



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. И. Квинто, С. Э. Парсегов, Равноудаленное расположение агентов на отрезке: анализ алгоритма и его обобщения, *Автомат. и телемех.*, 2012, выпуск 11, 30–41

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.222.60.144

7 января 2025 г., 23:50:52



© 2012 г. Я.И. КВИНТО, канд. техн. наук,
С.Э. ПАРСЕГОВ

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

РАВНОУДАЛЕННОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ АГЕНТОВ НА ОТРЕЗКЕ: АНАЛИЗ АЛГОРИТМА И ЕГО ОБОБЩЕНИЯ

Решается задача обобщения одного из алгоритмов управления формациями — алгоритма равноудалённого расположения агентов на заданном фиксированном отрезке. В отличие от существовавших ранее подходов, основанных на уравнениях первого порядка, предлагается алгоритм второго порядка. Доказано, что предложенный алгоритм является устойчивым и при надлежащем выборе настраиваемого параметра может обеспечивать более высокую скорость сходимости в сравнении с алгоритмом первого порядка. Показана связь между задачей расположения на отрезке и классической задачей достижения консенсуса. Приводятся примеры с результатами моделирования.

1. Введение

Децентрализованное/распределённое управление формациями можно охарактеризовать как формирование геометрических образов в пространстве группой агентов при помощи локального обмена информацией. Такой информацией могут служить, как правило, координаты соседних агентов либо относительные расстояния до них. Формирование определенных геометрических образов часто встречается в природе: стаи перелетных птиц, образующих V-образные формации, поведение косяков рыб и стад животных. В теории современных мультиагентных систем управление формациями является одним из наиболее важных направлений по причине их коммерческого и военного применений. Корни данной проблемы уходят в задачи элементарной геометрии. Еще в 1878 г. Г. Дарбу изучал поведение многоугольников, применяя к вершинам на каждой итерации предложенного им алгоритма простое усредняющее правило [1]. Таким образом, в других терминах, без векторно-матричного описания и изучения спектра матрицы системы, был изучен частный случай известной задачи консенсуса для дискретных систем. В [2] указывается, что задача распределенного управления формациями с агентами, обладающими информацией об относительном расположении соседей, является задачей достижения консенсуса. В то же время существуют алгоритмы, позволяющие получать геометрические образы с помощью иных подходов. Примером может служить простой линейный алгоритм равноудаленного расположения агентов на отрезке с закрепленными концами. В рамках управления мультиагентными системами такой алгоритм (дискретный и непрерывный случаи) впервые изучен в [3]. Позднее независимо от [3]

в [4] был предложен аналогичный непрерывный алгоритм и получены некоторые его обобщения. Дискретная версия алгоритма расположения на отрезке и некоторые другие алгоритмы были изучены в [5]. В перечисленных работах все алгоритмы описываются уравнениями первого порядка. В [6, 7] были получены и изучены модификации алгоритма циклического преследования, где в качестве моделей агентов выступали двойные интеграторы; в [8] были также изучены разные алгоритмы с интеграторами второго порядка. В данной работе на основании [6–8] предложен новый алгоритм равноудаленного расположения на отрезке — алгоритм второго порядка, проведен подробный анализ устойчивости и скорости сходимости в сравнении с алгоритмом первого порядка. Для исследования устойчивости системы применен критерий устойчивости мультиагентных систем [9, 10]. Кроме того, показано, что после определенных преобразований задача равноудаленного расположения на отрезке может быть сведена к задаче достижения консенсуса.

2. Постановка задачи

В [4] предлагается линейный закон перемещения агентов для их равномерного расположения на отрезке, границы которого либо фиксированы, либо изменяются в соответствии с известным законом. Под агентами понимаются индексированные точки на прямой, которые способны менять свое расположение. Закон управления предполагает наличие информации о расстояниях между агентом и двумя его ближайшими по номерам соседями. В рамках предложенной стратегии каждый агент движется в направлении середины отрезка, соединяющего его соседей. При этом первый и последний агенты стремятся занять положение между границами отрезка и ближайшими к ним по номерам соседями. Управление движением производится за счет изменения скорости агента, т.е. алгоритм описывается дифференциальными уравнениями первого порядка.

Опишем формально алгоритм для случая фиксированных концов отрезка. Пусть $x_i(t)$ — координата положения в момент времени $t \geq 0$ i -го агента на прямой, $i = 1, 2, \dots, n$. Обозначим через x_b и x_e координаты начала и конца отрезка соответственно. Пусть движение каждого агента описывается интегратором первого порядка

$$(1) \quad \dot{x}_i = u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Предлагается следующий закон управления [4]:

$$(2) \quad \begin{aligned} u_1 &= \frac{x_2 + x_b}{2} - x_1, \\ u_i &= \frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{2} - x_i, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ u_n &= \frac{x_e + x_{n-1}}{2} - x_n. \end{aligned}$$

Динамика всей системы описывается векторным дифференциальным уравнением первого порядка

$$(3) \quad \dot{x} = Ax + b,$$

где

$$(4) \quad x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^\top,$$

$$(5) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0,5 & 0 & \dots & 0 \\ 0,5 & -1 & 0,5 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0,5 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$(6) \quad b = [0,5x_b, 0, \dots, 0,5x_e]^\top \in \mathbb{R}^n.$$

В [4] также указывается, что собственные числа матрицы A имеют вид

$$(7) \quad \lambda_k = -2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}, \quad k = 1, \dots, n,$$

т.е. система (3) устойчива. Вводя замену переменных

$$(8) \quad z = x - x^*,$$

где

$$(9) \quad x^* = -A^{-1}b,$$

можно перейти от (3) к однородной системе

$$(10) \quad \dot{z} = Az,$$

для которой справедливо следующее [4]:

— система (10) устойчива;

— $z(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ и $x_i \rightarrow x_b + \frac{i}{n+1}(x_e - x_b)$ при $t \rightarrow \infty, i = 1, 2, \dots, n$,

т.е. все точки из любого начального положения стремятся выстроиться на отрезке с фиксированными концами x_b и x_e на равном расстоянии друг от друга;

— верна оценка $\|z(t)\| \leq e^{\sigma_1 t} \|z(0)\|$,

где

$$(11) \quad \sigma_1 = \max_k \operatorname{Re} \lambda_k = -2 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

С учетом замены (8): $\|x(t) - x^*\| \leq e^{\sigma_1 t} \|x(0) - x^*\|$. Таким образом, скорость сходимости алгоритма (3) определяется выражением (11). При больших n справедлива приближенная оценка [4]

$$(12) \quad \sigma_1 \approx -\frac{\pi^2}{2n^2}.$$

Как видно из (1)–(2), управление движением агентов происходит путем мгновенного изменения скорости. Такой алгоритм интересен с точки зрения изучения кинематики агентов, но *не может быть реализован физически* для

механических систем. В соответствии со вторым законом Ньютона, прикладывая силу к объекту, можно менять его ускорение, а не непосредственно скорость. Ниже предлагается новый алгоритм равноудаленного расположения на отрезке с динамическими моделями агентов в виде интеграторов второго порядка. Разработанный алгоритм является более реалистичным, поскольку позволяет менять скорость агентов через ускорение, опосредованно. Также исследуется скорость сходимости алгоритма второго порядка в сравнении с алгоритмом первого порядка.

3. Алгоритм второго порядка для равноудаленного расположения агентов

Будем рассматривать модели агентов в виде интеграторов второго порядка

$$(13) \quad \ddot{x}_i = u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

а закон управления выберем следующим образом:

$$(14) \quad \begin{aligned} u_1 &= \frac{x_2 + x_b}{2} - x_1 - \alpha \dot{x}_1, \\ u_i &= \frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{2} - x_i - \alpha \dot{x}_i, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ u_n &= \frac{x_e + x_{n-1}}{2} - x_n - \alpha \dot{x}_n, \end{aligned}$$

где α — некоторый настраиваемый параметр, вектор x имеет вид (4), а x_b и x_e — координаты начала и конца отрезка. Обозначим через $s = d/dt$ оператор дифференцирования, действующий на каждый элемент вектора x . Тогда из (13)–(14) получим выражение, описывающее динамику системы из n агентов,

$$(15) \quad (s^2 + \alpha s)x = Ax + b,$$

где A и b определяются выражениями (5), (6). Система (15) является системой линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Для анализа ее устойчивости можно перейти к системе уравнений первого порядка и исследовать ее характеристический полином. В общем случае такой подход неудобен, поскольку размерность матрицы A и порядок оператора в левой части равенства могут быть высокими. Существует критерий, позволяющий исследовать устойчивость систем вида (15) по собственным числам матрицы A и свойствам оператора. Частотный критерий анализа устойчивости мультиагентных систем в такой постановке предложен в [9], позднее похожий критерий был сформулирован в [10]. Устойчивость систем вида $\phi(s)x = Ax$ эквивалентна отсутствию правых нулей у характеристической функции $G(s) = \det(A - \phi(s)I_n)$, где $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — единичная матрица. В [9] введено специальное понятие H -области функции $\phi(s)$ на комплексной плоскости, упрощающее анализ устойчивости. Такое множество строится с использованием принципа D -разбиения. В случае, если H -область существует и собственные числа матрицы A лежат внутри этой области, система является устойчивой. С использованием критерия [9] было сформулировано и доказано следующее утверждение.

Утверждение 1 [11]. Система (15) является устойчивой для всех $\alpha > 0$, а нули характеристической функции $G(s) = \det(A - (s^2 + \alpha s)I_n)$ имеют вид

$$(16) \quad \lambda_k^\pm = -0,5\alpha \pm \sqrt{(0,5\alpha)^2 - 2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}}.$$

Доказательство устойчивости основывается на том, что при $\alpha > 0$ H -область ограничивается функцией $\phi(j\omega) = -\omega^2 + j\alpha\omega$ и представляет собой внутренность параболы, лежащей в левой полуплоскости. Поскольку собственные числа матрицы A являются действительными и отрицательными, выполняются условия критерия [9]. Сравним скорость сходимости алгоритмов (3), (15) и проанализируем собственные числа (16). Проводя рассуждения, аналогичные (7)–(11), легко установить, что при $\alpha > 0$ (устойчивой системе (15)) справедливо следующее: скорость сходимости алгоритма (15) определяется выражением

$$(17) \quad \sigma_2 = \max_k \operatorname{Re} \lambda_k^\pm,$$

при этом агенты также стремятся расположиться на отрезке равномерно. В зависимости от знака подкоренного выражения и с учетом $\alpha > 0$ получаем следующее разбиение по α

$$(18) \quad \sigma_2 = \begin{cases} -0,5\alpha, & 0 < \alpha \leq 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2(n+1)} \\ -0,5\alpha + \sqrt{0,25\alpha^2 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}}, & \alpha > 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2(n+1)}. \end{cases}$$

Сравним оценки скорости сходимости для алгоритмов первого и второго порядков на разных интервалах. При этом будем считать, что число агентов $n > 1$.

1. Интервал $0 < \alpha \leq 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2(n+1)}$:

а) скорость сходимости алгоритма (15) выше, чем (3), если $-0,5\alpha < -2 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}$, т.е. при $4 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)} < \alpha \leq 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2(n+1)}$;

б) скорость сходимости одинакова при $\alpha = 4 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}$;

в) алгоритм (15) сходится медленнее при $0 < \alpha < 4 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}$.

2. Интервал $\alpha > 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2(n+1)}$:

а) скорость сходимости алгоритма (15) выше, чем (3), если $\alpha < 1 + 2 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}$, т.е. при $2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2(n+1)} < \alpha < 1 + 2 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}$;

б) скорость сходимости одинакова при $\alpha = 1 + 2 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}$;

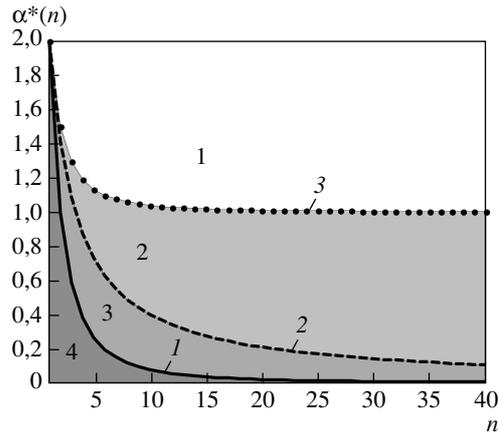


Рис. 1. Графики граничных функций $\alpha(n)$: $\alpha_1^*(n) = 4 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}$ (линия 1), $\alpha_2^*(n) = 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2(n+1)}$ (линия 2), $\alpha_3^*(n) = 1 + 2 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}$ (линия 3).

в) алгоритм (15) сходится медленнее при $\alpha > 1 + 2 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}$.

Будем называть функции $\alpha^*(n)$, разбивающие плоскость $\{\alpha, n\}$ на области, граничными. Проиллюстрируем факт, что графики полученных зависимостей граничных функций от числа агентов в системе не пересекаются, т.е. разбиение выполнено корректно.

Как видно из рис. 1, графики зависимостей $\alpha^*(n)$ разбивают плоскость на четыре области. В первой и четвертой областях находятся значения параметра α , обеспечивающие более высокую скорость сходимости алгоритма первого порядка; при значениях α , принадлежащих второй и третьей областям, более высокую скорость сходимости имеет алгоритм второго порядка. Кроме того, можно заметить, что при оптимальном выборе α скорость сходимости алгоритма второго порядка увеличивается с ростом числа агентов n в системе.

Утверждение 2. Алгоритм второго порядка имеет более высокую скорость сходимости при $\alpha \in \left(4 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}, 1 + 2 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}\right)$, алгоритм первого порядка – при $\alpha \in \left(0, 4 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}\right) \cup \left(1 + 2 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}, +\infty\right)$, $n > 1$. Скорость сходимости двух алгоритмов одинакова при $\alpha = 4 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}$, $\alpha = 1 + 2 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}$, $n > 1$. Кроме того, алгоритм второго порядка имеет наибольшую скорость сходимости при $\alpha = 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2(n+1)} \in \left(4 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}, 1 + 2 \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}\right)$, $n > 1$.

Таким образом, исследована устойчивость системы (15), проведено сравнение скоростей сходимости алгоритмов первого и второго порядков и установлено, что, выбирая параметр α должным образом, можно обеспечивать более высокую скорость сходимости второго алгоритма при сохранении свойства физической реализуемости.

4. Равноудаленное расположение агентов как задача консенсуса

4.1. Некоторые понятия теории графов

Можно заметить, что поскольку агенты в пределе выстраиваются на равных расстояниях (т.е. длины отрезков между точками стремятся стать равными), то задача расположения на отрезке напоминает задачу согласования характеристик, или консенсуса. Покажем, как при помощи несложных преобразований перейти к такой задаче. Для ясности дальнейшего изложения приведем некоторые важные понятия, связанные с теорией графов и классической задачей консенсуса.

Для изучения взаимодействия агентов, образующих сети, применяется аппарат теории графов. Остановимся на рассмотрении простейшего случая таких сетей, когда граф является неориентированным.

Определение 1. Неориентированным графом называется упорядоченная пара $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, где $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ — непустое множество вершин, $\mathcal{E} = \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ — множество неупорядоченных пар вершин $\{i, j\}$, называемых ребрами. Неориентированный граф $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, a)$ называется взвешенным, если определена весовая функция $a : E \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Простой алгоритм достижения консенсуса с агентами, описываемыми интеграторами первого порядка $\dot{x}_i = u_i, i = 1, 2, \dots, n$, может быть компактно представлен в виде следующей системы на графе n -го порядка [2, 12]:

$$(19) \quad \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - x_i),$$

где a_{ij} — веса ребер, соединяющих соответствующие вершины графа.

Определение 2. Матрица

$$(20) \quad L : l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & j \neq i, \\ \sum_{k \neq i} a_{ik}, & j = i, \end{cases}$$

называется лапласовской матрицей, ассоциированной с графом системы (19).

С учетом введенного определения уравнение (19) легко переписать в векторно-матричной форме

$$(21) \quad \dot{x} = -Lx.$$

Лапласовская матрица неориентированного графа обладает рядом важных свойств. Она является симметричной и положительно полуопределенной,

все ненулевые собственные числа действительные и положительные, причем справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3 [8, 12]. Процесс согласования (19), (21) сходится, т.е. для любых $x_i(0)$ и $i, j = 1, 2, \dots, n$ выполняется $|x_i(t) - x_j(t)| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ (состояние каждого агента стремится к состояниям его соседей), тогда и только тогда, когда нулевое собственное число матрицы L единственно. Кроме того, указанные условия также эквивалентны связности графа.

Использование лапласовской матрицы является хорошо изученным способом описания сетевых мультиагентных систем. В частности, спектр лапласовской матрицы содержит полезную информацию о динамике мультиагентной системы [12]. К примеру, наименьшее положительное собственное число L , известное как алгебраическая связность или собственное число Фидлера, является мерой того, насколько хорошо связана сеть [12].

4.2. Переход к задаче консенсуса

Вернемся к задаче равномерного расположения на отрезке. Будем рассматривать случай, когда одна из границ отрезка совпадает с началом координат. К такому описанию всегда легко перейти при помощи операции параллельного переноса. В этом случае выражение (3) можно записать в виде

$$(22) \quad \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x},$$

где $\tilde{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n, x_e]^\top$,

$$(23) \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0,5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0,5 & -1 & 0,5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0,5 & -1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}.$$

Как видно из (22)–(23), размерность пространства состояний увеличилась на одно состояние за счет добавления неподвижного фиктивного агента x_e .

Введем обозначения:

$$(24) \quad \gamma_1 = x_1 - 0, \quad \gamma_2 = x_2 - x_1, \quad \gamma_3 = x_3 - x_2, \quad \dots, \quad \gamma_{n+1} = x_e - x_n,$$

где $\gamma_i, i = 1, 2, \dots, n+1$, — расстояния между агентами. Замена координат в векторно-матричной форме имеет вид

$$(25) \quad \gamma = C\tilde{x},$$

$$(26) \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}.$$

Легко видеть, что матрица C является невырожденной. Переходя к новым координатам, перепишем (22) в виде

$$(27) \quad \dot{\gamma} = -L\gamma,$$

где матрица

$$(28) \quad L = -C\tilde{A}C^{-1}$$

имеет вид лапласовской матрицы неориентированного графа-цепи с весами ребер $a_{ij} = 0,5$:

$$(29) \quad L = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 & 0 & \dots & 0 \\ -0,5 & 1 & -0,5 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}.$$

Анализ алгоритма также показывает, что если под новыми характеристиками-состояниями системы понимать длины отрезков, которые стремятся стать равными, то простой переход к таким новым координатам приводит задачу равномерного расположения на отрезке к классической задаче консенсуса для системы, структура которой задается неориентированным графом-цепью. Кроме того, легко заметить, что наибольшее собственное число исходной матрицы системы (5) после перехода к задаче консенсуса имеет смысл так называемого собственного числа Фидлера (с другим знаком), которое также характеризует скорость сходимости алгоритма.

5. Примеры

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие поведение алгоритмов первого и второго порядков, и связь задачи равноудаленного расположения на отрезке с задачей консенсуса.

Пример 1 (сравнение алгоритмов первого и второго порядков). Рассмотрим систему, состоящую из семи агентов, стремящихся расположиться на равных расстояниях на отрезке $[-2, 2]$. Начальные координаты расположения агентов имеют вид $x(0) = [0,308, 0,496, -0,832, 0,827, 0,652, 0,992, -0,115]^\top$. На рис. 2 представлены результаты анализа алгоритмов первого и второго порядков. Для алгоритма второго порядка было выбрано значение $\alpha = 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{16}$, обеспечивающее максимальную скорость сходимости.

Пример 2 (расположение на отрезке и консенсус). Покажем на конкретном примере переход от задачи равноудаленного расположения на отрезке к задаче консенсуса. Будем рассматривать систему из трех агентов. Пусть начальное расположение агентов определяется вектором $x(0) = [1, 10, 0,3]^\top$, а отрезок имеет вид $[0, 8]$. Переходя к описанию системы в виде (22), получим расширенный вектор начальных условий в виде $\tilde{x}(0) = [1, 10, 0,3, 8]^\top$.

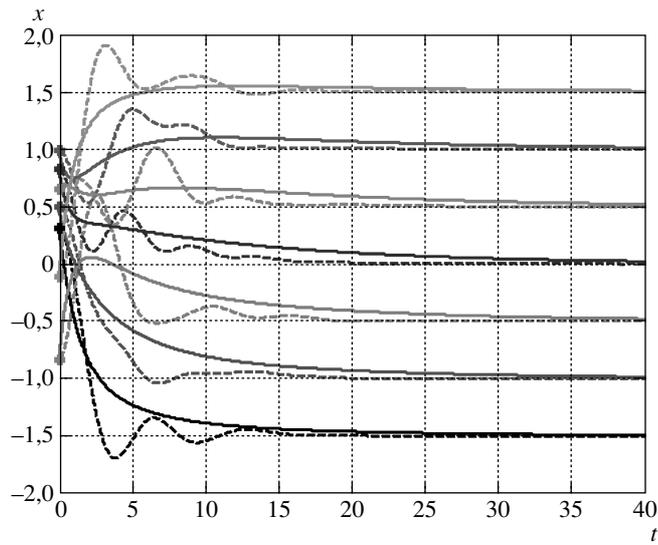


Рис. 2. Траектории агентов алгоритма равноудаленного расположения на отрезке $[-2, 2]$, интервал времени $[0, 40]$ с. Сплошная линия — алгоритм первого порядка, пунктирная — второго. Снизу вверх представлены пары графиков, соответствующие агентам с первого по седьмой.

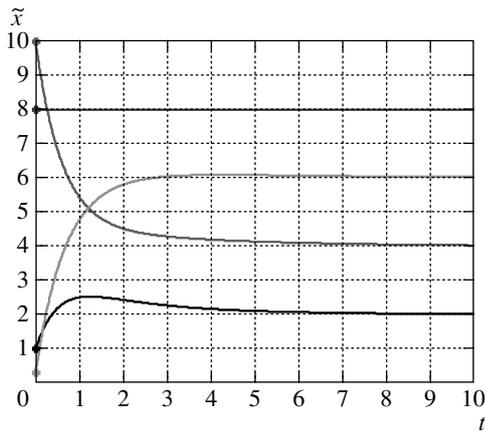


Рис. 3. Траектории агентов алгоритма равноудаленного расположения на отрезке.

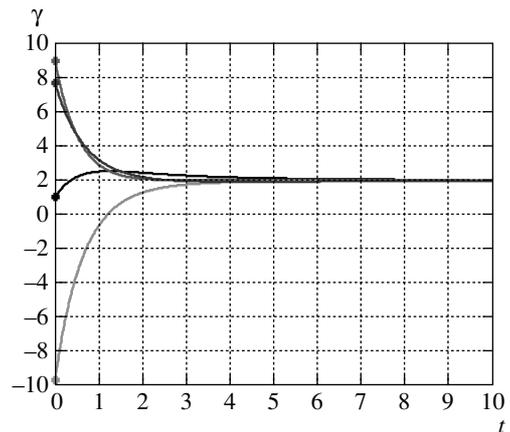


Рис. 4. Траектории “новых” агентов алгоритма достижения консенсуса.

После применения преобразования (25) начальные условия примут вид $\gamma(0) = [1, 9, -9, 7, 7, 7]^T$. На рис. 3 и 4 приведены графики для алгоритма равноудаленного расположения на отрезке в форме (22) и задачи консенсуса (27).

Как видно из рис. 3, один из агентов остается неподвижным, поскольку это граница отрезка. Агенты выстраиваются на одинаковых расстояниях, равных

двум. После перехода к задаче консенсуса новые агенты, имеющие смысл расстояний между исходными точками-агентами, стремятся прийти в одно общее состояние $\gamma^* = 2$ (см. рис. 4). При этом скорость сходимости остается прежней.

6. Заключение

В работе предложен алгоритм второго порядка для равноудаленного расположения агентов на отрезке. В отличие от существовавших ранее подходов в качестве моделей агентов рассматриваются двойные интеграторы. Разработанный алгоритм второго порядка позволяет переходить от моделей агентов в виде одиночных интеграторов, т.е. от кинематических моделей, к моделям второго порядка, т.е. к динамическим моделям. Показано, что для положительных значений настраиваемого параметра α алгоритм является устойчивым. Исследована зависимость скорости сходимости алгоритма от значений α . По полученному разбиению по значениям α установлено, что при его надлежащем выборе можно обеспечивать более высокую скорость сходимости, чем у алгоритма первого порядка. Следует отметить, что можно предложить алгоритмы более высокого порядка (большей степенью оператора $\phi(s)$), но при этом намного труднее исследовать устойчивость и скорость сходимости. Изучаемый алгоритм предполагает, что агенты выстраиваются равноудаленно, однако незначительная модификация алгоритма, аналогичная [5], может позволить выстраивать агентов на расстояниях, связанных определенными соотношениями. В работе также была исследована связь между задачей равноудаленного расположения на отрезке и классической задачей консенсуса; показано, что в новых координатах переход в общее состояние означает, что отрезки приобретают равную длину, т.е. решается задача равноудаленного расположения. Таким образом, исходная задача равноудаленного расположения на фиксированном отрезке может быть сведена к задаче консенсуса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Darboux G.* Sur un probleme de geometrie elementaire // Bull. Sci. Math. 1878. V. 2. No. 1. P. 298–304.
2. *Olfati-Saber R., Fax J.A., Murray R.M.* Consensus and cooperation in networked multi-agent systems // Proc. IEEE. 2007. V. 95. No. 1. P. 215–233.
3. *Wagner I.A., Bruckstein A.M.* Row straightening via local interactions // Circuits, Syst., Signal Proc. 1997. V. 16. No. 3. P. 287–305.
4. *Петрикевич Я.И.* Линейные алгоритмы управления геометрическим расположением объектов в многоагентной системе // Управление большими системами. Спец. выпуск 30.1 “Сетевые модели в управлении”. М.: ИПУ РАН, 2010. С. 665–680.
5. *Щербakov П.С.* Управление формациями: схема Ван Лоуна и другие алгоритмы // Управление большими системами. Спец. выпуск 30.1 “Сетевые модели в управлении”. М.: ИПУ РАН, 2010. С. 681–696.
6. *Pavone M., Frazzoli E.* Decentralized policies for geometric pattern formation and path coverage // ASME J. Dynam. Syst., Measurement, Control. 2007. V. 129. No. 5. P. 633–643.

7. *Ramirez J.L., Pavone M., Frazzoli E., Miller D.W.* Distributed Control of Spacecraft Formations via Cyclic Pursuit: Theory and Experiments // *AIAA J. Guidance, Control, Dynam.* 2010. V. 33. No. 5. P. 1655–1669.
8. *Ren W., Cao Y.* Distributed Coordination of Multi-agent Networks. Emergent Problems, Models, and Issues. London: Springer, 2011.
9. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Устойчивость и робастная устойчивость однотишных систем // *АиТ.* 1996. № 11. С. 91–104.
Polyak B.T., Tsyupkin Ya.Z. Stability and Robust Stability of Uniform Systems // *Autom. Remote Control.* 1996. V. 57. No. 11. P. 1606–1617.
10. *Hara S., Hayakawa T., Sugata H.* Stability Analysis of Linear Systems with Generalized Frequency Variables and Its Applications to Formation Control // *Proc. Decision Control Conf.* 2007. P. 1459–1466.
11. *Parsegov S.E.* Allocation of agents on a line: simple algorithm and generalizations // *Proc. 14th BOAC.* 2011. P. 119–125.
12. *Чеботарев П.Ю., Агаев Р.П.* Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов // *АиТ.* 2009. № 3. С. 136–151.
Chebotarev P.Yu., Agaev R.P. Coordination in Multiagent Systems and Laplacian Spectra of Digraphs // *Autom. Remote Control.* 2009. V. 70. No. 3. P. 469–483.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 19.01.2012