И. Н. Барабанов, Е. С. Пятницкий, Численное построение функций Ляпунова для стохастических систем, *Автомат. и телемех.*, 1994, выпуск 6, 53–61

УДК 517.977

© 1994 г. И. Н. БАРАБАНОВ,
Е. С. ПЯТНИЦКИЙ, д-р техн. наук
(Институт проблем управления РАН, Москва)

ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Предлагается метод построения функций Ляпунова для стохастических систем в форме уравнений Ито. Исследуются свойства систем при наличии функций Ляпунова в кольцеобразных областях. Приводится алгоритм численного построения функций Ляпунова и примеры его реализации.

1. Введение

Прямой метод Ляпунова является одним из наиболее эффективных методов анализа устойчивости нелинейных динамических систем. Первоначально метод был развит для анализа устойчивости детерминированных систем. Начиная с основополагающей работы [1], прямой метод Ляпунова стал использоваться для анализа устойчивости стохастических систем [2,3].

Как и в случае детерминированных систем, основная трудность при использовании метода в стохастических системах состоит в построении функций Ляпунова с требуемыми свойствами. При этом оказывается неизвестным даже класс функций, в котором можно искать функцию Ляпунова.

В настоящее время при решении задач устойчивости детерминированных систем эффективными оказались методы построения функций Ляпунова в областях, которые получаются, если из рассмотрения удалить достаточно малую окрестность начала координат [4, 5]. Для системы уравнений в отклонениях, нулевое решение которых соответствует невозмущенному движению, в этих областях оказывается возможным с помощью ЭВМ построить функцию Ляпунова в классе многочленов конечной степени от компонент вектора состояния системы. Оказывается, что эта задача может быть сведена к стандартной задаче линейного программирования относительно неопределенных коэффициентов многочлена [4–6].

Разумеется, рассмотрение областей с удаленной достаточно малой окрестностью нуля позволяет установить лишь диссипативность динамической системы, т.е. существование инвариантной области, в которую решение попадает за конечное время из любой точки рассматриваемой области и там остается. Однако, если инвариантная область диссипативности оказывается достаточно малой, то возникает задача об асимптотической устойчивости в малом, а не в большом, как в исходной задаче. Для решения задачи устойчивости при достаточно малых отклонениях можно использовать различные методы и, в частности, исследовать устойчивость по линейному приближению.

Из приведенных рассуждений следует, что при исследовании устойчивости в большом, т.е. при конечных (а не малых) начальных возмущениях, возникают две различные задачи. Первая из них связана с получением условий, при которых все движения из рассматриваемой области попадают в достаточно малую окрестность нуля, т.е. условий диссипативности с достаточно малой инвариантной областью. Вторая задача состоит в определении условий асимптотической устойчивости по Ляпунову, т.е. в малом.

Рассмотрение областей с удаленной достаточно малой окрестностью нуля позволяет полностью решить первую из этих задач, которая с практической точки зрения эквивалентна задаче устойчивости, так как система всегда находится под действием внешних возмущений.

В настоящей работе этот подход, ориентированный на применение ЭВМ, развивается для стохастических систем, динамика которых описывается уравнениями Ито.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать динамическую систему, описываемую уравнением Ито:

$$(1) \qquad dX_t = b(X_t)dt + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(X_t)dW_t^r,$$

где $X = (X_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, а W_t^r – r-мерный винеровский процесс.

Будем предполагать, что коэффициенты сноса $b(x)$ и диффузии $\sigma_r(x), r = \overline{1,k}$ уравнения (1) есть n-мерные непрерывные вектор-функции, обеспечивающие регулярность решения уравнения (1). Везде далее будем предполагать также, что $b(0) = 0$, $\sigma_r(0) = 0$, $r = \overline{1,k}$, т.е. система (1) имеет тривиальное решение $X(t) \equiv 0$.

Решение уравнения (1) является марковским процессом с производящим оператором L, который может быть выписан через коэффициенты $b(x)$ и $\sigma_r(x)$ уравнения (1):

$$(2) \qquad L = \left(b(x), \frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{k} \left(\sigma_r(x), \frac{\partial}{\partial x}\right)^2.$$

Для уравнения (1) существуют аналоги теорем Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости, если определить устойчивость по вероятности в соответствии с [2]. Аналогом производной в силу системы в этих теоремах выступает оператор L.

Для удобства дальнейшего изложения приведем здесь один из вариантов достаточного условия асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1) [2]. *Пусть в области U ($\{x = 0\} \in U$) существует дважды непрерывно дифференцируемая (кроме, быть может, точки 0) положительно определенная в смысле Ляпунова функция $V(x)$, такая, что функция $LV(x)$ отрицательно определена в области U. Тогда решение $X(t) \equiv 0$ системы (1) асимптотически устойчиво по вероятности.*

Для анализа асимптотической устойчивости системы (1) необходимо иметь функцию $V(x)$, удовлетворяющую в некоторой окрестности нуля условиям $V(x) > 0$, $LV(x) < 0$. Для построения такой функции, как и в случае анализа устойчивости детерминированных систем, общих методов не существует. Для детерминированной системы

$$(3) \qquad \dot{x} = b(x),$$

в которую переходит (1) при $\sigma \equiv 0$, для практических приложений оказывается полезной функция Ляпунова $V(x)$, определенная в области Γ вида $\{x : \varepsilon \leq \|x\| \leq R\}$, $\varepsilon, R > 0$, $\varepsilon > R$ и удовлетворяющая в Γ неравенствам

$$(4) \qquad V(x) \geq \Delta, \quad \dot{V}(x) \leq -\Delta$$

при некотором $\Delta > 0$. Такую функцию согласно [5] можно численно построить на ЭВМ, выбирая ее из класса полиномов конечной степени вида

$$(5) \qquad V_p(x) = \sum_{s=1}^{N_p} \alpha_s \cdot \varphi_s(x),$$

где $\varphi_s(x)$ – стандартные степенные мономы $\{x_i x_j,\ x_i x_j x_k,\ x_i x_j \ldots x_l\}$, а α_s – неопределенные коэффициенты, подлежащие определению.

Задача, решению которой посвящена настоящая работа, состоит как в разработке методов построения функций Ляпунова вида (5), так и в определении свойств процессов, являющихся решением системы (1) при наличии указанных функций $V(x)$ с требуемыми свойствами.

3. Свойства стохастических процессов

Выясним, какими свойствами обладает решение системы (1), если для этой системы существует функция Ляпунова $V(x)$, удовлетворяющая неравенствам, аналогичным (4) в области Γ.

Теорема 1. Пусть в области $\Gamma = \{x:\ \varepsilon \le \|x\| \le R\}$, $\varepsilon, R > 0$ для системы (1) существует функция Ляпунова $V(x) \in C^2(\Gamma)$, удовлетворяющая в Γ неравенствам

$$(6) \qquad V(x) \ge \Delta > 0, \quad LV(x) \le -\Delta < 0, \quad x \in \Gamma.$$

Обозначим

$$\Phi_m = \left\{ x \in \Gamma:\ V(x) < m, \quad m = \min_{\|x\|=R} V(x) \right\}.$$

Пусть начальное условие $x_0 \in \Phi_m$, $V(x) = \gamma$. Тогда траектории системы (1) за конечное время входят в окрестность нуля $U_\varepsilon = \{\|x\| < \varepsilon\}$ с вероятностью, не меньшей $1 - \dfrac{\gamma}{m}$.

Доказательство теоремы 1 приведено в приложении.

Замечание 1. Факт, доказываемый в теореме 1, не является полным аналогом свойства детерминированной системы, устанавливаемого с помощью функции Ляпунова, удовлетворяющей неравенствам (4) в Γ. Это свойство является, по существу, диссипативностью системы, т.е. если траектория решения системы (3) начинается внутри поверхности уровня функции V, то она за конечное время попадает в некоторую малую окрестность нуля и остается в ней [4]. Аналогичное утверждение для стохастической системы означало бы, что почти все траектории, начинающиеся в области, ограниченной поверхностью уровня функции Ляпунова, не выходят из этой области и за конечное время приходят в некоторую окрестность нуля. Однако подобный "факт с вероятностью 1" не может быть установлен с помощью функции Ляпунова, удовлетворяющей неравенствам (6) в Γ. Качественное различие между детерминированной и стохастической системой в этом отношении объясняется тем, что условие $\dot{V} < 0$ обеспечивает направление траектории внутрь поверхности уровня функции V, в то время как условие $LV < 0$ направляет внутрь поверхности уровня лишь усредненный (в смысле математического ожидания) "поток" траекторий, причем мера траекторий, идущих от центра притяжения, вообще говоря, не равна нулю.

Замечание 2. Если значение ε в определении окрестности U_ε достаточно мало, то из утверждения 1 следует, что систему (1) можно с практической точки зрения считать асимптотически устойчивой.

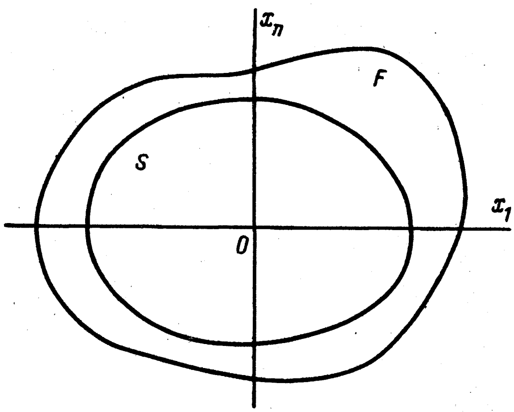

Рис. 1

Замечание 3. В замечании 1 говорилось о том, что функция Ляпунова для стохастической системы, удовлетворяющая неравенствам $V > 0$, $LV < 0$, не обеспечивает "свойств системы с вероятностью 1", а именно не дает какой-либо нетривиальной инвариантной области. Ситуация кардинально изменяется, если нам заранее известно, что у стохастической системы есть инвариантная область, включающая нулевое положение равновесия. Обозначим эту область M. Теперь, если построить функцию Ляпунова $V(x)$ в области $\Gamma = M \setminus U_\varepsilon$, удовлетворяющую в ней неравенствам (6), то тогда почти все траектории, начинаясь в Γ, за конечное время окажутся в U_ε. Действительно, согласно теореме 3.7.1 из [2] почти все траектории системы должны будут за конечное время выйти из Γ, но поскольку M – инвариантная область, то траектории с вероятностью 1 будут выходить только через внутреннюю границу Γ, т.е. попадать внутрь U_ε.

Общих условий существования инвариантной области у стохастической системы также не существует. Поэтому для получения конкретных результатов будем рассматривать систему (1) с дополнительными ограничениями, наложенными на коэффициенты диффузии. Именно, будем рассматривать такие системы, у которых диффузия вне некоторой ограниченной области, включающей положение равновесия, тождественно равна нулю. Эту область обозначим через S (рис. 1).

Хотя такое ограничение общности может показаться обременительным, оно имеет под собой физическое обоснование: например амплитуда шума в усилителе или случайное воздействие атмосферы на самолет не могут быть бесконечными.

Пусть для системы (1), удовлетворяющей указанным ограничениям, область S входит в некоторую инвариантную область F соответствующей детерминированной системы (3). Тогда F будет инвариантной и для стохастической системы (1). В этом случае, в соответствии с замечанием 3, функция Ляпунова, построенная в $F \setminus U_\varepsilon$, обеспечит диссипативность системы (1), т.е. почти все траектории, начинаясь в F, не выйдут из нее и за конечное время попадут в U_ε.

4. Построение функций Ляпунова из класса полиномов

Из результатов предыдущих разделов возникает задача построения функции Ляпунова $V(x)$, удовлетворяющей определенным соотношениям в области Γ.

Из неравенств (6) вытекает следующий факт: если в Γ существует дважды непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова $V(x)$ для системы (1), то в Γ можно также построить функцию в классе полиномов конечной степени:

$$(7)\qquad V_p(x) = \sum_{s=1}^{N_p} \alpha_s \cdot \varphi_s(x),$$

удовлетворяющую неравенствам (6) для некоторого $\Delta_1 > 0$.

Через α_s, $s = \overline{1, N_p}$ в (7) обозначены коэффициенты полинома $V_p(x)$, а через $\varphi_s(x)$, $s = \overline{1, N_p}$ – стандартные степенные мономы вида

$$\varphi_s = x_1^{k_{1s}} \cdot x_2^{k_{2s}} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_{ns}};$$

$$k_{is} \geq 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad 2 \leq \sum_{i=1}^{n} k_{is} \leq p; \quad s = \overline{1, N_p}; \quad N_p = \sum_{r=2}^{p} C_{n+r-1}^{r};$$

$$C_{n+r-1}^{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}.$$

Имеет место следующая

Теорема 2. Пусть в ограниченной замкнутой области Γ вида $\{\varepsilon \leq \|x\| \leq H\}$ для системы (1) существует дважды непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова $V(x)$, удовлетворяющая неравенствам (6). Тогда найдутся такое натуральное число $p \geq 2$ и такой полином вида (7) степени не выше p, что для $V_p(x)$ будут выполняться неравенства (6) с некоторым $\Delta_1 > 0$ при $x \in \Gamma$, т.е. полином $V_p(x)$ будет функцией Ляпунова системы (1) в области Γ.

Доказательство теоремы 2 приведено в приложении.

Таким образом, при численном построении функций Ляпунова в области Γ можно ограничиться параметрическим классом функций вида (7), представимых суммой конечного числа членов степенного ряда. Роль параметров, определяющих этот класс, играют коэффициенты отрезка степенного ряда. Задача состоит в том, чтобы определить параметры α_s, $s = \overline{1, N_p}$ искомой функции Ляпунова $V_p(x)$ из указанного класса с заданными свойствами.

Неравенства $V > 0$, $LV < 0$ для $V_p(x)$ запишутся в виде:

$$(8)\qquad \begin{aligned} V_p(x) &= \sum_{s=1}^{N_p} \alpha_s \cdot \varphi_s(x) > 0, \\ LV_p(x) &= \sum_{s=1}^{N_p} \alpha_s \cdot \psi_s(x) < 0 \end{aligned}$$

при $x \in \Gamma$, где

$$\psi_s(x) = L\varphi_s(x) = \left(\frac{\partial \varphi_s(x)}{\partial x}, b(x)\right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 \varphi_s(x)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad s = \overline{1, N_p}.$$

Без ограничения общности в силу однородности $V_p(x)$ и $LV_p(x)$ по параметрам α можно считать, что

$$\|\alpha\| = \max_{1 \leq s \leq N_p} |\alpha| \leq 1.$$

Задача построения решения неравенств (8) сводится к решению минимаксной задачи [4,5].

Алгоритм формирования минимаксной задачи в Γ для нахождения α_s и сведения этой задачи к задаче линейного программирования на сетке Γ_h, изложенный в [4,5], с надлежащими изменениями переносится на стохастический случай.

Опишем вкратце этот алгоритм. Условия существования решения неравенств (8) эквивалентны следующему минимаксному условию:

$$\text{(9)} \qquad \min_{\|\alpha\|\le 1}\ \max_{x\in\Gamma}\ \max\left\{-\sum_{s=1}^{N_p}\alpha_s\cdot\varphi_s(x),\ \sum_{s=1}^{N_p}\alpha_s\cdot\psi_s(x)\right\}<0.$$

Для проверки этого условия будем использовать сеточный метод, связанный с покрытием заданной области Γ дискретной сеткой Γ_h с шагом $h>0$. Сетка выбирается так, чтобы ее узлы равномерно располагались по всей Γ и кратчайшее расстояние между ними было постоянно и равно h. Обоснование возможности использования сеточного метода требует дополнительного исследования. Вместо условия (9) будем рассматривать условие на сетке Γ_h:

$$\text{(10)} \qquad \min_{\|\alpha\|\le 1}\ \max_{x_v\in\Gamma_h}\ \max\left\{-\sum_{s=1}^{N_p}\alpha_s\cdot\varphi_s(x_v),\ \sum_{s=1}^{N_p}\alpha_s\cdot\psi_s(x_v)\right\}<0,$$

где x_v, $v=\overline{1,N_h}$ – узлы сетки Γ_h, а N_h – их число. Задаче (10) может быть поставлена в соответствие эквивалентная задача линейного программирования. Введем в рассмотрение коэффициенты:

$$\begin{aligned}
&c_{js}=-\varphi_s(x_j), \quad 1\le j\le N_h, \quad x_j\in\Gamma_h, \quad s=\overline{1,N_p},\\
&c_{js}=\psi_s(x_{j-N_h}), \quad N_h+1\le j\le 2N_h, \quad x_{j-N_h}\in\Gamma_h, \quad s=\overline{1,N_p},
\end{aligned}$$

где $\psi_s(x)=L\varphi_s(x)$, $s=\overline{1,N_p}$. Чтобы перейти от строгих неравенств

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned}
&V_p(x)=\sum_{s=1}^{N_p}\alpha_s\cdot\varphi_s(x_v)>0,\\
&LV_p(x)=\sum_{s=1}^{N_p}\alpha_s\cdot\psi_s(x_v)<0
\end{aligned}$$

при $x_v\in\Gamma_h$ к соответствующим нестрогим, введем дополнительную переменную $z\ge 0$ и аддитивно добавим ее с нужными знаками к левым частям (11). Кроме того, вместо переменных α_s, $|\alpha_s|\le 1$, $s=\overline{1,N_p}$ введем переменные $u_s\ge 0$, $t_s\ge 0$, такие, что $\alpha_s=u_s-t_s$, $s=\overline{1,N_p}$. Тогда условие $|\alpha_s|\le 1$ заменится эквивалентным:

$$\begin{aligned}
&u_s+t_s=1,\\
&u_s\ge 0, \quad t_s\ge 0, \quad s=\overline{1,N_p}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\text{(12)} \qquad \begin{aligned}
&-z\to\min,\\
&(c_j,u)-(c_j,t)+z\le 0, \quad j=\overline{1,2N_h},\\
&u_j+t_j=1, \quad j=\overline{1,N_p},\\
&u_j\ge 0, \quad t_j\ge 0, \quad z\ge 0,
\end{aligned}$$

где $c_j=\begin{pmatrix}c_{j1}\\ \vdots\\ c_{jN_p}\end{pmatrix}$, $\quad u=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_{N_p}\end{pmatrix}$, $\quad t=\begin{pmatrix}t_1\\ \vdots\\ t_{N_p}\end{pmatrix}$.

Решение задачи (12) существует, поскольку допустимое множество точек (α, z) в задаче (12) замкнуто и ограничено. В [4,5] показывается, что решение минимаксного неравенства (10) эквивалентно решению задачи линейного программирования (12), если оптимальное значение целевой функции строго отрицательно.

Задача линейного программирования может быть решена стандартным симплекс-методом с использованием ЭВМ.

В заключение заметим, что описанный алгоритм не требует выполнения условий ограниченности диффузии, описанных в разделе 3.

Отметим также, что все изложенные рассуждения могут быть с соответствующими изменениями отнесены и к дискретным стохастическим системам вида

$$X_{s+1} = F(X_s, \omega).$$

Роль $LV(x)$ в этом случае играет математическое ожидание первой разности функции $V(x)$ в силу системы.

5. Примеры

В соответствии с изложенным в предыдущем разделе алгоритмом для системы

$$\begin{aligned} dx &= ydt + x^2 dW_t, \\ dy &= (-6x - y - 3x^2)dt + ydW_t \end{aligned}$$

в области $\Gamma = \{-1 \le x \le 0,\ 5;\ -1 \le y \le 1\} \setminus U_\varepsilon$ при $\varepsilon = 0,01$ с помощью ЭВМ была построена функция Ляпунова из класса полиномов третьей степени:

$$V = 0,24x^3 - 0,04x^2y - 0,01xy^2 + x^2 + 0,09xy + 0,17y^2.$$

Для соответствующей детерминированной системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -6x - y - 3x^2 \end{aligned}$$

в той же области Γ также в классе полиномов третьей степени была построена функция Ляпунова:

$$V = 0,19x^3 - 0,28x^2y - 0,05xy^2 + 0,07y^3 + x^2 + 0,24xy + 0,27y^2.$$

На рис. 2 приведены максимальные поверхности уровня этих функций, вписанные в область Γ. Интересным представляется тот факт, что область, образуемая максимальной поверхностью уровня для стохастической системы, оказывается больше (в смысле знака включения), чем область для детерминированной системы. И хотя функции Ляпунова были построены в классе полиномов всего лишь третьей степени, можно предположить, что наличие диффузии "стабилизирует" систему.

В качестве второго примера рассматривалась система третьего порядка:

$$\begin{aligned} dx &= ydt + x^2 dW_t, \\ dy &= zdt, \\ dz &= (-10x - 6y - z - 3x^2)dt. \end{aligned}$$

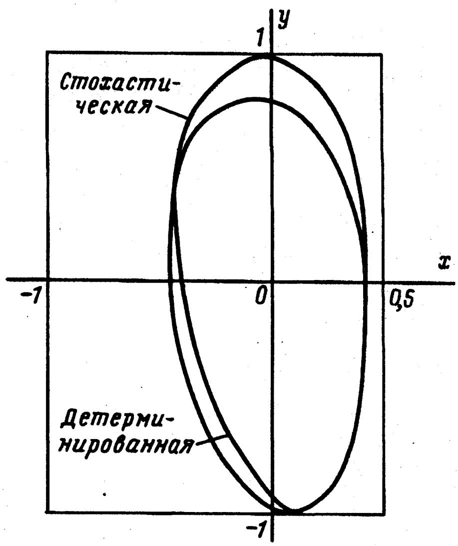

Рис. 2

Для нее в области $\Gamma = \{|x| \le 1\} \backslash U_\varepsilon$ $(\varepsilon = 0,01)$ была построена функция Ляпунова из класса квадратичных форм:

$$V = x^2 - 0,21xy + 0,45xz + 0,35y^2 + 0,02yz + 0,11z^2.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. По следствию 3.1 из теоремы 5.3 в [3]

$$P_x \left\{ \sup_{t>0} V(X^x(t)) \ge m \right\} \le \frac{\gamma}{m}, \tag{П.1}$$

т.е. мера траекторий, остающихся внутри поверхности уровня $V(x) = m$, не меньше, чем $1 - \dfrac{\gamma}{m}$. По теореме 7.1 из [2], почти все траектории решения (1), начинающегося в Γ, за конечное время выйдут из Γ, а так как мера остающихся в $\Phi_m \cup U_\varepsilon$ траекторий не меньше $1 - \dfrac{\gamma}{m}$, то мера траекторий, входящих за конечное время в U_ε, также не меньше $1 - \dfrac{\gamma}{m}$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Воспользуемся обобщением теоремы Вейерштрасса [7], согласно которому для дважды непрерывно дифференцируемой функции $V(x)$ на компакте Γ по любому положительному числу $v > 0$ найдутся натуральное число $p = p(v)$ и полином $V_p(x)$ степени не выше p, такие, что в метрике пространства $C^2(\Gamma)$ будет выполнено соотношение:

$$\|V_p(x) - V(x)\|_{C^2(\Gamma)} = \max_{x\in\Gamma} |V(x) - V_p(x)| + \max_{x\in\Gamma} \left\| \frac{\partial V(x)}{\partial x} - \frac{\partial V_p(x)}{\partial x} \right\| + \tag{П.2}$$
$$+ \max_{x\in\Gamma} \left\| \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 V_p(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right\| < v.$$

Отсюда и из (6) имеем:

$$V_p(x) = V(x) + (V_p(x) - V(x)) \geq V(x) - |V_p(x) - V(x)| \geq \Delta - v > 0$$

при $0 < v < \Delta$. Функции $b(x)$ и $\sigma(x)$ непрерывны на компакте Γ, а значит, ограничены на нем, откуда следует $\|b(x)\| \leq M$, $\|\sigma(x)\| \leq N$, $x \in \Gamma$. Функции $LV(x)$ и $LV_p(x)$ связаны соотношением:

$$LV_p(x) = LV(x) + \left(\frac{\partial(V_p - V)}{\partial x}, b(x)\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2(V_p - V)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Отсюда, из (6) и (П.2) получаем

$$LV_p(x) \leq -\Delta + n \cdot \left\|\frac{\partial(V_p - V)}{\partial x}\right\| \cdot \|b(x)\| + \frac{1}{2}n^2 \cdot \left\|\frac{\partial^2(V_p - V)}{\partial x_i \partial x_j}\right\| \cdot \|A(x)\| \leq$$

$$\leq -\Delta + nvM + \frac{1}{2}n^2 vN < 0, \text{ если } 0 < v < \frac{\Delta}{nM + \frac{1}{2}n^2 N},$$

где n – размерность системы (1). Выбор чисел v и Δ_1 из условий

$$0 < v < \frac{\Delta}{nM + \frac{1}{2}n^2 N}; \quad \Delta_1 = \min(\Delta - v,\ \Delta - nvM - n^2 Nv/2)$$

завершает доказательство этой теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кац И.Я., Красовский Н.Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. матем. и мех. 1960. 27. № 5. С. 809 – 823.
2. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.
3. *Кушнер Г.Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. М.: Мир, 1969.
4. *Dyachenco I.V., Molchanov A.P., Pyatnitsky E.S.* Lyapunov's functions method in a subsystem of stability analysis for CAD of nonlinear control system // Mathematics & computer in simulation, 1991. V. 33.
5. *Богатырев А.В., Каменецкий В.А., Молчанов А.П., Морозов М.В., Пятницкий Е.С.* Методы анализа устойчивости нелинейных систем на ЭВМ. Препринт. М.: Ин-т проблем управления, 1989.
6. *Пятницкий Е.С.* Автоматизированные подсистемы анализа и синтеза нелинейных систем управления движением // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1990. № 5. С. 74 – 80.
7. *Валле-Пуссен Ш.Ж.* Курс анализа бесконечно малых. Т. 2 М.; Л.: Гостехиздат, 1946.

Поступила в редакцию 20.08.93