$

Определение 2.4. Дробная производная Грюнвальда–Летникова произвольного нецелого порядка $\alpha > 0$ с бесконечным пределом от функции $f(x) \in AC^{[\alpha]+1}(a,b)$, $a,b \in R^1$, определяется выражением

$$ {}_{+}^{GL}D_x^\alpha f(x) = \lim_{\xi\to 0} \frac{1}{\xi^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\Gamma(\alpha-k+1)} f(x-k\xi), $$

где ξ – бесконечно малое приращение независимой переменной.

Определение 2.5. Дробная производная Грюнвальда–Летникова произвольного нецелого порядка $\alpha > 0$ с конечным пределом от функции $f(x) \in AC^{[\alpha]+1}(a,b)$, $a,b \in R^1$, отличной от нуля только при $x > a$, определяется выражением

$$ {}_{a+}^{GL}D_x^\alpha f(x) = \lim_{K\to\infty} \left(\frac{K}{x-a}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{K} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\Gamma(\alpha-k+1)} f\left(x - k\frac{x-a}{K}\right). $$

Из определений 2.2 и 2.3 видно, что в случае определения дробной производной по Капуто на функцию налагаются более существенные ограничения, связанные с требованием существования входящего в определяющую формулу интеграла. Вообще, условиям, налагаемым на функцию, над которой выполняются операции дробного интегрирования и дифференцирования, посвящено много работ, в том числе [1, 5, 13, 16, 17].

Как уже упоминалось в разделе 1, одним из первых приложений ДИ стало решение задачи о таутохроне, в которой фигурируют операторы дробного порядка, задаваемые определениями 2.1 и 2.2 (в принципе, возникающее в данной задаче уравнение Абеля может быть записано и с использованием производной Капуто). Производная Римана–Лиувилля появляется и в выражении для импеданса бесконечной резистивно-ёмкостной линии [8]. Определение 2.3 было введено позднее, когда при описании вязкоупругих сред было показано, что в них механическое напряжение выражается свёрткой первой производной от деформации и степенной функции, отражающей свойства среды. Аналогичным образом данная производная возникла в дальнейшем и в моделях релаксации в разных средах. Определения 2.4 и 2.5 были введены исходя из математических соображений, чтобы придать дробной производной смысл предела отношения бесконечно малых величин аналогично классическому анализу. Для данного типа производных авторами определения была продемонстрирована идентичность с производными Римана–Лиувилля на широком классе функций [1].

Вычисление дробных производных в соответствии с различными определениями не всегда даёт одинаковый результат. Можно показать [1, 6], однако, что для функции $f(x)$, определённой на всей оси $x \in (-\infty, \infty)$ и имеющей $[\alpha]+1$ непрерывных производных, стремящихся к нулю при $x \to \pm\infty$, справедливо равенство:

$$ {}^{GL}_{-\infty}D^{\alpha}_{x} f(x) = {}^{GL}_{+}D^{\alpha}_{x} f(x) = {}^{C}_{-\infty}D^{\alpha}_{x} f(x) = {}^{RL}_{-\infty}D^{\alpha}_{x} f(x). $$

Аналогичное равенство справедливо в этом случае и для правосторонних производных.

Известны и другие подходы к определению операций интегрирования и дифференцирования нецелого порядка, а также ряд обобщений и модификаций определений 2.1–2.5, некоторые из них описаны далее.

М. Сайго в [45] предложена форма обобщённых операторов дробного дифференцирования, основанная на свёртке с гипергеометрической функцией. Некоторые композиционные свойства операторов Сайго исследованы в [46].

Ж. Адамаром был предложен подход к определению дробной производной от аналитической в круге функции на основе её разложения в ряд Тейлора [1, 47]:

$$ D^{\alpha}_{z} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} c_k (z-z_0)^{k-\alpha}, \quad c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}. $$

Данное определение, как и другие, основанные на разложении в ряды, базируется на лемме о почленном дифференцировании [1], справедливой, если соответствующие бесконечные ряды (функций и их производных) сходятся равномерно в круге $|x-a|<r$, r – некоторое вещественное неотрицательное число.

Подход Адамара [47] был развит в серии работ В.А. Чурикова [48–51]. В частности, данный подход применялся для определения не только производной, но и интегралов, как определённого, так и неопределённого [48]; были вычислены дробные производные и интегралы от элементарных функций [49], а также исследована алгебра операторов Адамара и топологические свойства пространств операторов Адамара [51].

Ж. Адамаром также предлагалось [1, 47] определение дробного интеграла в виде

$$I^{\alpha}f(z)=\frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{1}(1-\xi)^{\alpha-1}f(z\xi)d\xi,$$

получившее развитие в работах М.М. Джрбашяна [52, 53].

В [54] для функций комплексной переменной предложен подход к определению дробных операций на основе преобразования Фурье. В [55, 56] дробная производная в комплексной плоскости введена на основе формулы Коши для производной аналитической в круге функции.

В [57] введено обобщение определения Грюнвальда–Летникова, полезное, как отмечают авторы, в теории систем:

$${}^{GLm}_{\theta}D^{\alpha}_{x}f(z)=e^{-i\theta\alpha}\lim_{|h|\to 0}\frac{1}{|h|^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\Gamma(\alpha-k+1)}f(z-kh),$$

где $h=|h|e^{i\theta}$, $\theta\in(-\pi,\pi]$. Это определение пригодно в случае комплексной и действительной переменных. В случае $\theta=0$ оно сводится к обычному определению левосторонней производной Грюнвальда–Летникова. В случае $\theta=$ $=\pi$ получаемое из приведённого определения выражение пропорционально правосторонней производной Грюнвальда–Летникова с точностью до соответствующего фазового множителя $e^{-i\pi\theta}$.

В [58] вводится не только производная, но и интеграл Грюнвальда–Летникова вида

$${}^{GL}_{a+}I^{\alpha}_{x}f(x)={}^{GL}_{a+}D^{-\alpha}_{x}f(x)=\lim_{K\to\infty}\left(\frac{x-a}{K}\right)^{\alpha}\sum_{k=0}^{K}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{k!\Gamma(\alpha)}f\left(x-k\frac{x-a}{K}\right).$$

Можно показать [58], что в случае целого положительного показателя это определение может быть сведено к определению обычного интеграла (при соответствующих предположениях о свойствах функций и сходимости ряда).

В заключение отметим следующие результаты. В [9, 10, 20, 59–62] предложены подходы к определению дробных дифференциальных форм и дробных дифференциалов. Изучалась связь ДИ со специальными математическими функциями. Здесь, помимо монографий [1, 13, 16, 17], имеет смысл упомянуть работы [63–65] и недавно опубликованный обзор [66] по теории и приложениям функций Миттаг-Леффлера, играющих центральную роль в ДИ.

Обсуждалось в публикациях и вычисление дробных интегралов и производных от обобщённых функций, например дельта-функции Дирака и функции Хевисайда [1, 2, 4, 17, 57, 67].

3. Основные свойства дробных производных и интегралов

Свойства дробных интегралов и производных, заданных разными определениями, и взаимосвязь различных способов определения дробных операций достаточно полно исследованы и описаны в [1, 2, 4–6, 9, 10, 13, 16–18, 20, 28, 44–57]. В базовых монографиях [1, 6] приводятся функциональные свойства дробных операций для каждого из приведённых выше определений. Поэтому в данном разделе приведём только некоторые из них, необходимые для дальнейшего изложения. Поскольку, как правило, свойства, справедливые для левосторонних интегралов и производных, справедливы и для правосторонних, здесь и далее будут рассматриваться только первые из них.

3.1. Общие свойства дробных операторов

Дробное интегрирование и дифференцирование являются линейными операциями. Операция инверсии аргумента переводит левостороннюю производную соответствующего типа в правостороннюю. Для дробных интегралов Римана–Лиувилля и дробных производных Грюнвальда–Летникова справедливо полугрупповое свойство:

$$
\begin{gathered}
{}_aI_x^{\alpha}\,{}_aI_x^{\beta} = {}_aI_x^{\alpha+\beta},\\
{}_a^{GL}D_x^{\alpha}\;{}_a^{GL}D_x^{\beta} = {}_a^{GL}D_x^{\alpha+\beta}.
\end{gathered}
$$

Для других разновидностей дробных производных полугрупповое свойство в общем случае не выполняется, хотя существует ряд условий, когда оно оказывается справедливым [1, 9, 18].

Одним из главных отличий дробных производных от целочисленных является их нелокальность: зависимость результата дифференцирования не от значений функции в точках из малой окрестности данной точки, а от её значений во всех точках некоторого отрезка или всей числовой прямой. Особенно наглядно это видно в случае определения Грюнвальда–Летникова [6, 17]. Несложно убедиться, что при целых неотрицательных значениях α бесконечный ряд в формуле, определяющей дробную производную Грюнвальда–Летникова, обрывается и получающееся выражение совпадает с определением обычной производной соответствующего порядка. При целых отрицательных $\alpha = m < 0$ упомянутый бесконечный ряд не будет обрываться, а приобретёт вид суммы Дарбу [6, 17]. Нелокальность операторов дробного дифференцирования проявляется также в представлении их в виде дробных степеней оператора дифференцирования [68, 69], приводящего к выражению дробной производной через ряды Тейлора и Фурье, содержащие производные целого порядка.

Дробная производная Римана–Лиувилля, Капуто и Грюнвальда–Летникова с конечным нижним пределом порядка α от периодической $([\alpha]+1)$ раз дифференцируемой функции, не равной константе, не может быть периодической функцией с тем же периодом [70, 71]. Если один из пределов интегрирования (нижний для левосторонней производной и верхний для правосторонней) является бесконечным, то, как было показано в [72], результатом дифференцирования периодической функции может быть периодическая функция.

Любопытным свойством, отличающим производную Римана–Лиувилля от остальных, является то, что она не равна нулю для константы, хотя и зануляется в случае целого положительного значения порядка [1, 6]. При этом производная Римана–Лиувилля порядка α от степенной функции вида $(x-a)^{\mu-1}$ равна нулю при $\alpha = \mu$ [1, 6]. Эти факты, наряду с другими, являются поводом для многих исследователей говорить о неясном смысле определения Римана–Лиувилля и преимуществах использования других определений (главным образом, определения Капуто), дающих в случае константы тождественный нуль. Мотивация в данном случае основывается и на том, что производная должна характеризовать скорость роста функции, которая для константы по смыслу равна нулю. Здесь следует упомянуть модификацию определения Римана–Лиувилля, предложенную в [73], которая для левосторонней производной может быть записана в виде

$$ {}^{RLm}_{a+}D^{\alpha}_{x} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} \int\limits_a^x \frac{(f(\xi)-f(0))d\xi}{(x-\xi)^{\{\alpha\}}}, \quad \alpha > 0. $$

Такое определение приводит к производной, обнуляющейся для функции, равной константе, и оказывается полезным при работе с недифференцируемыми в классическом смысле функциями. В [73] развивается аппарат дробных рядов Тейлора. В [74] приведены основные свойства модифицированной производной Римана–Лиувилля и выражения для производных от элементарных функций.

Одним из основополагающих теоретических вопросов ДИ является вопрос о взаимном соответствии (в смысле обратимости) операторов дробного интегрирования и дифференцирования. Здесь существует две основные точки зрения.

Одна из них, наиболее распространённая, заключается в постулировании того, что взаимно обратными операциями являются дробное интегрирование и дифференцирование (одного и того же порядка) по Риману–Лиувиллю [1, 2, 4, 6, 13, 16]. При этом результат интегрирования производной выражается не разностью значений функции на концах отрезка (аналогом формулы Ньютона–Лейбница), а более сложной формулой, содержащей дробностепенную функцию независимой переменной, в которую в качестве коэффициентов входят значения дробных производных в начальной точке отрезка:

$$
{}_aI_x^\alpha\, {}^{RL}_{\ a}D_x^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{[\alpha]+1} \frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \left(\frac{d^{[\alpha]+1-j}}{dx^{[\alpha]+1-j}}\, {}_aI_x^{1-\{\alpha\}} f(x) \right) \Bigg|_{x=a}. \tag{2}
$$

Иногда формулу (2) называют дробным обобщением формулы Ньютона–Лейбница [13].

Другая точка зрения основана на представлении о том, что дробное интегрирование и дифференцирование как взаимно-обратные операции должны быть связаны формулой типа Ньютона–Лейбница:

$$
{}_aI_x^\alpha\, {}_aD_x^\alpha f(x) = f(x) - f(a). \tag{3}
$$

Показано [10], что равенство (3) справедливо при ${}_aD_x^\alpha = {}^C_aD_x^\alpha$, т.е. взаимно обратными операциями являются дробное интегрирование по Риману–Лиувиллю и дробное дифференцирование по Капуто. Похожие доводы и рассуждения, не оформленные в виде теорем, излагаются в [18].

Обнуление производной от константы и выполнение формулы Ньютона–Лейбница являются весомыми поводами для многих исследователей отдавать предпочтение определению дробной производной по Капуто. С другой стороны, производная Капуто не вполне корректно сводится к производной целого порядка [75, 76]:

$$
\lim_{\alpha\to[\alpha]} {}^C_aD_x^\alpha f(x) = f^{([\alpha])}(x) - f^{([\alpha])}(a),
$$

$$
\lim_{\alpha\to[\alpha]+1} {}^C_aD_x^\alpha f(x) = f^{([\alpha]+1)}(x).
$$

Для производной Римана–Лиувилля, напротив, в данном случае наблюдается корректное соответствие.

В общем случае дробные производные Римана–Лиувилля и Капуто связаны формулой

$$
{}^C_aD_x^\alpha f(x) = {}^{RL}_{\ a}D_x^\alpha f(x) - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)} \left(\frac{d^j f(x)}{dx^j} \right) \Bigg|_{x=a}. \tag{4}
$$

Из (4) видно, что значения производных Римана–Лиувилля и Капуто совпадают при нулевых (однородных) начальных условиях.

Приведём формулы преобразования Лапласа для производных Римана–Лиувилля и Капуто:

$$
L\left[{}^{RL}_{\ 0}D_x^\alpha f(x)\right] = p^\alpha \bar{f}(p) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} p^k f^{(\alpha-k-1)}(0+), \tag{5}
$$

$$
L\left[{}^{C}_{0}D_x^\alpha f(x)\right] = p^\alpha \bar{f}(p) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} p^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0+), \tag{6}
$$

где

$$f^{(\alpha-k-1)}(0+) = \left[{}^{RL}_{0}D_x^{\alpha-k-1} f(x)\right]\Big|_{x=0} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} {}^{RL}_{0}D_x^{\alpha-k-1} f(0+\varepsilon), \quad \alpha \in R.$$

В отличие от данных типов дробной производной образ Лапласа в случае производной Грюнвальда–Летникова содержит только первое слагаемое, что полностью аналогично случаю производных целого порядка и имеет более явную физическую интерпретацию.

4. Обобщения определений дробного интегрирования и дифференцирования

В целом, вопрос о возможности выбора единственного определения для дробных операторов пока однозначно не решён. Эта проблема усугубляется ещё и отсутствием единой концепции, объясняющей геометрический и физический смысл дробных операций. При этом в разных областях науки рассматриваемые физические (или иные) модели приводят к дробным производным различного типа. Одним из путей преодоления описанных проблем является построение обобщённых определений, включающих в себя разные известные определения как частные случаи.

В [31] предложено обобщение производных Римана–Лиувилля и Капуто в виде двухпараметрической дробной производной Хильфера (R. Hilfer). Для левосторонней производной справедливо определение:

$$(7) \qquad {}_aD_x^{\alpha,\beta} f(x) = {}_aI_x^{(1-\beta)(n-\alpha)} D^n {}_aI_x^{\beta(n-\alpha)} f(x).$$

Аналогичным образом определяется и правосторонняя производная. При $\beta =$ $= 0$ (7) сводится к определению производной Капуто, а при $\beta = 1$ – к определению дробной производной Римана–Лиувилля. Поэтому иногда говорят, что двухпараметрическая производная Хильфера является интерполяцией между производными Капуто и Римана–Лиувилля с параметром интерполяции β. В [77] показано, что теорема о неотрицательности дробной производной некоторой функции в точке максимума данной функции (аналогичная соответствующей теореме для производной первого порядка) справедлива для обобщённой производной Хильфера порядка $\alpha \in (0,1)$ только при $\beta = 0$, т.е. только для производной Капуто.

Другая модификация определений производных Римана–Лиувилля, Капуто и Адамара дана в [78] на основе введённого автором определения дробного интеграла, объединяющего определения Римана–Лиувилля и Адамара.

Известен ряд обобщений определений дробных операторов на случай нестационарного порядка. В [79–81] рассматриваются операторы, у которых порядок дифференцирования является детерминированной функцией времени, а в [82] исследовался случай, когда порядок дифференцирования является случайной величиной. При этом в [79] предложен алгоритм численного расчёта и схемотехническая реализация введённого оператора.

Следует упомянуть и работы по дискретному дробному исчислению, введённому в середине XX в. [83–85] и ставшему особенно актуальным в последнее время в связи с разработкой численных методов решения уравнений с дробными операторами. В [86–93] дано обобщение и развитие полученных ранее результатов, выведены формулы для дискретного преобразования Лапласа и построен метод решения разностных дробных уравнений на его основе. В [94] предложена процедура дискретизации значений дробной производной Римана–Лиувилля на основе разложения в ряды по полиномам Чебышёва.

5. Дифференциальные уравнения и включения дробного порядка

Дифференциальным уравнением/включением дробного порядка или дробным дифференциальным уравнением/включением (ДДУ/ДДВ) будем называть дифференциальное уравнение/включение, содержащее хотя бы один оператор дифференцирования дробного порядка. Будем подразумевать при этом, что фигурирующие в ДДУ или ДДВ функции обладают всеми свойствами, обеспечивающими существование дробной производной от них и свойствами, необходимыми для существования решений соответствующих ДДУ или ДДВ. В дальнейшем будем, в основном, обсуждать ДДУ, разрешённые относительно производных, для которых ниже приведены определения.

Определение 5.1. Обыкновенным ДДУ (ОДДУ) называется ДДУ, содержащее только полные дробные производные, т.е. ДДУ вида

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \times {}_aD_x^{\alpha_i} y(x) = f(x, y(x)), \tag{8}$$

где a_i – коэффициенты, ${}_aD_x^{\alpha_i}$ – операторы дифференцирования порядков α_i, $i = \overline{1, N}$, $y(x)$ – искомая функция и $f(x, y(x))$ – некоторая ограниченная функция.

Определение 5.2. Дробным дифференциальным уравнением в частных производных (ДДУЧП) называется уравнение, содержащее частные производные дробного порядка, т.е. ДДУ вида

$$\sum_{i=1}^{N} \prod_{k=1}^{M} a_{ik} \cdot {}_aD_{x_k}^{\alpha_i^k} y(x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k, y(x_1), \ldots, y(x_k)), \tag{9}$$

где a_{ik} – коэффициенты, ${}_aD_{x_k}^{\alpha_i^k}$ – оператор дробного дифференцирования порядка α_i^k по независимой переменной x_k, $i = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, M}$, $y(x_1, \ldots, x_k)$ – искомая функция и $f(x_1, \ldots, x_k, y(x_1), \ldots, y(x_k))$ – некоторая ограниченная функция.

В литературе (например, в [17]) рассматриваются также ДДУ с составным оператором дифференцирования (или секвенциальные ДДУ) – ДДУ вида (8) или (9), в которых вместо одного оператора дифференцирования в левой части стоит произведение операторов.

Публикации, посвящённые изучению ДДУ и ДДВ, можно условно разделить на две группы: работы, посвящённые изучению математических проблем (существование и единственность решений, зависимость решений от начальных и граничных условий, форма и смысл начальных и граничных условий, вид и метод построения общего решения для основных типов уравнений и др.) и работы, связанные с качественным исследованием (анализ устойчивости решений, наличия особых точек и т.д.) и с решением конкретных типов и разновидностей уравнений (или включений). Число публикаций по последней группе работ растёт очень быстрыми темпами, поэтому в данном обзоре (во второй части) будут обсуждаться лишь некоторые, более общие (концептуальные), работы такого рода.

Значительный объём материала по математическим вопросам ДДУ собран в монографиях [1, 4, 6, 12, 13, 16–19, 23, 28]. В частности, в них приводятся теоремы существования и единственности решения начальных и краевых задач для, главным образом, линейных ДДУ, содержащих дробные производные (в смысле Римана–Лиувилля, Капуто, Грюнвальда–Летникова), и обсуждаются основные методы решения ДДУ, такие как сведение к интегральному уравнению, метод интегральных преобразований (Лапласа, Меллина, Фурье), метод функций Грина и т.д. В справочнике [95] для решения ОДДУ, помимо преобразования Лапласа, применяется сведение ОДДУ к ОДУ целого порядка. Интересным приложением ДДУ является построение точных решений дифференциальных уравнений целого порядка [1, 16].

Среди большого числа публикаций, посвящённых квазилинейным и нелинейным ДДУ, упомянем работы [77, 96–117]. В них доказаны теоремы, касающиеся существования решений уравнений с дробными производными Капуто [77, 96–108] и Римана–Лиувилля [99, 102, 109–117], в том числе в случаях, когда неоднородность (правая часть) уравнений не является непрерывной функцией [102]. В [77, 100, 102, 105–108, 112–116] исследуются вопросы единственности решений ДДУ и доказаны соответствующие теоремы. Основные результаты в этой области обобщены в обзорах [108, 111] для уравнений с производными Капуто и Римана–Лиувилля соответственно.

В [118–141] описаны новые (по сравнению с упомянутыми выше) методы решения ДДУ. Предложен метод операционной матрицы, сводящий по аналогии с ОДУ решение ОДДУ к решению системы алгебраических уравнений на основании разложения решения и неоднородности, входящей в уравнение, по полиномам Лежандра [118, 119], вейвлетам [120–122] или B-сплайнам [123]. Для ДДУ с переменными коэффициентами в [124, 125] развит операторный подход, в рамках которого решение ДДУ строится на основе преобразования Лапласа. В [126–128] предложен метод решения ДДУ на основе анализа гомотопий, а в [129–131] решение ДДУ строится на основе вариационно-итерационного метода. Последние два метода могут быть использованы для решения как ОДДУ, так и ДДУЧП. Метод декомпозиции Адомиана [132, 133] также успешно используется для решения ДДУ [134–137]. Решение линейных ДДУ может быть построено на основе разложений входящих в уравнение функций в ряд Тейлора [138] или в степенной ряд, полученный из представления входящих в уравнение функций через функции Миттаг–Леффлера [139]. В [140] решение ДДУ строится на основе итерационной процедуры с использованием монотонных последовательностей. Процедура, позволяющая получать асимптотические формулы для решения ОДДУ при больших временах, построена в [141].

В [18, 111, 142–146] изучены свойства функциональных ДДУ для уравнений, содержащих дробные производные Римана–Лиувилля [142], Капуто [143–145] и Нишимото (Nishimoto) [146]. Общая теория таких уравнений строится как обобщение теории уравнений с отклоняющимся аргументом, известной для случая производных целого порядка.

Изложенные выше результаты позволяют утверждать, что в настоящее время теория ДДУ, хотя и не является законченной, но представляет собой весьма обширную и проработанную область исследований. Гораздо меньше работ опубликовано по ДДВ. В данной области пока отсутствуют монографические работы, но в последние 3–5 лет наблюдается заметный рост числа публикаций, посвящённых этой теме [108, 110, 111, 147–159]. В [110, 111, 147–152] сформулированы и доказаны теоремы существования решений квазилинейных и нелинейных ДДВ, содержащих производные Римана–Лиувилля. Аналогичные результаты для ДДВ, содержащих производные Капуто, изложены в [108, 110, 153–157]. Также в этих работах рассматриваются вопросы единственности решений ДДВ и исследуются случаи различных типов граничных условий для ДДВ в частных производных. В [151, 158, 159] изучается существование решений и общие свойства функциональных ДДВ.

6. Проблема корректной постановки начальных и граничных условий для ДДУ

Отсутствие единственного определения дробной производной связано и отчасти обусловливает другую проблему – проблему корректной постановки начальных и/или граничных условий для ДДУ, содержащих тот или иной тип производных. Здесь же возникает проблема зависимости решения ДДУ от типа фигурирующих в нём дробных производных и соответственно типа начальных и граничных условий. Актуальной при этом становится и проблема интерпретации начальных и/или граничных условий для ДДУ.

При изучении ОДДУ чаще всего обсуждается уравнение вида

$$ {}_aD_x^{\alpha} y(x) = f(x, y(x)) \tag{10}$$

или уравнение более общего вида (8). Для такого уравнения по аналогии с ОДУ можно поставить задачу Коши. Можно показать [1, 6, 9, 16, 17, 18, 160], что выбор единственного решения уравнения (8) или (10) в случае, когда производная понимается в смысле Капуто, осуществляется на основе знания значений производных целого порядка искомой функции в начальный момент времени, а в случае, когда производная понимается в смысле Римана–Лиувилля, – на основе задания значений дробной производной в начальный момент времени. Это обусловлено, в частности, свойствами преобразования Лапласа от дробных производных (см. (5) и (6)). Начальные условия в этих двух случаях называют локальными или обыкновенными и нелокальными или дробными начальными условиями соответственно. Аналогичные проблемы возникают и для ОДДУ с переменными коэффициентами, и в случае краевых задач для ДДУЧП.

Необходимость задания значений дробных производных в начальной точке отрезка вызывает дополнительные трудности, в том числе с точки зрения физического смысла и интерпретации начальных и/или граничных условий такого вида. В [161] на ряде примеров из области вязкоупругости проиллюстрирован физический смысл дробных начальных условий. Тем не менее проблема корректной постановки и интерпретации начальных и краевых задач для ДДУ остаётся, в целом, открытой. Некоторые авторы считают, что сама возможность постановки начальных условий для ДДУ также представляет собой открытый вопрос, так как такие начальные условия должны иметь нелокальный характер и отражать предысторию системы [160, 162–164]. Известен контрпример, демонстрирующий, что начальные задачи с производными Римана–Лиувилля и Капуто могут давать решение, не соответствующее реальному поведению и физической модели систем, проявляющих дробную динамику и моделируемых с помощью ДДУ [163]. Для физически корректной постановки начальных условий авторами [163] используется специальное представление системы, заданной не уравнениями типа (8) или (10), а с помощью дробно-степенной передаточной функции, выбираемой из физических соображений. Отмечается, что используемый авторами подход фактически означает представление дробной системы в виде бесконечномерной системы дифференциальных уравнений целого порядка. Аналогичная интерпретация была описана в [165]. Она же используется в [164], в которой начальная задача для линейного ОДДУ решается на основе сведения его к бесконечномерному ОДУ, для которого осуществляется постановка начальных условий и решение задачи.

Одним из самых простых способов преодоления проблемы нелокальных начальных и/или граничных условий является сведение задачи к задаче с нулевыми начальными и/или граничными условиями. Такая процедура может быть реализована, например, с помощью некоторой замены переменных или преобразования правой части уравнения. В [115, 166, 167] построен ряд процедур, позволяющих сводить задачу Коши для ОДДУ с производными Римана–Лиувилля и нелокальными начальными условиями к видоизменённой задаче Коши для преобразованного ОДДУ с локальными начальными условиями, содержащими производные только целого порядка.

В [29, с. 27–42; 160, 162] для решения проблемы постановки начальных условий для ДДУ предлагается формализм инициализирующих функций. Легко убедиться, что значение нижнего предела интегрирования a (для левосторонних операторов) будет оказывать влияние на результат вычисления, т.е. текущее состояние будет зависеть от предыстории. При постановке начальной задачи необходимо задать начальные условия – определить значения интересующих функций в некоторый момент c, причём, вообще говоря, $c \neq a$, т.е. в данном случае постановка начальных условий должна учитывать предысторию системы, её память о состояниях, предшествовавших моменту времени, принятому за начальный. Интеграл, входящий в определения дробных операторов, можно записать в виде двух слагаемых:

$$
\begin{aligned}
{}_aI_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^c \frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_c^x \frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^c \frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}} + {}_cI_x^\alpha f(x), \quad x \geqslant c > a.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

При этом первое слагаемое в (11) представляет собой инициализирующую функцию для интеграла Римана–Лиувилля, учитывающую предысторию системы. Следует отметить, что инициализирующая функция зависит от аргумента x только при нецелых значениях α и обращается при целых значениях α в константу. Аналогичным образом формулируются определения инициализирующей функции для дробных производных различных типов [29, с. 27–42; 160, 162].

В [166, 167] предложено приближённое представление дробных систем, описываемых с помощью систем ОДДУ, системами целого порядка, описываемыми в терминах систем ОДУ. Последние допускают однозначную постановку начальных условий в явном виде. Оценена точность приближения [166] и проведено сравнение двух методов построения приближений [167].

7. Дробные обобщения вариационных задач

В связи с развитием приложений ДИ в области теории динамических систем и теории управления сформировалось и развивается такое направление исследований, как дробное вариационное исчисление. Приведём обзор основных публикаций, позволяющий составить представление об имеющихся наработках в этой области.

Опубликовано большое число работ, касающихся дробных обобщений лагранжева и гамильтонова формализма в задачах теоретической физики (см. [9, 20, 31, 170–173] и библиографию в них). В частности, получены дробные аналоги уравнений Эйлера–Лагранжа и Гамильтона с помощью подстановки в обычные уравнения Эйлера–Лагранжа и Гамильтона функций Лагранжа и Гамильтона, в которых обобщённая скорость выражается дробной производной Римана–Лиувилля или Капуто от обобщённой координаты, либо с помощью дробной вариации функций Лагранжа и Гамильтона, содержащих производные только целого порядка. Показано, что основным отличием дробных лагранжевых и гамильтоновых систем будет их диссипативность. В частности, доказано, что решения диссипативных уравнений являются экстремалями некоторых дробных лагранжевых действий [173].

Изучение дробных вариационных задач и дробных уравнений Эйлера–Лагранжа проводится в [174–176] для функционалов, содержащих производные Римана–Лиувилля и в [177–181] для функционалов, содержащих производные Капуто и Рисса–Капуто. Выведены условия оптимальности для различных функционалов с производными упомянутых типов.

Получены обобщения теоремы Нётер для дробных вариационных задач с производными Римана–Лиувилля [182, 183], Капуто и Рисса–Капуто [184, 185] и выведены соответствующие законы сохранения. Показано, что автономность гамильтониана, содержащего дробные производные, не гарантирует выполнения для системы законов сохранения в отличие от случая систем целого порядка. В связи с этим отмечается [182, 184], что пока возможно дать дробные обобщения понятия экстремалей Понтрягина, но не удаётся сформулировать дробное обобщение принципа максимума Понтрягина.

В [186] представлено дробное обобщение теоремы вириала с использованием производных Римана–Лиувилля и Капуто.

В [187] рассмотрены уравнения Эйлера–Лагранжа и условия трансверсальности для дробных вариационных задач с производными Римана–Лиувилля и Капуто. Исследована связь условий трансверсальности и естественных граничных условий. Показано, что дробные граничные условия (т.е. граничные условия, записанные в терминах дробных производных) могут быть необходимы даже в случае, когда задача поставлена в терминах производной Капуто. Более того, обе производные (Римана–Лиувилля и Капуто) появляются в формулировках даже тогда, когда дробная вариационная задача определена в терминах только одной дробной производной. Обобщение этих результатов и теоремы Нётер для функционалов с производными Капуто привело к построению дробного вариационного исчисления на основе обобщённых производных Хильфера (R. Hilfer) [31, 188]. С использованием трёхпараметрических обобщённых производных Хильфера в [189] получена формула дробного интегрирования по частям, сформулированы и исследованы вариационные задачи для функционалов, содержащих одну или несколько дробных производных, а также определён обобщённый импульс и развит гамильтонов формализм.

В [190] введено дробное вариационное исчисление с дискретным временем, построенное с использованием результатов, упоминавшихся в разделе 4 [83–94] по дискретному ДИ. Установлены необходимые условия оптимальности первого и второго рода. Даны примеры, иллюстрирующие использование новых условий типа Эйлера–Лагранжа и Лежандра. Показано, что обсуждаемые решения дробных задач переходят в классические решения с дискретным временем, когда порядок дискретных производных является целым числом, и что они сходятся к дробным решениям непрерывного типа, когда шаг по времени стремится к нулю. В [191] дискретные уравнения Эйлера–Лагранжа получены с использованием производных Грюнвальда–Летникова. Построена численная схема их решения, для которой проведён анализ точности аппроксимации.

8. Проблема интерпретации дробных интегралов и производных

Одной из характерных черт дробных операций интегрирования и дифференцирования, осложнявших долгое время их широкое применение в прикладных задачах, является отсутствие явной однозначной интерпретации данных операций. Проблема явной физической и геометрической интерпретации дробных операций была включена в список открытых (нерешённых) проблем в области ДИ, опубликованный в материалах упоминавшейся в первом разделе I Международной конференции по дробному исчислению и его применениям. В настоящее время существует несколько подходов к данной проблеме. Условно можно разделить эти подходы на три группы: геометрическую, физическую и вероятностную.

Авторы геометрических и физических подходов пытаются, как правило, построить аналогию со случаем операций целого порядка, для которых геометрический и физический смысл весьма прозрачен. При этом в области геометрических подходов к интерпретации условно можно выделить две подгруппы: классической, "регулярной", геометрии и фрактальной геометрии. В первом случае исследователи пытаются найти аналогичное случаю целых порядков геометрическое истолкование дробного интегрирования и дифференцирования, основанное на понимании данных операций в терминах площадей некоторых плоских фигур, являющихся двумерными проекциями более сложных многообразий на определённые плоскости. Вторая группа подходов основана на идее о существовании связи между дробными операторами и фракталами. При этом исследователи пытаются толковать смысл дробных операций в терминах операций, заданных на фрактальных (самоподобных) многообразиях (как пространственных, так и временны́х). Следует сразу же отметить, что подобные попытки часто встречают весьма серьёзную критику и, вообще говоря, далеко не всегда являются достаточно строго обоснованными. Поэтому часто высказывается точка зрения, что "фрактальная" трактовка дробных операций может рассматриваться лишь в качестве некоторого приближения или удобной иллюстрации.

Среди физических подходов также существуют несколько подгрупп: подходы на основе теории линейных систем, авторы которых пытаются отождествить дробные операции с линейными системами, имеющими дробностепенные передаточные функции; подходы на основе теории измерений, в которых операции дробного интегрирования и дифференцирования рассматриваются как результаты измерения заданной величины с помощью "прибора", влияющего на результат измерения; подходы на основе представления о наличии фрактальных свойств в пространственной структуре изучаемой системы и/или её временно́й динамике.

Вероятностные подходы исходят из анализа статистических распределений, проявляющих "неклассическое" поведение, связанное, главным образом, с негауссовостью.

8.1. Геометрическая интерпретация дробных операций

Одна из наиболее известных попыток наглядной геометрической интерпретации дробных операций предпринята И. Подлубным (I. Podlubny) в [192] (она описывается и в [6, 11, 70, 193]). Эта интерпретация основана на представлении левостороннего дробного интеграла Римана–Лиувилля в виде ин-

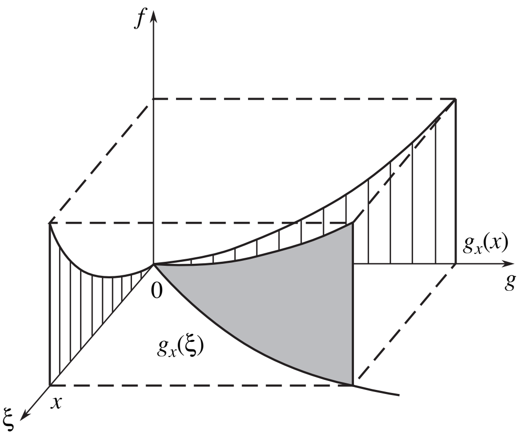

Иллюстрация геометрической интерпретации дробного интеграла Римана–Лиувилля [6].

теграла от заданной функции по другой функции:

$$
{}_0I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}} = \int\limits_0^x f(\xi)dg_x(\xi), \tag{12}
$$

где

$$
g_x(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(x^\alpha - (x-\xi)^\alpha). \tag{13}
$$

Аналогичные рассуждения (с аналогичными выводами) можно провести и в случае правостороннего интегрирования по Риману–Лиувиллю [192]. Если рассматривать интеграл (12) при фиксированном x, то он будет представлять собой известный интеграл Стилтьеса.

Рассмотрим теперь трёхмерное пространство с системой координат (ξ, g, f). В плоскости (ξ, g) построим график функции $g_x(\xi)$, $0 \leqslant \xi \leqslant x$ (см. рисунок). В каждой точке полученной кривой задано значение функции $f(\xi)$, которое можно отложить по третьей координатной оси. Таким образом, получается трёхмерный график $f(\xi, g)$ и поверхность П (показана серым цветом на рисунке), ограниченная этой кривой и кривой $g_x(\xi)$ в трёхмерном пространстве. В [192] описанная процедура сравнивается с построением "забора", высота каждого элемента ("доски") которого определяется значением $f(\xi)$ (рисунок). Рассмотрим теперь проекции полученной поверхности П на плоскости (ξ, f) и (g, f) (см. рисунок), которые образно можно назвать тенями, отбрасываемыми построенным "забором" на соответствующие плоскости. Первая из них представляет собой обычный интеграл от функции $f(\xi)$. Вторая же представляет собой значение интеграла (12) при фиксированном x. При $g_x(\xi) = \xi$ обе проекции равны. Это с геометрической точки зрения подтверждает тот факт, что обычное интегрирование целого порядка является частным случаем левостороннего интегрирования по Риману–Лиувиллю. При нефиксированном x форма кривой $f(\xi, g)$, соответствующей поверхности П и проекций данной поверхности на упомянутые плоскости будут динамически изменяться.

Интерпретация дробных операторов Грюнвальда–Летникова с позиций классической геометрии дана в [11, Ch. 5.8]. В этой работе определение производной Грюнвальда–Летникова с конечным пределом (см. определение 2.5) записывается в виде

$$
\begin{aligned}
{}_{a+}^{GL}D_x^{\alpha} f(x) &= \lim_{K\to\infty}\left(\frac{K}{x-a}\right)^{\alpha}\sum_{k=0}^{K}(-1)^k\frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\Gamma(\alpha-k+1)}f\left(x-k\frac{x-a}{K}\right)= \\
&= \lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{(x-a)/h} A_k\frac{f(x-kh)}{h^{\alpha}},
\end{aligned}
\tag{14}
$$

где $A_k=(-1)^k\frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\Gamma(\alpha-k+1)}$, $h=(x-a)/K$. Далее в [11] автор пытается провести аналогию со случаем обычного интегрирования, считая, что каждый член суммы в формуле (14) при $\alpha\in(-1,0)$ представляет собой площадь под бесконечно малым участком графика функции вида $Af(x)$, или “перенормированную” площадь S_f под бесконечно малым участком графика функции $f(x)$:

$$A_k\frac{f(x-kh)}{h^{\alpha}}=A_kh^{-\alpha-1}[f(x-kh)h]=A_kh^{-\alpha-1}S_f.$$

Однако, это не позволяет перейти к “макроскопической” интерпретации дробного интегрирования, так как “нормировочный коэффициент” в данном случае будет зависеть от индекса суммирования и бесконечно малого приращения аргумента. Также следует ещё раз подчеркнуть, что сходимость ряда, входящего в определение Грюнвальда–Летникова, при $\alpha<0$ не гарантирована [1].

В случае $\alpha>0$ для дробного дифференцирования в [11] предложена аналогичная интерпретация в терминах бесконечно малых величин. В рассмотрение вводится элементарная скорость $\delta f_k=(f(x)-f(x-h))/h$, характеризующая быстроту изменения функции между двумя соседними точками, отстоящими на бесконечно малую величину h. Далее говорится, что возникающая в ряде Грюнвальда–Летникова комбинация $(f(x)-\alpha f(x-h))/h^{\alpha}$ представляет собой эффективную или “взвешенную”, или “дробную”, элементарную скорость. Аналогично случаю интегрирования такая трактовка не позволяет перейти к явной “макроскопической” интерпретации.

Похожая на изложенную в [11] идея “перенормировки” лежит в основе интерпретации дробной производной от степенной функции, представленной в [194]. Авторы в [194] рассматривают прямоугольный треугольник площади S, образованный касательной к графику функции (наклон которой определяется первой производной от функции), осью абсцисс и перпендикуляром, опущенным из точки касания на ось абсцисс. Далее рассматривается значение дробной производной в точке касания и предлагается [194] интерпретировать его как тангенс угла наклона другой прямой, проходящей через эту точку (и уже не являющейся касательной к графику). Эта прямая вместе с перпендикуляром на ось абсцисс и осью абсцисс также будет ограничивать на плоскости прямоугольный треугольник меньшей площади S', определяемой показателем производной. В [194] показано, что произведение площади S' на значение дробной производной в данной точке будет константой, не зависящей от порядка дифференцирования, что вполне очевидно из алгоритма построения этого треугольника.

В [195] геометрическая интерпретация дробной производной даётся в терминах касания соответствующего порядка (совпадающего с порядком производной). Но такая интерпретация не вполне наглядна и не получила на сегодня широкого признания.

Среди работ, в которых геометрическая интерпретация дробных операций даётся на основании связи с фракталами, упомянем [6, 7–9, 20, 196–204]. Критика такого подхода содержится в [6, 9, 20, 165, 192, 205–208].

Одной из первых работ, в которых обсуждается связь дробных операторов с фракталами, является работа Р.Р. Нигматуллина [196], в которой предложена геометрическая интерпретация дробного интеграла Римана–Лиувилля как свёртки подынтегральной функции с функцией, определённой на канторовом множестве – фрактальном объекте, имеющем промежуточную пространственную размерность между точкой и прямой. Иными словами, дробное интегрирование понимается в данном случае как интегрирование заданной функции по канторову множеству. Свёртка с дельта-функцией и свёртка с функцией Хевисайда являются своеобразными предельными случаями: первый из них даёт интеграл "нулевого" порядка, значение подынтегральной функции в той точке, где отлична от нуля дельта-функция, а второй даёт определённый интеграл первого порядка от подынтегральной функции на заданном отрезке. При этом показатель дробного интеграла в точности совпадает с фрактальной размерностью канторового множества [196]. Эти рассуждения были подвергнуты критике в [165, 205, 206], заставившей Р.Р. Нигматуллина пересмотреть свои вычисления. В результате была построена модифицированная теория [8, раздел IV; 197–199], в которой, в частности, появилось уточнённое истолкование дробного интеграла как интеграла по "усреднённому" множеству Кантора или свёртки заданной функции с функцией, не просто определённой, а усреднённой на канторовом множестве. Также были учтены возможные корреляции между полосками Кантора, приводящие к появлению мнимой части у показателя дробного интегрирования. Эта модифицированная теория также была раскритикована в [207, 208], где показано, что предложенная процедура усреднения гладкой функции по множеству Кантора даёт только асимптотически (с точностью до константы) ядро в интеграле типа (12), равное произведению степенной функции на логопериодическую. Поэтому такая процедура может рассматриваться только как некоторое приближение, возможно весьма грубое, дробного интеграла Римана–Лиувилля.

Связь дробных операторов с канторовым множеством и иллюстрация возможности их геометрической и физической интерпретации как операций, определённых на этом множестве, обсуждается в [200–204]. В работах [209, 210] дробные интегралы Римана–Лиувилля рассматриваются как интегралы от функций с фрактальным носителем, определённые на множестве Кантора [209] или на кривой Коха [210].

В [211] содержатся результаты исследования связи дробного интегродифференцирования (понимаемого в смысле Римана–Лиувилля или Грюнвальда–Летникова) с кривыми Коха. Утверждается, что простой взаимно однозначной связи между фракталами и дробными операторами не существует: фракталы могут генерироваться и полностью описываться без использования дробных операций, а определённый дробный оператор не обязательно порождает определённый (однозначно с ним связанный) фрактальный процесс или фрактальное многообразие. Но, как показано в [211], использование дробных операций позволяет генерировать на основе заданного фрактального процесса (многообразия) другой фрактальный процесс (многообразие), фрактальная размерность которого связана с показателем дробного интегродифференцирования линейным соотношением. Так, в случае дробного интегрирования фрактальная размерность порождаемого многообразия (процесса) будет больше исходной на величину, равную показателю интегрирования. В случае дробного дифференцирования фрактальная размерность будет уменьшаться на величину, равную показателю дифференцирования. Обнаруженные закономерности, по мнению автора [211], позволяют говорить о возможности генерации фракталов с заданными свойствами или “прецизионного управления” (“precise control”) размерностью генерируемых фракталов. Аналогичные результаты о линейной связи показателя дробного оператора и фрактальной размерности получаемого многообразия получены в [212], в которой обсуждается фрактальная размерность графика функции Вейерштрасса и её дробных производной и интеграла (понимаемых в смысле Римана–Лиувилля).

В [9, 20] дробные интегралы Римана–Лиувилля понимаются как интегралы по пространству дробной размерности. При этом показатель интегрирования связан с размерностью пространства однозначным соотношением.

8.2. Физическая интерпретация дробных операций

Если геометрическая интерпретация допускает рассмотрение фракталов и операций с ними, то при физической интерпретации такой подход не вполне оправдан, поскольку для реальных физических сред свойство самоподобия может выполняться только в определённом диапазоне масштабов. Поэтому при физической интерпретации дробных операций в рамках “фрактального” подхода чаще пытаются связать их с нецелой топологической размерностью, характеризующей данную физическую среду со сложной микроструктурой [6, 9, 20]. Существует большое число работ, посвящённых изучению физических свойств таких микроструктурированных и сильно неоднородных сред и использованию аппарата ДИ для объяснения наблюдаемых отличий в этих свойствах от свойств обычных сред (см. [6–9, 20, 25, 26, 31, 213–229] и ссылки в этих работах).

В упоминавшихся выше работах Р.Р. Нигматуллина [8, раздел IV; 196–199] в одной парадигме даётся не только геометрическая, но и физическая интерпретация дробных операций. Последняя заключается в том, что в реальных физических системах, динамика которых представляет собой самоподобный во времени процесс, часть состояний системы в процессе её эволюции “теряется”, становится недоступной. Именно это свойство и моделируется структурой канторова множества, позволяющего автоматически учитывать недоступность части состояний. Поскольку фрактальные многообразия разрывны на всех масштабах, то перейти к непрерывному описанию можно, используя временное усреднение по ансамблю фракталов. В результате в системе возникают сверхмедленные процессы диффузионного типа, описанные в [6–9, 20, 25, 26, 29, 31, 229–232]. Существование таких сверхмедленных процессов обусловливает наличие у среды памяти или временно́й нелокальности [229, 233–236], называемой также немарковской динамикой. Пространственная нелокальность проявляется в том, что состояние и/или отклик физической системы на внешнее воздействие зависит не только от её состояния (значения каких-либо характеристик) в определённой точке и её бесконечно малой окрестности, а определяется состоянием всей системы или как минимум некоторой конечной окрестности данной точки [6–9, 20, 29, 229–238]. Такая нелокальность характерна для плазмоподобных сред и сред со сложной микроструктурой, а также для электролитических сред, как искусственных [6–8, 196–199, 228, 239], так и природных [228, 240, 241]. В работе [242] фрактальные свойства структуры и наличие эффектов памяти и дальнодействия обсуждаются применительно к таким объектам, как галактика.

Отмеченная нелокальность, пространственная и временна́я, проявляется и в системах, не обладающих фрактальными свойствами. В [9, 20, 229, 243-248] показано, как наличие дальнодействия в системе может приводить к появлению феномена памяти у среды, при этом в уравнениях, описывающих динамику этой среды, появляются дробные производные (в смысле Римана–Лиувилля или Капуто). В [249] проводится сравнение двух подходов – на основе представления среды как фрактального многообразия и на основе рассмотрения среды как системы с дальнодействием. Дробные производные при этом понимаются в смысле Римана–Лиувилля и в смысле Маршо.

В [250–253] рассмотрены конкретные примеры сильно неоднородных физических систем с дальнодействием, для описания которых строятся модели с использованием ДИ. В частности, построена модель распространения оптического излучения через хиральный слой [250], позволяющая в случае вещественного показателя дробных операторов описывать процессы оптического вращения (вращения плоскости поляризации света), а в случае комплексного показателя – процессы кругового дихроизма и оптической активности. В [251] построена модель, описывающая процесс спонтанной эмиссии в фотонных кристаллах. Обзор использования формализма ДИ для описания релаксационных процессов в средах со сложной структурой и наличием сверхмедленных процессов и эффектов памяти приведён в [252], в основном на примере задач вязкоупругости. В [253] показано, что дробные фликкер-шумы (шумы, спектральная плотность которых изменяется по обратно-степенному закону с нецелым показателем степени $S(f) \sim f^{-\alpha}$, f – частота), наблюдаемые в электронных приборах, могут быть интерпретированы как действие дробного дифференциатора. Такой эффект возникает, например, в МОП-структурах из-за особенностей динамики носителей заряда в области границы раздела полупроводник–диэлектрик.

Рассмотрение систем, имеющих передаточную функцию вида $S(f) \sim f^{-\alpha}$, как систем, реализующих операции дробного интегрирования, было проведено ещё в начале 60-х гг. XX в. в работах С. Манабе (S. Manabe) [254, 255]. В этих же работах содержится одно из первых указаний на возможности использования ДИ в задачах управления. Такой подход основан на том, что результат преобразования Лапласа (см. (5)–(6)) и Фурье от дробной производной или интеграла пропорционален образу этой функции, умноженному на степенную функцию параметра преобразования с дробным показателем степени [1]. Появление дробно-степенных зависимостей в интегральных характеристиках, описывающих поведение различных систем, является поэтому веским основанием для многих исследователей говорить об обнаружении характерных черт дробной динамики в поведении системы или о большей адекватности дробного формализма для описания таких систем. Однако в результате критики [196] Р. Рутман показал в [165], что подобный подход и физическая интерпретация дробных операций как линейных систем (фильтров, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами) с упомянутой выше дробно-степенной передаточной функцией может рассматриваться лишь как некоторое весьма грубое и далеко не всегда адекватное приближение. Более обоснованным является представление дробных операций интегрирования и дифференцирования в виде бесконечной системы линейных ОДУ первого порядка с переменными коэффициентами [165]. Такое представление дробных операций характерно для распределённых систем и фактически отражает уже неоднократно отмеченное свойство нелокальности дробных операторов. Следовательно, можно говорить о том, что системы, описываемые в терминах ДИ, являются по определению распределёнными (нелокальными), а аппарат ДИ является естественным формализмом для описания и анализа распределённых систем.

В [31, 208, 256–261] обсуждаются вопросы статистической физики систем с памятью и/или пространственной нелокальностью, описываемых в формализме ДИ, в том числе возникновение в таких системах неэргодичности и сверхмедленных процессов. Одними из основных проблем, обсуждаемых в упомянутых работах, являются "крупнозернистое" усреднение во времени, аналогичное боголюбовскому, и энтропия, зависящая от ошибок измерений, для которой выводится дробное обобщение принципа максимума энтропии. Кроме того, ранее (раздел 7) упоминалось заметное число работ, посвящённых обобщению классической лагранжевой и гамильтоновой механики на случай систем, описываемых уравнениями с дробными производными. Были получены дробные аналоги базовых уравнений механики и показано, что в таких системах возникает ряд новых свойств, основным из которых является неконсервативность (диссипативность).

Интересная трактовка дробных операторов переменного (зависящего от аргумента) порядка представлена в работе [262], авторы которой на примере вязкоупругого осциллятора с памятью показывают, что переменный порядок оператора дробного дифференцирования может быть отождествлён с нормированным фазовым сдвигом между ускорением и координатой такого осциллятора.

Физическая интерпретация дробных операций даётся и в работе [192], обсуждавшейся выше. Данная интерпретация даётся для случая, когда независимой переменной является время, и основывается на представлении о том, что время может измеряться по-разному в различных системах отсчёта и/или различными приборами. В частности, рассматривается пример, когда наблюдатель движется в машине и способен измерять одновременно скорость машины по спидометру, показывающему истинную скорость, и время по часам, показывающим неверное время. Связь этого неверного времени с истинным временем описывается с помощью некоторой функции, аналогичной обсуждавшейся выше функции (13). В этом случае получается, что время измеряется по неравномерной шкале [192]. Тогда истинный путь, пройденный наблюдателем на машине, будет определяться дробным интегралом Римана–Лиувилля аналогично формуле (12) [192].

8.3. Вероятностная интерпретация дробных операций

В [208] показана связь между устойчивыми распределениями, изучаемыми в теории вероятностей, и дробными интегралами. Рассматривается система, в которой временна́я степень свободы является стохастической и представляет собой сумму случайных временных отрезков. Каждый из таких отрезков, в свою очередь, является случайной величиной, подчиняющейся устойчивому вероятностному распределению. Далее проводится математически обоснованный предельный переход от дискретных временных отрезков ("шагов") к непрерывному пределу. Это приводит к кинетическим уравнениям, содержащим дробные операторы. При этом показатель дробного оператора имеет прямую связь с параметром соответствующего устойчивого распределения вероятности. Наличие дробных операторов в кинетических уравнениях отражает тот факт, что они описывают подчинённые случайные процессы, при этом направляющий процесс связан со случайным процессом, имеющим устойчивое вероятностное распределение. Автор [208] пишет о "стохастической стреле времени", для которой характерен неравномерный шаг (являющийся в данном случае случайной величиной). Эти рассуждения в определённом смысле похожи на обсуждавшуюся выше физическую интерпретацию, данную И. Подлубным в [192]. В [208] показано, что такой характер вероятностного распределения приводит к наличию долговременной памяти у подчинённого процесса, а релаксация в такой системе характеризуется степенным спадом. Физические следствия данного подхода, позволяющие с единых позиций рассматривать явления релаксации в различных типах физических систем, обсуждаются в [263]. В [264] показано, что обобщение пуассоновского процесса со случайной интенсивностью, описывающего статистическое распределение интервала между случайными скачками, содержащее дробно-степенную функцию в образе Лапласа статистического распределения, приводит к дробному дифференциальному уравнению для плотности распределения интервалов между скачками.

В [265] также обсуждается вероятностная интерпретация дробных операций, но в случае определения Грюнвальда–Летникова. При этом интерпретация строится на основе сведе́ния дробного оператора к операторам целого порядка, имеющим вполне ясную и однозначную геометрическую интерпретацию. Рассматривая определение Грюнвальда–Летникова с бесконечным пределом (см. определение 2.4), можно, используя терминологию теории вероятностей, сказать, что ряд

$$-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\Gamma(\alpha-k+1)}f(x\mp k\xi)\equiv-\sum_{k=0}^{\infty}\gamma(\alpha,k)f(x\mp k\xi) \tag{15}$$

представляет собой математическое ожидание $E(X)$ случайной величины X. При этом $P(X=f(k\xi))=|\gamma(\alpha,k)|$. Несложно убедиться, что $\gamma(\alpha,0)=1$ и $-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\gamma(\alpha,k)=1$, т.е. "настоящее", так же как и все моменты "прошлого" и "будущего" наблюдаются с вероятностью единица, а каждая реализация $f(x')$ имеет вес, определяемый заданной вероятностью, которая тем ближе к единице, чем ближе x' к "настоящему". На основании изложенного в [265] предлагается и геометрическая (вероятностно-геометрическая) интерпретация дробной производной. Рассматривается график функции $f(x)$ и треугольник, вершинами которого являются $f(0)$ ("настоящее"), величина $E(X)$ (определяемая формулой (15)) и точка пересечения перпендикуляра, опущенного из точки $f(0)$ на ось абсцисс, с прямой $f=E(X)$. Показано, что при $\xi\to 0$ угол наклона прямой, проходящей через точки $f(0)$ и $E(X)$ (тангенса угла, образованного данной прямой с горизонталью), стремится к значению дробной производной порядка α в данной точке. В случае, когда $\alpha\to 1$, эта прямая стремится к касательной, а её угол наклона – к значению первой производной. Следует отметить, что такая интерпретация имеет много общего (кроме вероятностного аспекта) с геометрической интерпретацией, данной в более поздней работе [194] для степенной функции (см. выше). Также в [265] демонстрируется, что величина $\gamma(\alpha,k)$ имеет степенной спад $\gamma(\alpha,k)\sim k^{-\alpha-1}$, свидетельствующий о наличии эффекта памяти. В [266, 267] на основе описанной выше интерпретации строятся дробно-рациональные приближения для частотного отклика дробного дифференциатора.

В [260, 268] обсуждается энтропия, основанная на дробных операторах. В [268] показано, что введённая таким образом энтропия, в целом, аналогична энтропии Шеннона, но не обладает свойством аддитивности.

9. Заключение

Проведённый обзор наглядно демонстрирует, что ДИ является, в целом, более общей и сложной областью исследований, чем классический анализ. Аналогично теория ДДУ и ДДВ, а также теория дробных динамических систем и дробное вариационное исчисление включают в себя системы целого порядка в качестве особых случаев.

Несмотря на значительные успехи в разработке многих фундаментальных и прикладных направлений развития ДИ, в этой области остаётся тем не менее обширное поле для исследований. В частности, до сих пор нет единой ясной интерпретации геометрического и физического смысла дробных операторов. Нет также единого определения дробной производной: в более абстрактных математических исследованиях используется, как правило, определение Римана–Лиувилля, а в более прикладных исследованиях, связанных с физикой или теорией управления, в подавляющем большинстве случаев используется определение Капуто или более адекватное при численных расчётах определение Грюнвальда–Летникова. В последние годы стали развиваться "синтетические" подходы: определения, модифицирующие и обобщающие существующие подходы.

В исследованиях по ДДУ имеются серьёзные наработки, но отсутствует их систематизация: нет единых справочников, позволяющих сопоставить базовым постановкам начальных и начально-краевых задач соответствующие функции Грина, передаточные функции и характеристические уравнения, в том числе в случаях различных определений дробной производной. Достаточно малое количество работ посвящено исследованию ДДВ и изучению качественной динамики систем, описываемых ДДУ и ДДВ.

До конца нерешённой остаётся задача корректной и физически осмысленной постановки граничных и начальных условий для ДДУ (в том числе в зависимости от используемого типа дробной производной). При этом приобретает актуальность вопрос о построении стандартизирующих функций [269, 270] для начальных, краевых и начально-краевых задач, содержащих ДДУ, позволяющих изменять вид неоднородности в уравнениях и тем самым сводить соответствующие задачи к задачам с нулевыми граничными и/или начальными условиями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
2. *Oldham K.B., Spanier J.* The Fractional Calculus. San Diego: Academic Press, 1974.
3. *Machado T.J., Kiryakova V., Mainardi F.* Recent History of Fractional Calculus // Commun. Nonlinear Science and Numer. Simulat. 2011. V. 16. P. 1140–1153.
4. *Miller K.S., Ross B.* An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. New York: John Wiley & Sons, 1993.
5. *Monje C.A., Chen Y.Q., Vinagre B.M., Xue D., Feliu V.* Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications. London: Springer-Verlag, 2010.
6. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008.
7. *Потапов А.А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации. Топология выборки. М.: Университетская книга, 2005.
8. Фракталы и дробные операторы / Под общ. ред. А.Х. Гильмутдинова. Казань: Изд-во "Фэн" АН РТ, 2010.
9. *Тарасов В.Е.* Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. Ижевск: РХД, 2011.
10. *Tarasov V.E.* Fractional Vector Calculus and Fractional Maxwell's Equations // Annals Physics. 2008. V. 323. P. 2756–2778.
11. *Das S.* Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls. Berlin: Springer, 2008.
12. *Nishimoto K.* An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century), Integrals and Differentiations of Arbitrary Order. Koriyama: Descartes Press, 1991.

13. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
14. *Kiryakova V.S.* Generalized Fractional Calculus and Applications. New York: Longman Sci. Tech. & J. Wiley, 1994.
15. *Margulies T.* Mathematics and Science Applications and Frontiers: with Fractional Calculus. Bloomington: Xlibris Corporation, 2008.
16. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
17. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. San Diego: Academic Press, 1999.
18. *Diethelm K.* The Analysis of Fractional Differential Equations. Berlin: Springer, 2010.
19. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.
20. *Tarasov V.E.* Fractional Dynamics. Berlin: Springer, 2010.
21. *Zaslavsky G.M.* Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics. Oxford: Oxford University Press, 2008.
22. *Васильев В.В., Симак Л.А.* Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Киев: НАН Украины, 2008.
23. *Lakshmikantham V., Leela S., Vasundhara D.J.* Theory of Fractional Dynamic Systems. Cambridge: Cambridge Academic Publishers, 2009.
24. *Petras I.* Fractional-Order Nonlinear Systems. Berlin: Springer, 2011.
25. *West B.J., M. Bologna, P. Grigolini* Physics of fractal operators. New York: Springer-Verlag, 2003.
26. *Mainardi F.* Fractional Calculus and waves in linear viscoelasticity. London: Imperial College Press, 2010.
27. *Бабенко Ю.И.* Метод дробного дифференцирования в прикладных задачах теории тепломассообмена. СПб.: НПО "Профессионал", 2009.
28. *Caponetto R., Dongola G., Fortuna L., Petras I.* Fractional Order Systems. Modeling and Control Applications. Singapore: World Scientific, 2010.
29. Advances in Fractional Calculus / Eds. J. Sabatier, O.P. Agrawal, J.A.T. Machado. Dordrecht: Springer-Verlag, 2007.
30. New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications / Eds. D. Baleanu, Z.B. Güvenc, J.A.T. Machado. Dordrecht: Springer, 2010.
31. Applications of Fractional Calculus in Physics / Ed. R. Hilfer. Singapore: World Scientific, 2000.
32. Mathematical Methods in Engineering / Eds. K. Tas, J.A.T. Machado, D. Baleanu. Dordrecht: Springer, 2007.
33. www.diogenes.bg/fcaa
34. fde.ele-math.com
35. www.nonlinearscience.com/journal_2218-3892.php
36. *Сонин Н.Я.* О дифференцировании с произвольным указателем // Мат. сб. 1872. Т. 6. Вып. 1. С. 1–38.
37. *Летников А.В.* К разъяснению главных положений теории дифференцирования с произвольным указателем // Мат. сб. 1872. Т. 6. Вып. 1. С. 413–445.
38. *Erdelyi A., Kober H.* Some Remarks on Hankel Transforms // Quart. J. Math. Oxfordser. 1940. V. 11. No. 43. P. 212–221.
39. *Cossar J.* A Theorem on Cesaro Summability // J. London Math. Soc. 1941. V. 16. P. 56–68.

40. *Самко С.Г., Яхшибоев М.Н.* Об одной модификации дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля, применимой к функциям на R^1 с любым поведением на бесконечности // Изв. ВУЗов. Матем. 1992. № 4. С. 96–99.
41. *Гейсберг С. П.* Дробные производные ограниченных на оси функций // Изв. ВУЗов. Матем. 1968. № 11 (78). С. 51–69.
42. *Летников А.В.* Теория дифференцирования с произвольным указателем // Мат. сб. 1868. Т. 3. С. 1–68.
43. *Летников А.В.* Исследования, относящиеся к теории интегралов вида $\int_a^x (x - u)^{p-1} f(u) du$ // Мат. сб. 1874. Т. 7. Вып. 1. С. 5–205.
44. *Post E.L.* Generalized Differentiation // Trans. of Amer. Math. Soc. 1930. V. 32. No. 4. P. 723–781.
45. *Saigo M.* A Remark on Integral Operators Involving the Gauss Hypergeometric Functions // Math. Rep. Kyushu. Univ. 1987. V. 11. No. 2. P. 135–143.
46. *Шувалова Т.В.* Некоторые композиционные свойства обобщённых операторов дробного дифференцирования // Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. 2006. № 42. С. 45–48.
47. *Hadamar J.* Essai sur l'etude des fonctions donnees par leur development de Taylor // J. math. pures et appl. 1892. V. 8. Ser. 4. P. 101–186.
48. *Чуриков В.А.* Дробный анализ на основе оператора Адамара // Изв. Томск. политехн. ун-та. 2008. Т. 312. № 2. С. 16–20.
49. *Чуриков В.А.* Дробный анализ порядка $1/2$ на основе подхода Адамара // Изв. Томск. политехн. ун-та. 2008. Т. 312. № 2. С. 21–23.
50. *Чуриков В.А.* Программа и принципы построения дробного анализа // Изв. Томск. политехн. ун-та. 2009. Т. 314. № 2. С. 9–12.
51. *Чуриков В.А.* Внутренняя алгебра операторов дробного интегродифференцирования // Изв. Томск. политехн. ун-та. 2009. Т. 314. № 2. С. 12–15.
52. *Джрбашян М.М.* Обобщённый оператор Римана–Лиувилля и некоторые его применения // Докл. АН СССР. 1967. Т. 177. № 4. С. 767–770.
53. *Джрбашян М.М.* Обобщённый оператор Римана–Лиувилля и некоторые его применения // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1968. Т. 32. № 5. С. 1075–1111.
54. *Zavada P.* Operator of Fractional Derivative in the Complex Plane // Commun. in Math. Phys. 1998. V. 192. P. 261–285.
55. *Ortigueira M.D.* A Coherent Approach to Non-Integer Order Derivatives // Signal Proc. 2006. V. 86. P. 2505–2515.
56. *Li C.P., Dao X.H., Guo P.* Fractional Derivatives in Complex Planes // Nonlin. Anal. 2009. V. 71. P. 1857–1869.
57. *Magin R., Ortigueira M.D., Podlubny I., Trujillo J.* On the Fractional Signals and Systems // Signal Proc. 2011. V. 91. P. 350–371.
58. *Gutierrez R.E., Rosario J.M., Machado J.T.* Fractional Order Calculus: Basic Concepts and Engineering Applications // Math. Probl. Eng. 2010. V. 2010. Article ID 375858 (19 pages).
59. *Cottrill-Stepherd K., Naber M.* Fractional Differential Forms // J. Math. Phys. 2001. V. 42. No. 5. P. 2203–2212.
60. *Cottrill-Stepherd K., Naber M.* Fractional Differential Forms II // arXiv: math-ph/0301016.
61. *Chen Y., Yan Z., Zhang H.* Applications of Fractional Exterior Differential in Three-Dimensional Space // Appl. Math. Mech. 2003. V. 24. No. 3. P. 256–260.

62. *Казбеков К.К.* Дробные дифференциальные формы в евклидовом пространстве // Владикавказский матем. журн. 2005. Т. 7. Вып. 2. С. 41–54.

63. *Lavoie J.L., Osler T.J., Tremblay R.* Fractional Derivatives and Special Functions // SIAM Rev. 1976. V. 18. No. 2. P. 240–268.

64. *Kiryakova V.* The Multi-Index Mittag-Leffler Functions as an Important Class of Special Functions of Fractional Calculus // Comp. Math. Appl. 2010. V. 59. P. 1885–1895.

65. *Kiryakova V.* The Special Functions of Fractional Calculus as Generalized Fractional Calculus Operators of Some Basic Functions // Comp. Math. Appl. 2010. V. 59. P. 1128–1141.

66. *Haubold H.J., Mathai A.M., Saxena R.K.* Mittag-Leffler Functions and Their Applications // J. Appl. Math. 2011. V. 2011. Article ID 298628 (51 pages).

67. *Stojanovic M.* Fractional Derivatives in Spaces of Generalized Functions // Frac. Calc. Appl. Anal. 2011. V. 14. No. 1. P. 125–137.

68. *Tarasov V.E.* Fractional Derivative as Fractional Power of Derivative // Int. J. Math. 2007. V. 18. No. 3. P. 281–299.

69. *Tarasov V.E.* Fractional Powers of Derivatives in Classical Mechanics // Commun. Appl. Anal. 2008. V. 12. No. 4. P. 441–450.

70. *Tavazoei M.S.* A Note on Fractional-Order Derivatives of Periodic Functions // Automatica. 2010. V. 46. P. 945–948.

71. *Tavazoei M.S., Haeri M.* A Proof for Non-Existence of Periodic Solutions in Time Invariant Fractional-Order Systems // Automatica. 2009. V. 45. P. 1886–1890.

72. *Yazdani M., Salarieh H.* On the Existence of Periodic Solutions in Time-Invariant Fractional-Order Systems // Automatica. 2011. V. 47. P. 1834–1837.

73. *Jumarie G.* Modified Riemann–Liouville Derivative and Fractional Taylor Series of Nondifferentiable Functions Further Results // Comp. Math. Appl. 2006. V. 51. P. 1367–1376.

74. *Jumarie G.* Table of Some Basic Fractional Calculus Formulae Derived from a Modified Riemann–Liouville Derivative for Non-Differentiable Functions // Appl. Math. Lett. 2009. V. 22. P. 378–385.

75. *Li C.P., Deng W.H.* Remarks on Fractional Derivatives. // Appl. Math. Comp. 2007. V. 187. No. 2. P. 777–784.

76. *Li C.P., Qian D., Chen Y.Q.* On Riemann–Liouville and Caputo Derivatives // Discr. Dyn. Nat. Soc. 2011. V. 2011. Article ID 562494 (15 pages).

77. *Luchko Y.* Maximum Principle and Its Application for the Time-Fractional Diffusion Equations // Frac. Calc. Appl. Anal. 2011. V. 14. No. 1. P. 110–124.

78. *Katugampola U.N.* New Approach to a Generalized Fractional Integral // Appl. Math. Comp. 2011. V. 218. P. 860–865.

79. *Samko S.G.* Fractional Integration and Differentiation of Variable Order // Anal. Math. 1995. V. 21. P. 213–236.

80. *Lorenzo C.F., Hartley T.T.* Variable Order and Distributed Order Fractional Operators // Nonlin. Dyn. 2002. V. 29. P. 57–98.

81. *Valerio D., da Costa J.S.* Variable-Order Fractional Derivatives and their Numerical Aproximations // Signal Proc. 2011. V. 91. P. 470–483.

82. *Sun H., Chen Y., Chen W.* Time Fractional Differential Equation Model with Random Derivative Order // Proc. ASME Int. Design Engin. Technical Conf. & Computers and Inform. in Engin. Conf. IDETC/CIE 2009. San Diego, 2009. Paper ID DETC2009-87483 (6 pages).

83. *Al-Salam W.A., Verma A.* A Fractional Leibniz q-formula // Pac. J. Math. 1975. V. 60. P. 1–9.
84. *Al-Salam W.A.* Some Fractional q-integrals and q-derivatives // Proc. Edin. Math. Soc. 1969. V. 15. P. 135–140.
85. *Agrawal R.P.* Certain Fractional q-integrals and q-derivatives // Proc. Camb. Phil. Soc. 1969. V. 66. P. 365–70.
86. *Predrag M.R., Sladana D.M., Miomir S.S.* Fractional Integrals and Derivatives in q-calculus // Appl. Anal. Discr. Math. 2007. V. 1. P. 311–323.
87. *Atici F.M., Eloe P.W.* A Transform Method in Discrete Fractional Calculus // Int. J. Differ. Equat. 2007. V. 2. No. 2. P. 165–176.
88. *Atici F.M., Eloe P.W.* Initial Value Problems in Discrete Fractional Calculus // Proc. Amer. Math. Soc. 2009. V. 137. P. 981–989.
89. *Atici F.M., Eloe P.W.* Fractional q-calculus on a Time Scale // J. Nonlin. Math. Phys. 2007. V. 14. No. 3. P. 341–352.
90. *Holm M.T.* The Laplace Transform in Discrete Fractional Calculus // Comput. Math. Appl. 2011. V. 62. P. 1591–1601.
91. *Abdeljawad T., Baleanu D.* Fractional Differences and Integration by Parts // J. Comput. Anal. Appl. 2011. V. 13. No. 3. P. 574–582.
92. *Abdeljawad T., Baleanu D.* Caputo q-fractional Initial Value Problems and a q-analogue Mittag-Leffler Function // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 2011. V. 16. P. 4682–4688.
93. *Abdeljawad T.* On Riemann and Caputo Fractional Differences // Comput. Math. Appl. 2011. V. 62. P. 1602–1611.
94. *Miyakoda T.* Direct Discretization of the Fractional-Order Differential by Using Chebyshev Series Expansion // Proc. Appl. Math. Mech. 2007. V. 7. P. 2020011–2020012.
95. *Zwillinger D.* Handbook of Differential Equations. New York: Academic Press, 1997.
96. *Ahmad B., Sivasundaram S.* Existence of Solutions for Impulsive Integral Boundary Value Problems of Fractional Order // Nonlin. Anal.: Hybrid Syst. 2010. V. 4. P. 134–141.
97. *Ahmad B.* Existence of Solutions for Irregular Boundary Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equations // Appl. Math. Lett. 2010. V. 23. P. 390–394.
98. *Ahmad B., Nieto J.J.* Existence of Solutions for Nonlocal Boundary Value Problems of Higher-Order Nonlinear Fractional Differential Equations // Abstr. Appl. Anal. 2009. V. 2009. Article ID 494720 (9 pages).
99. *Ahmad B.* Existence Results for Multi-Point Nonlinear Boundary Value Problems for Fractional Differential Equations // Memoirs on Diff. Eq. Math. Phys. 2010. V. 49. P. 83–94.
100. *Allison J., Kosmatov N.* Multi-Point Boundary Value Problems of Fractional Order // Commun. Appl. Anal. 2008. V. 12. No. 4. P. 451–458.
101. *Deng_ J., Ma L.* Existence and Uniqueness of Solutions of Initial Value Problems for Nonlinear Fractional Differential Equations // Appl. Math. Lett. 2010. V. 23. P. 676–680.
102. *Devi J.V. Lakshmikantham V.* Nonsmooth Analysis and Fractional Differential Equations // Nonlin. Anal. 2009. V. 70. P. 4151–4157.
103. *El-Shahed M., Nieto J.J.* Nontrivial Solutions for a Nonlinear Multi-Point Boundary Value Problem of Fractional Order // Comput. Math. Appl. 2010. V. 59. P. 3438–3443.

104. *Kosmatov N.* Integral Equations and Initial Value Problems for Nonlinear Differential Equations of Fractional Order // Nonlin. Anal. 2009. V. 70. P. 2521–2529.

105. *Mophou G.M.* Existence and Uniqueness of Mild Solutions to Impulsive Fractional Differential Equations // Nonlin. Anal. 2010. V. 72. P. 1604–1615.

106. *Odibat Z.M.* Analytic Study on Linear Systems of Fractional Differential Equations // Comput. Math. Appl. 2010. V. 59. P. 1171–1183.

107. *Zhou Y., Jiao F.* Nonlocal Cauchy Problem for Fractional Evolution Equations // Nonlin. Anal.: Real World Appl. 2011. V. 11. P. 4465–4475.

108. *Agarwal R.P., Benchohra M., Hamani S.* A Survey on Existence Results for Boundary Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equations and Inclusions // Acta Appl. Math. 2010. V. 109. P. 973–1033.

109. *Xiao F.* Nonlocal Cauchy Problem for Nonautonomous Fractional Evolution Equations // Adv. Diff. Eq. 2011. V. 2011. Article ID 483816 (17 pages).

110. *Cichon M., Salem H.A.H.* Set-Valued System of Fractional Differential Equations with Hysteresis // Appl. Math. Comp. 2010. V. 215. P. 3824–3829.

111. *Agarwal R.P., Belmekki M., Benchohra M.* A Survey on Semilinear Differential Equations and Inclusions Involving Riemann–Liouville Fractional Derivative // Adv. Diff. Eq. 2009. V. 2009. Article ID 981728 (47 pages).

112. *Salem H.A.H.* On the Fractional Calculus in Abstract Spaces and Their Applications to the Dirichlet-Type Problem of Fractional Order // Comput. Math. Appl. 2010. V. 59. P. 1278–1293.

113. *Stojanović M.* Existence-Uniqueness Result for a Nonlinear n-term Fractional Equation // J. Math. Anal. Appl. 2009. V. 353. P. 244–255.

114. *Tatar N.* The Existence of Mild and Classical Solutions for a Second-Order Abstract Fractional Problem // Nonlin. Anal. 2010. V. 73. P. 3130–3139.

115. *Огородников Е.Н., Яшагин Н.С.* Постановка и решение задач типа Коши для дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана–Лиувилля // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2010. № 1 (20). С. 24–36.

116. *Feng W., Sun S., Han Z., Zhao Y.* Existence of Solutions for a Singular System of Nonlinear Fractional Differential Equations // Comput. Math. Appl. 2011. V. 62. P. 1370–1378.

117. *Kou C., Zhou H., Ye Y.* Existence of Solutions of Initial Value Problems for Nonlinear Fractional Differential Equations on the Half-Axis // Nonlin. Anal. 2011. V. 74. P. 5975–5986.

118. *Saadatmandi A., Dehghan M.* A New Operational Matrix for Solving Fractional-Order Differential Equations // Comput. Math. Appl. 2010. V. 59. P. 1326–1336.

119. *Bhrawy A.H., Alofi A.S., Ezz-Eldien S.S.* A Quadrature Tau Method for Fractional Differential Equations with Variable Coefficients // Appl. Math. Lett. 2011. V. 24. P. 2146–2152.

120. *Saeedi H., Moghadam M.M., Mollahasani N., Chuev G.N.* A CAS Wavelet Method for Solving Nonlinear Fredholm Integro-Differential Equations of Fractional Order // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 2011. V. 16. P. 1154–1163.

121. *Li Y.* Solving a Nonlinear Fractional Differential Equation Using Chebyshev Wavelets // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 2010. V. 15. P. 2284–2292.

122. *Rehman M., Khan R.A.* The Legendre Wavelet Method for Solving Fractional Differential Equations // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 2011. V. 16. P. 4163–4173.

123. *Lakestani M., Dehghan M., Irandoust-pakchin S.* The Construction of Operational Matrix of Fractional Derivatives Using B-spline Functions // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 2012. V. 17. P. 1149–1162.

124. *Lizama C.* An Operator Theoretical Approach to a Class of Fractional Order Differential Equations // Appl. Math. Lett. 2011. V. 24. P. 184–190.

125. *Li K, Peng J.* Laplace Transform and Fractional Differential Equations // Appl. Math. Lett. 2011. V. 24. P. 2019–2023.

126. *Jafari H, Seifi S.* Solving a System of Nonlinear Fractional Partial Differential Equations Using Homotopy Analysis Method // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 2009. V. 14. No. 5. P. 1962–1969.

127. *Zhang X., Tang B., He Y.* Homotopy Analysis Method for Higher-Order Fractional Integro-Differential Equations // Comput. Math. Appl. 2011. V. 62. P. 3194–3203.

128. *Ghazanfari B., Veisi F.* Homotopy Analysis Method for the Fractional Nonlinear Equations // J. King Saud Univ. Science. 2011. V. 23. P. 389–393.

129. *Das S.* Analytical Solution of a Fractional Diffusion Equation by Variational Iteration Method // Comput. Math. Appl. 2009. V. 57. No. 3. P. 483–487.

130. *Jafari H., Tajadodi H.* He's Variational Iteration Method for Solving Fractional Riccati Differential Equation // Int. J. Diff. Eq. 2010. V. 2010. Article ID 764738 (8 pages).

131. *Faraz N., Khan Y., Jafari H., Yildirim A., Madani M.* Fractional Variational Iteration Method via Modified Riemann–Liouville Derivative // J. King Saud Univ. Science. 2011. V. 23. P. 413–417.

132. *Adomian G.* A Review of the Decomposition Method in Applied Mathematics // J. Math. Anal. Appl. 1988. V. 135. P. 501–544.

133. *Adomian G.* Solution of Physical Problems by Decomposition // Comput. Math. Appl. 1994. V. 27. No. 9/10. P. 145–154.

134. *Arora H.L., Abdelwahid F.I.* Solutions of Non-Integer Order Differential Equations via the Adomian Decomposition Method // Appl. Math. Lett. 1993. V. 6. No. 1. P. 21–23.

135. *Daftardar-Gejji V., Jafari H.* Solving a Multi-Order Fractional Differential Equation Using Adomian Decomposition // Appl. Math. Comput. 2007. V. 189. P. 541–548.

136. *Jafari H., Daftardar-Gejji V.* Solving a System of Nonlinear Fractional Differential Equations Using Adomian Decomposition. // J. Comput. Appl. Math. 2006. V. 196. P. 644–651.

137. *Khan Y., Faraz N.* Modified Fractional Decomposition Method Having Integral w.r.t $d\xi^{\alpha}$ // J. King Saud Univ. Science. 2011. V. 23. P. 157–161.

138. *Huang L., Li X.-F., Zhao Y., Duan X.-Y.* Approximate Solution of Fractional Integro-Differential Equations by Taylor Expansion Method // Comput. Math. Appl. 2011. V. 62. P. 1127–1134.

139. *Rida S.Z., Arafa A.A.M.* New Method for Solving Linear Fractional Differential Equations // Int. J. Diff. Eq. 2011. V. 2011. Article ID 814132 (8 pages).

140. *Jia M.* Monotone Iterative Technique for Fractional Evolution Equations in Banach Spaces // J. Appl. Math. 2011. V. 2011. Article ID 767186 (13 pages).

141. *Băleanu D., Mustafa O.G., Agarwal R.P.* Asymptotic Integration of $(1 + \alpha)$-order Fractional Differential Equations // Comput. Math. Appl. 2011. V. 62. P. 1492–1500.

142. *Lakshmikantham V.* Theory of Fractional Functional Differential Equations // Nonlin Anal. 2008. V. 69. P. 3337–3343.

143. *Ahmad B., Sivasundaram S.* Some Basic Results for Fractional Functional Integro-Differential Equations // Commun. Appl. Anal. 2008. V. 12. No. 4. P. 467–478.

144. *dos Santos J.P.C., Cuevas C., de Andrade B.* Existence Results for a Fractional Equation with State-Dependent Delay // Adv. Diff. Eq. 2011. V. 2011. Article ID 642013 (15 pages).

145. *Agarwal R.P., Zhou Y., Wang J.-R., Luo X.* Fractional Functional Differential Equations with Causal Operators in Banach Spaces // Math. Comp. Model. 2011. V. 54. P. 1440–1452.

146. *Wei X.T., Lu X.Z.* The Periodic Solutions of the Compound Singular Fractional Differential System with Delay // Int. J. Diff. Eq. 2010. V. 2010. Article ID 509286 (9 pages).

147. *Cernea A.* On a Nonlinear Fractional Order Differential Inclusion // Electron. J. Qual. Theory Diff. Eq. 2010. No. 78. P. 1–13. http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/.

148. *Cernea A.* Continuous Version of Filippov's Theorem for Fractional Differential Inclusions // Nonlin. Anal. 2010. V. 72. P. 204–208.

149. *Витюк А.Н.* Существование решений дифференциальных включений с частными производными дробных порядков // Изв. ВУЗов. Мат. 1997. № 8 (423). С. 13–19.

150. *Витюк А.Н.* Дифференциальные уравнения дробного порядка с многозначными решениями // Вiсник Одеськ. Держ. Ун-ту. Физ.-мат. науки. 2003. Т. 8. № 2. С. 108–112.

151. *Ouahab A.* Some Results for Fractional Boundary Value Problem of Differential Inclusions // Nonlin. Anal. 2008. V. 69. P. 3877–3896.

152. *Ibrahim R.W.* Existence of Convex and Non Convex Local Solutions for Fractional Differential Inclusions // Electron. J. Diff. Eq. 2009. V. 2009. No. 18. P. 1–13. http://ejde.math.txstate.edu.

153. *Cernea A.* Some Remarks on a Fractional Differential Inclusion with Non-Separated Boundary Conditions // Electron. J. Qual. Theory Diff. Eq. 2011. No. 45. P. 1–14. http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/.

154. *Henderson J., Ouahab A.* Impulsive Differential Inclusions with Fractional Order // Comput. Math. Appl. 2010. V. 59. P. 1191–1226.

155. *Hamani S., Benchohra M., Graef J.R.* Existence Results for Boundary-Value Problems with Nonlinear Fractional Differential Inclusions and Integral Conditions // Electron. J. Diff. Eq. 2010. V. 2010. No. 20. P. 1–16. http://ejde.math.txstate.edu.

156. *Yang D.* Existence of Solutions for Fractional Differential Inclusions with Boundary Conditions // Electron. J. Diff. Eq. 2010. V. 2010. No. 92. P. 1–10. http://ejde.math.txstate.edu.

157. *Girejko E., Mozyrska D., Wyrwas M.* A Sufficient Condition of Viability for Fractional Differential Equations with the Caputo Derivative // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 381. P. 146–154.

158. *Henderson J., Ouahab A.* Fractional Functional Differential Inclusions with Finite Delay // Nonlin. Anal. 2009. V. 70. P. 2091–2105.

159. *Darwish M.A., Ntouyas S.K.* On Initial and Boundary Value Problems for Fractional Order Mixed Type Functional Differential Inclusions // Comput. Math. Appl. 2010. V. 59. P. 1253–1265.

160. *Hartley T.T., Lorenzo C.F.* Dynamics and Control of Initialized Fractional-Order Systems // Nonlin. Dyn. 2002. V. 29. No. 1–4. P. 201–233.

161. *Heymans N., Podlubny I.* Physical Interpretation of Initial Conditions for Fractional Differential Equations with Riemann–Liouville Fractional Derivatives // Rheol. Acta. 2006. V. 45. P. 765–771.

162. *Ortigueira M.D.* On the Initial Conditions in Continuous-Time Fractional Linear Systems // Signal Proc. 2003. V. 83. P. 2301 – 2309.

163. *Sabatier J., Merveillaut M., Malti R., Oustaloup A.* How to Impose Physically Coherent Initial Conditions to a Fractional System? // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 2010. V. 15. P. 1318–1326.

164. *Trigeassou J.C., Maamri N.* Initial Conditions and Initialization of Linear Fractional Differential Equations // Signal Proc. 2011. V. 91. P. 427–436.

165. *Rutman R.S.* On Physical Interpretations of Fractional Integration and Differentiation // Теор. матем. физ. 1995. Т. 105. № 3. С. 393–404.

166. *Чадаев В.А.* Задача Коши в локально-нелокальной постановке для нелинейного уравнения дробного порядка в определённом классе // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2010. № 1 (20). С. 214–217.

167. *Огородников Е.Н.* Некоторые аспекты теории начальных задач для дифференциальных уравнений с производными Римана–Лиувилля // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2010. № 5 (21). С. 10–23.

168. *Mansouri R., Bettayeb M., Djennoune S.* Multivariable Fractional System Approximation with Initial Conditions Using Integral State Space Representation // Comput. Math. Appl. 2010. V. 59. P. 1842–1851.

169. *Mansouri R., Bettayeb M., Djennoune S.* Comparison Between Two Approximation Methods of State Space Fractional Systems // Signal Proc. 2011. V. 91. P. 461–469.

170. *Riewe F.* Mechanics with Fractional Derivatives // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. No. 3. P. 3581–3592.

171. *Rabei E.M., Nawafleh K.I., Hijjawi R.S., Muslih S.I., Baleanu D.* The Hamilton Formalism with Fractional Derivatives // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 327. P. 891–897.

172. *Jumarie G.* Lagrangian Mechanics of Fractional Order, Hamilton–Jacobi Fractional PDE and Taylor's Series of Non-Differentiable Functions // Chaos, Solitons and Fractals. 2007. V. 32. P. 969–987.

173. *Cresson J., Inizan P.* Variational Formulations of Differential Equations and Asymmetric Fractional Embedding // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 385. P. 975–997.

174. *Agrawal O.P.* Formulation of Euler–Lagrange Equations for Fractional Variational Problems // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 272. P. 368–379.

175. *Almeida R., Torres D.F.M.* Calculus of Variations with Fractional Derivatives and Fractional Integrals // Appl. Math. Lett. 2009. V. 22. P. 1816–1820 (arXiv: 0907.1024v1).

176. *Atanackovic T.M., Konjik S., Pilipović S., Simić S.* Variational Problems with Fractional Derivatives: Invariance Conditions and Nöther's Theorem // Nonlin. Anal. 2009. V. 71. P. 1504–1517.

177. *Almeida R.* Fractional Variational Problems with the Riesz–Caputo Derivative // Appl. Math. Lett. 2012. V. 25. P. 142–148.

178. *Baleanu D., Trujillo J.I.* A New Method of Finding the Fractional Euler–Lagrange and Hamilton Equations within Caputo Fractional Derivatives // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. 2010. V. 15. P. 1111–1115.

179. *Jarad F., Abdeljabad T., Baleanu D.* Fractional Variational Principles with Delay within Caputo Derivatives // Rep. Math. Phys. 2010. V. 65. No. 1. P. 17–28.

180. *Almeida R., Torres D.F.M.* Necessary and Sufficient Conditions for the Fractional Calculus of Variations with Caputo Derivatives // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. 2011. V. 16. P. 1490–1500 (arXiv:1007.2937v1).
181. *Malinowska A.B., Torres D.F.M.* Generalized Natural Boundary Conditions for Fractional Variational Problems in Terms of the Caputo Derivative // Comput. Math. Appl. 2010. V. 59. P. 3110–3116.
182. *Frederico G.S.F., Torres D.F.M.* A Formulation of Noether's Theorem for Fractional Problems of the Calculus of Variations // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 334. P. 834–846.
183. *Frederico G.S.F., Torres D.F.M.* Fractional Conservation Laws in Optimal Control Theory // Nonlin. Dyn. 2008. V. 53. P. 215–222.
184. *Frederico G.S.F., Torres D.F.M.* Fractional Noether's Theorem in the Riesz–Caputo Sense // Appl. Math. Comp. 2010. V. 217. P. 1023–1033.
185. *Frederico G.S.F., Torres D.F.M.* Fractional Optimal Control in the Sense of Caputo and the Fractional Noether's Theorem // Int. Math. Forum. 2008. V. 3. No. 10. P. 479 – 493.
186. *Baleanu D., Mihaela-Baleanu C., Golmankhaneh A.K., Golmankhaneh A.K.* The Fractional Virial Theorem // Frac. Diff. Eq. 2011. V. 1. No. 1. P. 89–97.
187. *Agrawal O.P.* Fractional Variational Calculus and the Transversality Conditions // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. V. 39. P. 10375–10384.
188. *Tomovski Z., Hilfer R., Srivastava H.M.* Fractional and Operational Calculus with Generalized Fractional Derivative Operators and Mittag-Leffler Type Functions // Integr. Transf. Spec. Funct. 2010. V. 21. No. 11. P. 797–814.
189. *Agrawal O.P., Muslih S.I., Baleanu D.* Generalized Variational Calculus in Terms of Multi-Parameters Fractional Derivatives // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 2011. V. 16. P. 4756–4767.
190. *Bastos N.R.O., Ferreira R.A.C., Torres D.F.M.* Discrete-Time Fractional Variational Problems // Signal Proc. 2011. V. 91. P. 513–524.
191. *Wang D., Xiao A.* Fractional Variational Integrators for Fractional Variational Problems // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 2002. V. 17. P. 602–610.
192. *Podlubny I.* Geometrical and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation // Frac. Calc. Appl. Anal. 2002. V. 5. No. 4. P. 367–386 (arXiv: math/0110241v1).
193. *Podlubny I., Despotovic V., Skovranek T., McNaughton B.H.* Shadows on the Walls: Geometric Interpretation of Fractional Integration // J. Online Math. and Its Appl. 2007. V. 7. Article ID 1664.
http://www.maa.org/joma/Volume7/Podlubny/GIFI.html.
194. *Nizami S.T., Khan N., Khan F.H.* A New Approach to Represent the Geometric and Physical Interpretation of Fractional Order Derivatives of Polynomial Function and Its Application in Field of Sciences // Can. J. Comp. Math., Nat. Sci., Eng. Med. 2010. V. 1. No. 1. P. 1–8.
195. *Ben Adda F.* Geometric Interpretation of the Fractional Derivative // J. Frac. Calc. 1997. V. 11. P. 21–52.
196. *Нигматуллин Р.Р.* Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теор. матем. физ. 1992. Т. 90. № 3. С. 354–368.
197. *Le Mehaute A., Nigmatullin R. R., Nivanen L.* Fleches du temps et geometrie fractale. Paris: Hermez, 1998.
198. *Nigmatullin R. R., Le Mehaute A.* The Geometrical and Physical Meaning of the Fractional Integral with Complex Exponent // Intern. J. of Sci. “Georesourses”. 2004. No. 1(8). P. 2–9.

199. *Nigmatullin R.R., Le Mehaute A.* Is There Geometrical/Physical Meaning of the Fractional Integral with Complex Exponent? // J. Non-Cryst. Sol. 2005. V. 351. P. 2888–2899.

200. *Ren F.-Y., Yu Z.-G., Su F.* Fractional Integral Associated to the Self-Similar Set or the Generalized Self-Similar Set and Its Physical Interpretation // Phys. Lett. A. 1996. V. 219. No. 1–2. P. 59–68.

201. *Yu Z.-G., Ren F.-Y., Zhou J.* Fractional Integral Associated to Generalized Cookie-Cutter Set and Its Physical Interpretation // J. Phys. A.: Math. Gen. 1997. V. 30. No. 15. P. 5569–5578.

202. *Ren F.Y., Liang J.-R.* The Non-Integer Operation Associated to Random Variation Sets of the Self-Similar Set // Physica A. 2000. V. 286. No. 1–2. P. 45–55.

203. *Ren F.-Y., Liang J.-R., Wang X.-T., Qiu W.-Y.* Integrals and Derivatives on Net Fractals // Chaos, Solitons and Fractals. 2003. V. 16. P. 107–117.

204. *Moshrefi-Torbati M., Hammond J.K.* Physical and Geometrical Interpretation of Fractional Operators // J. Franklin Inst. 1998. V. 335B. No. 6. P. 1077–1086.

205. *Rutman R.S.* On the Paper by R.R. Nigmatullin “Fractional Integral and Its Physical Interpretation” // Теор. матем. физ. 1994. Т. 100. № 3. С. 476–478.

206. *Gorenflo R.* Afterthoughts on Interpretation of Fractional Derivatives and Integrals // Proc. 2nd Int. Workshop “Transform Methods and Special Functions” Varna’96. Sofia, 1998. P. 589–591.

207. *Stanislavsky A.A., Weron K.* Exact Solution of Averaging Procedure Over the Cantor Set // Physica A. 2002. V. 303. No. 1–2. P. 57–66.

208. *Станиславский А.А.* Вероятностная интерпретация интеграла дробного порядка // Теор. матем. физ. 2004. Т. 138. № 3. С. 491–507.

209. *Parvate A., Gangal A.D.* Calculus on Fractal Subsets of Real Line – I: Formulation // Fractals. 2009. V. 17. No. 1. P. 53–81.

210. *Parvate A.,* Satin S., *Gangal A.D.* Calculus on Fractal Curves in R^n // Fractals. 2011. V. 19. No. 1. P. 15–27.

211. *Tatom F.B.* The Relationship Between Fractional Calculus and Fractals // Fractals. 1995. V. 3. No. 1. P. 217–229.

212. *Yao K., Su W.Y., Zhou S.P.* On the Connection Between the Order of Fractional Calculus and the Dimensions of a Fractal Function // Chaos, Solitons and Fractals. 2005. V. 23. P. 621–629.

213. *Tarasov V.E.* Fractional Generalization of Liouville Equations // Chaos. 2004. V. 14. No. 1. P. 123–127.

214. *Tarasov V.E.* Fractional Fokker–Planck Equation for Fractal Media // Chaos. 2005. V. 15. No. 2. Paper ID 023102 (8 pages).

215. *Tarasov V.E.* Dynamics of Fractal Solids // Int. J. Mod. Phys. B. 2005. V. 19. No. 27. P. 4103–4114.

216. *Tarasov V.E.* Electromagnetic Fields on Fractals // Mod. Phys. Lett. A. 2006. V. 21. No. 20. P. 1587–1600.

217. *Tarasov V.E.* Multipole Moments of Fractal Distribution of Charges. // Mod. Phys. Lett. B. 2005. V. 19. No. 22. P. 1107–1118.

218. *Tarasov V.E.* Continuous Medium Model for Fractal Media // Phys. Lett. A. 2005. V. 336. P. 167–174.

219. *Tarasov V.E.* Possible Experimental Test of Continuous Medium Model for Fractal Media // Phys. Lett. A. 2005. V. 341. P. 467–472.

220. *Tarasov V.E.* Wave Equation for Fractal Solid String // Mod. Phys. Lett. B. 2005. V. 19. No. 15. P. 721–728.

221. *Tarasov V.E.* Universal Electromagnetic Waves in Dielectric // J. Phys.: Cond. Mat. 2008. V. 20. P. 175223–175229.

222. *Tarasov V.E.* Electromagnetic Field of Fractal Distribution of Charged Particles // Phys. Plasmas. 2005. V. 12. Paper ID 082106 (9 pages).

223. *Tarasov V.E. , Zaslavsky G.M.* Fractional Ginzburg–Landau Equation for Fractal Media // Physica A. 2005. V. 354. P. 249–261.

224. *Metzler R., Nonnenmacher T.F.* Space- and Time-Fractional Diffusion and Wave Equations, Fractional Fokker–Planck Equations, and Physical Motivation // Chem. Phys. 2002. V. 284. P. 67–90.

225. *Ortigueira M.D., Batista A.G.* On the Relation Between the Fractional Brownian Motion and the Fractional Derivatives // Phys. Lett. A. 2008. V. 372. P. 958–968.

226. *Bagley R.L., Torvik P.J.* A Theoretical Basis for Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity // J. Rheol. 1983. V. 27. No. 3. P. 201–210.

227. *Bagley R.L., Torvik P.J.* On the Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behavior // J. Rheol. 1986. V. 30. No. 1. P. 133–155.

228. *Debnath L.* Recent Applications of Fractional Calculus to Science and Engineering // Int. J. Math. Math. Sci. 2003. V. 54. P. 3413–3442.

229. *Vazquez L.* From Newton's Equation to Fractional Diffusion and Wave Equations // Adv. Differ. Eq. 2011. V. 2011. Article ID 169421 (13 pages).

230. *Nigmatullin R.R.* Theory of Dielectric Relaxation in Non-Crystalline Solids: from a Set of Micromotions to the Averaged Collective Motion in the Mesoscale Region // Physica B. 2005. V. 358. P. 201–215.

231. *Nigmatullin R.R.* 'Fractional' Kinetic Equations and 'Universal' Decoupling of a Memory Function in Mesoscale Region // Physica A. 2006. V. 363. P. 282–298.

232. *Miskinis P.* The Havriliak–Negami Susceptibility as a Nonlinear and Nonlocal Process // Physica Scr. 2009. V. T136. Paper ID 014019 (3 pages).

233. *Zhang Y., Benson D.A., Reeves D.M.* Time and Space Nonlocalities Underlying Fractional-Derivative Models: Distinction and Literature Review of Field Applications // Adv. Water Res. 2009. V. 32. P. 561–581.

234. *Luchko Y.F., Rivero M., Trujillo J.J., Velasco M.P.* Fractional Models, Non-Locality, and Complex Systems // Comp. Math. Appl. 2010. V. 59. P. 1048–1056.

235. *Mainardi F., Mura A., Pagnini G.* The *M*-Wright Function in Time-Fractional Diffusion Processes: A Tutorial Survey // Int. J. Diff. Eq. 2010. V. 2010. Article ID 104505 (29 pages).

236. *Учайкин В.В.* Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // Усп. Физ. Наук. 2003. Т. 173. № 8. С. 847–876.

237. *Lazopoulos K.A.* Non-local Continuum Mechanics and Fractional Calculus // Mech. Res. Commun. 2006. V. 33. P. 753–757.

238. *Сибатов Р.Т., Учайкин В.В.* Дробно-дифференциальная кинетика переноса заряда в неупорядоченных полупроводниках // Физ. Техн. Полупров. 2007. Т. 41. № 3. С. 346–351.

239. *Jesus I.S., Machado J.A.T.* Development of Fractional Order Capacitors Based on Electrolyte Processes // Nonlin. Dyn. 2009. V. 56. P. 45–55.

240. *Jesus I.S., Machado J.A.T., Cunha J.B.* Fractional Electrical Impedances in Botanical Elements // J. Vibr. Control. 2008. V. 14. No. 9–10. P. 1389–1402.

241. *Meral F.C., Royston T.J., Magin R.* Fractional Calculus in Viscoelasticity: An Experimental Study // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. 2010. V. 15. P. 939–945.
242. *Учайкин В.В.* О дробно-дифференциальных моделях ускорения космических лучей в Галактике. // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 92. № 4. С. 226–232.
243. *Tarasov V.E.* Map of Discrete System into Continuous // J. Math. Phys. 2006. V. 47. Paper ID 092901 (24 pages).
244. *Tarasov V.E.* Continuous Limit of Discrete Systems with Long-Range Interaction // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. V. 39. P. 14895–14910.
245. *Tarasov V.E.* Differential Equations with Fractional Derivative and Universal Map with Memory // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. V. 42. Paper ID 465102 (13pages).
246. *Tarasov V.E.* Discrete Map with Memory from Fractional Differential Equation of Arbitrary Positive Order // J. Math. Phys. 2009. V. 50. Paper ID 122703 (6 pages).
247. *Cottone G., Di Paola M., Zingales M.* Fractional Mechanical Model for the Dynamics of Non-Local Continuum // Lect. Notes Elect. Eng. 2009. V. 11. P. 389–423.
248. *Korabel N., Zaslavsky G.M., Tarasov V.E.* Coupled Oscillators with Power-Law Interaction and Their Fractional Dynamics Analogues // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. 2007. V. 12. P. 1405–1417.
249. *Carpinteri A., Cornetti P., Sapora A., Di Paola M., Zingales M.* Fractional Calculus in Solid Mechanics: Local Versus Non-Local Approach // Phys. Scr. 2009. V. T136. Paper ID 014003 (7 pages).
250. *Naqvi S.A., Naqvi Q.A., Hussain A.* Modelling of Transmission through a Chiral Slab Using Fractional Curl Operator // Opt. Commun. 2006. V. 266. P. 404–406.
251. *Wu J.-N., Huang C.-H., Cheng S.-C., Hsieh W.-F.* Spontaneous Emission from a Two-Level Atom in Anisotropic One-Band Photonic Crystals: A Fractional Calculus Approach // Phys. Rev. A. 2010. V. 81. Paper ID 023827 (9 pages).
252. *Mainardi F., Gorenflo R.* Time-Fractional Derivatives in Relaxation Processes: a Tutorial Survey // Frac. Calc. Appl. Anal. 2007. V. 10. No. 3. P. 269–308.
253. *Рехвиашвили С.Ш.* Моделирование фликкер-шума с помощью дробного интегродифференцирования // ЖТФ. 2006. Т. 76. № 6. С. 123–126.
254. *Manabe S.* The Non-integer Integral and Its Application to Control Systems // ETJ of Japan. 1961. V. 6. No. 3/4. P. 83–87.
255. *Manabe S.* The System Design by Use of a Model Consisting of a Saturation and Noninteger Integrals // ETJ of Japan. 1963. V. 8. No. 3/4. P. 147–150.
256. *Hilfer R.* Fractional Dynamics, Irreversibility and Ergodicity Breaking // Chaos, Solitons & Fractals. 1995. V. 5. No. 8. P. 1475–1484.
257. *Vainstein M.H., Costa I.V.L., Oliveira F.A.* Mixing, Ergodicity and the Fluctuation-Dissipation Theorem in Complex Systems // Lect. Notes Phys. 2006. V. 688. P. 159–188.
258. *Gaies A., El-Akrmi A.* Fractional Variational Principle in Macroscopic Picture // Phys. Scr. 2004. V. 70. P. 7–10.
259. *Jumarie G.* Probability Calculus of Fractional Order and Fractional Taylor's Series Application to Fokker–Planck Equation and Information of Non-Random Functions // Chaos, Solitons & Fractals. 2009. V. 40. P. 1428–1448.
260. *Jumarie G.* Path Probability of Random Fractional Systems Defined by White Noises in Coarse-Grained Time. Application of Fractional Entropy. // Frac. Diff. Eq. 2011. V. 1. No. 1. P. 45–87.
261. *Cottone G., Di Paola M., Butera S.* Stochastic Dynamics of Nonlinear Systems with a Fractional Power-Law Nonlinear Term: The Fractional Calculus Approach // Prob. Eng. Mech. 2011. V. 26. P. 101–108.

262. *Ramirez L.E.S., Coimbra C.F.M.* On the Selection and Meaning of Variable Order Operators for Dynamic Modeling // Int. J. Diff. Eq. 2010. V. 2010. Article ID 846107 (16 pages).

263. *Stanislavsky A.A.* The Stochastic Nature of Complexity Evolution in the Fractional Systems // Chaos, Solitons and Fractals. 2007. V. 34. P. 51–61.

264. *Репин О.Н., Саичев А.И.* Дробный закон Пуассона // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 2005. Т. 43. № 9. С. 823–826.

265. *Machado J.A.T.* A Probabilistic interpretation of the Fractional-Order Differentiation // Frac. Calc. Appl. Anal. 2003. V. 6. No. 1. P. 73–80.

266. *Machado J.A.T.* Fractional Derivatives: Probability Interpretation and Frequency Response of Rational Approximations // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 2009. V. 14. P. 3492–3497.

267. *Machado J.A.T.* Time-Delay and Fractional Derivatives // Adv. Diff. Eq. 2011. V. 2011. Article ID 934094 (12 pages).

268. *Ubriaco M.R.* Entropies Based on Fractional Calculus // Phys. Lett. A. 2009. V. 373. P. 2516–2519.

269. *Бутковский А.Г.* Структурная теория распределённых систем. М.: Наука, 1977.

270. *Бутковский А.Г.* Характеристики систем с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1979.

Статья представлена к публикации членом редколлегии И.В. Рублевым.

Поступила в редакцию 05.03.2012