

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Назаров, Н. М. Юревич, Исследование явления бистабильности в сети с протоколом АЛОХА для конечного числа станций, *Автомат. и телемех.*, 1996, выпуск 9, 91–100

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.133.133.18

20 ноября 2024 г., 01:59:58



7. *Малинковский Ю.В.* Критерий точечной независимости состояний узлов в открытой стационарной марковской сети обслуживания с одним классом заявок // Теория вероятностей и ее применения. 1990. Т. 35. Вып. 4. С. 779–784.
8. *Harrison P.G.* Transient behaviour of queueing networks // J. Appl. Prob. 1981. V. 18. № 2. P. 482–490.
9. *Матальцкий М.А.* Метод нахождения нестационарных вероятностей состояний марковских сетей массового обслуживания // Проблемы передачи информации. 1994. Т. 30. Вып. 2. С. 104–107.
10. *Матальцкий М.А.* О нахождении вероятностей состояний марковских сетей массового обслуживания в переходном режиме // Автоматика и вычисл. техника. 1994. № 3. С. 12–15.
11. *Kingman J.E.C.* Markov population processes // J. Appl. Prob. 1969. V. 6. P. 1–18.
12. *Матальцкий М.А.* Исследование стохастических моделей вычислительных систем и сетей в нестационарном режиме и в условиях большой нагрузки. М., 1989. – Деп. в ВИНТИ, № 1534-B89.

Поступила в редакцию 17.08.95

УДК 519.216

© 1996 г. А. А. НАЗАРОВ, д-р техн. наук,
Н. М. ЮРЕВИЧ

(Сибирский физико-технический институт при ТГУ, Томск)

ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ БИСТАБИЛЬНОСТИ В СЕТИ С ПРОТОКОЛОМ АЛОХА ДЛЯ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА СТАНЦИЙ

Рассматривается спутниковая сеть связи с протоколом случайного множественного доступа АЛОХА для случая, когда число абонентских станций конечно. Построена математическая модель сети в виде марковской системы массового обслуживания. Изучено явление бистабильности сети.

1. Введение

Протокол случайного множественного доступа АЛОХА предназначен для передачи сообщений через спутниковую сеть связи. Такой вид связи описывается многими авторами [1, 2]. Существуют различные способы применения спутникового канала для передачи данных [2]. Изучение этих способов привело к появлению таких протоколов множественного доступа, как чистая АЛОХА, синхронная АЛОХА, АЛОХА с резервированием [2, 3] и т.д. В работе [4] исследована несинхронная система АЛОХА на устойчивость. В [5] приводятся основные методы анализа производительности и вероятностно-временных характеристик сетей с протоколами случайного множественного доступа, в том числе и с протоколом асинхронная АЛОХА. Там же обсуждаются проблемы устойчивости и анализ устойчивости методами теории катастроф. Также были проведены исследования протокола чистая АЛОХА для пакетов фиксированной длины [2, 3]. Но исследования можно продолжить и для случая сообщений различной длины. Вариант бесконечного числа абонентских станций рассмотрен в работе [6] для протокола АЛОХА без повторной передачи искаженных сообщений и в работе [7] для динамического протокола АЛОХА с повторной передачей искаженных сообщений. В предложенной статье рассматривается протокол

АЛОХА с повторной передачей искаженных сообщений для сети с конечным числом однотипных станций. Применение метода, описанного в статье, позволяет определить вероятности состояний систем связи, а значит, и всевозможные вероятностно-временные характеристики сетей.

Рассмотрим спутниковую сеть связи, абонентские станции (АС) которой расположены в географически разнесенных точках. Связь между АС осуществляется через геостационарный спутник-ретранслятор. Каждая АС посылает сообщение в момент его поступления независимо от наличия передачи от других станций. Скорость передачи сообщения равна физической пропускной способности спутникового канала. Спутник работает как простой ретранслятор: повторяет в широкоэвещательном режиме то, что он принимает, направляя передачу обратно к Земле. Это транслируемое сообщение принимают все станции, и каждая АС выделяет пакеты, адресованные ей. Заметим, что все пользователи передают сообщения на одной и той же частоте f_1 (т.е. коллективно используют канал как единое средство), а прием ведут на другой, но общей для всех частоте f_2 . Так как спутник выполняет роль ретранслятора, всегда, когда передача одного пользователя достигает спутника во время трансляции сообщения некоторого другого пользователя, обе передачи накладываются и "разрушают" друг друга. Если спустя время распространения стало известно об искажении сообщений, то принимающие АС "сбрасывают" эти искаженные сообщения, а передающие АС должны произвести повторную передачу. Заметим, что повторная передача должна происходить со случайной задержкой, чтобы разнести во времени вступившие в конфликт сообщения.

2. Построение математической модели

Пусть каждая из N АС генерирует пуассоновский поток неповторных сообщений интенсивности λ/N . Число АС, имеющих в момент времени t искаженные ранее сообщения для повторной передачи, обозначим через $i(t)$. Число АС, осуществляющих в момент t передачу (как исходных, так и повторных сообщений), обозначим через $\nu(t)$. Тогда интенсивность объединенного потока неповторных сообщений от всех АС равна $\lambda(N - i(t) - \nu(t))/N$. Спутник моделируется как обслуживающий прибор.

Каждое требование в момент поступления в систему встает на прибор и начинает обслуживаться. На приборе в момент времени t одновременно может находиться $\nu(t)$ требований ($\nu(t) = 0, 1, \dots, N$). Обслуживание экспоненциальное с параметром μ , т.е. функция $B(x)$ распределения времени обслуживания $B(x) = 1 - \exp(-\mu x)$. Если за время обслуживания какого-либо требования другие заявки не обслуживались, то исходное требование считается обслуженным успешно и покидает систему. Далее успешно обслуженное требование не рассматривается. В противном случае, т.е. когда одновременно обслуживались два или более требований, происходит конфликт. В [6] рассмотрен вариант функционирования сети без повторной передачи искаженных сообщений: найдены вероятность успешной передачи сообщений и такое распределение времени обслуживания, при котором эта вероятность является наибольшей. В [7] рассмотрен динамический протокол с повторной передачей искаженных сообщений. В этом случае в структурную схему сети добавлен новый элемент – источник повторных вызовов (ИПВ), в который переходит заявка, попавшая в конфликт. Здесь, как уже сказано выше, число станций, имеющих сообщение для повторной передачи, обозначено $i(t)$. Эти станции передают сообщения через экспоненциально (с параметром σ/N) распределенную задержку.

3. Исследование математической модели

Надо отметить, что если на приборе стоит одно единственное требование, то необходимо знать, было ли оно ранее искажено. Для этого введем величину $k(t)$, принимающую значения:

$$k(t) = \begin{cases} 1, & \text{если стоящее на приборе требование} \\ & \text{до момента } t \text{ не было искажено,} \\ 2 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Процесс $\{i(t), \nu(t), k(t)\}$ является марковским, распределение которого

$$\begin{aligned} P_0(i, t) &= P(i(t) = i, \nu(t) = 0), \\ Y(i, t) &= P(i(t) = i, \nu(t) = 1, k(t) = 1), \\ H(i, t) &= P(i(t) = i, \nu(t) = 1, k(t) = 2), \\ P_\nu(i, t) &= P(i(t) = i, \nu(t) = \nu), \quad \nu = 2, 3, \dots, N, \\ P_1(i, t) &= Y(i, t) + H(i, t) \end{aligned}$$

в стационарном режиме удовлетворяет системе уравнений

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \left(\lambda \frac{N-i}{N} + \frac{i\sigma}{N} \right) P_0(i) &= \mu Y(i) + \mu H(i-1), \\ \left(\lambda \frac{N-i-1}{N} + \frac{i\sigma}{N} + \mu \right) Y(i) &= \lambda \frac{N-i}{N} P_0(i) + \frac{(i+1)\sigma}{N} P_0(i+1), \\ \left(\lambda \frac{N-i-1}{N} + \frac{i\sigma}{N} + \mu \right) H(i) &= 2\mu P_2(i-1), \\ \left(\lambda \frac{N-i-\nu}{N} + \frac{i\sigma}{N} + \nu\mu \right) P_\nu(i) &= \lambda \frac{N-i-\nu+1}{N} P_{\nu-1}(i) + \\ &+ \frac{(i+1)\sigma}{N} P_{\nu-1}(i+1) + (\nu+1)\mu P_{\nu+1}(i-1), \quad \nu = 2, 3, \dots, N. \end{aligned}$$

Систему (3.1) будем решать асимптотическим методом [8] при $N \rightarrow \infty$. Для этого сделаем замену переменных: $x = i\varepsilon$, $\varepsilon = 1/N$, $P_\nu(i) = P_\nu(x)$, $Y(i) = Y(x)$, $H(i) = H(x)$, $P_0(i) = P_0(x)$, $\pi(x) = \sum_{\nu \geq 0} P_\nu(x)$. В результате замены производится переход от дискретной переменной $i = 0, 1, \dots, N$ к непрерывной переменной x ($0 \leq x \leq 1$). Тогда система (3.1) примет вид

$$(3.2) \quad \begin{aligned} (\rho(1-x) + \gamma x) P_0(x) &= Y(x) + H(x-\varepsilon), \\ (\rho(1-x-\varepsilon) + \gamma x + 1) Y(x) &= \rho(1-x) P_0(x) + \gamma(x+\varepsilon) P_0(x+\varepsilon), \\ (\rho(1-x-\varepsilon) + \gamma x + 1) H(x) &= 2P_2(x-\varepsilon), \\ (\rho(1-x-\nu\varepsilon) + \gamma x + \nu) P_\nu(x) &= \rho(1-x-(\nu-1)\varepsilon) P_{\nu-1}(x) + \\ &+ \gamma(x+\varepsilon) P_{\nu-1}(x+\varepsilon) + (\nu+1) P_{\nu+1}(x-\varepsilon), \quad \nu = 2, 3, \dots, N, \end{aligned}$$

здесь $\rho = \lambda/\mu$, $\gamma = \sigma/\mu$.

В приложении 1 проведено подробное решение системы (3.2) и выведены формулы (П.2) – (П.6). Можно показать, что уравнение (П.5) имеет один корень x в случаях:

- $\rho > \gamma$ для любых ρ и γ ;
- $\rho < \gamma$ для $\gamma \leq \gamma^* \cong 2,801$;
- $\rho < \gamma$, $\gamma > \gamma^*$, но $\rho < \rho_2$ или $\rho > \rho_1$.

Два корня возможны при $\rho < \gamma$, $\gamma > \gamma^*$, $\rho = \rho_1$ или $\rho = \rho_2$. Здесь ρ_1 и ρ_2 – некоторые значения ρ , определяемые уравнением (П.5). Наконец, при $\rho < \gamma$, $\gamma > \gamma^*$, $\rho_2 < \rho < \rho_1$ уравнение (П.5) имеет три корня.

4. Исследование явления бистабильности

Рассмотрим случай, когда уравнение (П.5) имеет более одного корня. Но в окрестности только некоторых из них флуктуирует значение случайного процесса $x(t) = \varepsilon i(t)$. Такие корни будем называть точками стабилизации сети связи. Те точки, в окрестности которых не происходит стабилизации сети, будем называть лишними корнями. Для выявления лишних корней рассмотрим отклонение $y(t)$ процесса $x(t)$ от величины x_0 , являющейся корнем уравнения (П.5).

Пусть $y(t) = (i(t) - x_0/\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}$. Найдем распределение отклонения $y(t)$, для этого в системе (3.1) произведем замену переменных: $y = (i - x_0/\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}$, $P_\nu(i) = \pi_\nu(y)$, $Y(i) = \pi_{1Y}(y)$, $H(i) = \pi_{1H}(y)$, $P_0(i) = \pi_0(y)$, $\pi(y) = \sum_{\nu \geq 0} \pi_\nu(y)$. Тогда система (3.1) примет вид:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda(1 - x_0 - y\sqrt{\varepsilon}) + \sigma(x_0 + y\sqrt{\varepsilon})) \pi_0(y) = \mu\pi_{1Y}(y) + \mu\pi_{1H}(y - \sqrt{\varepsilon}), \\
 & (\lambda(1 - x_0 - y\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon) + \sigma(x_0 + y\sqrt{\varepsilon}) + \mu) \pi_{1Y}(y) = \\
 & = (\lambda(1 - x_0 - y\sqrt{\varepsilon})) \pi_0(y) + \sigma(x_0 + y\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon) \pi_0(y + \sqrt{\varepsilon}), \\
 (4.1) \quad & (\lambda(1 - x_0 - y\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon) + \sigma(x_0 + y\sqrt{\varepsilon}) + \mu) \pi_{1H}(y) = 2\mu\pi_2(y - \sqrt{\varepsilon}), \\
 & (\lambda(1 - x_0 - y\sqrt{\varepsilon} - \nu\varepsilon) + \sigma(x_0 + y\sqrt{\varepsilon}) + \nu\mu) \pi_\nu(y) = \\
 & = \lambda(1 - x_0 - y\sqrt{\varepsilon} - (\nu - 1)\varepsilon) \pi_{\nu-1}(y) + \sigma(x_0 + y\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon) \pi_{\nu-1}(y + \sqrt{\varepsilon}) + \\
 & + (\nu + 1)\mu\pi_{\nu+1}(y - \sqrt{\varepsilon}), \quad \nu = 2, 3, \dots, N.
 \end{aligned}$$

Приложение 2 содержит решение системы (4.1), откуда видно, что если величина κ_1/κ_2 не отрицательна и не равняется бесконечности, то $\pi(y)$ имеет вид нормального распределения с нулевым средним и дисперсией $D = \kappa_1/\kappa_2$. Очевидно, что $\kappa_1 > 0$ для всех $G_0 > 0$. Тогда для выполнения свойств дисперсии необходима строгая положительность величины κ_2 . Но κ_2 совпадает с производной по G функции $\Phi(G)$, которая имеет вид левой части уравнения (П.5)

$$\Phi(G) = \frac{G}{G+1} e^{-G} + G \frac{\rho}{\gamma - \rho} - \frac{\gamma\rho}{\gamma - \rho}$$

и определяет его корни. Следовательно, корни уравнения (П.5), лежащие на убывающей части кривой $\Phi(G)$ или являющиеся точками экстремума, не будут точками стабилизации. Итак, сеть имеет не более двух точек стабилизации, в окрестности которых флуктуируют значения процесса $x(t)$. Таким образом, наблюдается явление бистабильности: система какое-то время находится в окрестности одной из точек стабилизации, затем случайным образом переходит в окрестность другой точки стабилизации, затем опять случайным образом возвращается в окрестность прежней точки стабилизации и т.д. Таким образом, если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения (П.5) ($x_1 < x_2 < x_3$), то x_1 и x_3 являются точками стабилизации и в их окрестностях распределение величины отклонения y имеет вид (П.14), а корень x_2 не будет являться точкой стабилизации и в окрестности точки x_2 распределение величины y имеет вид

$$\pi_2(y) = C \exp \left\{ -\frac{y^2}{2D_2} \right\},$$

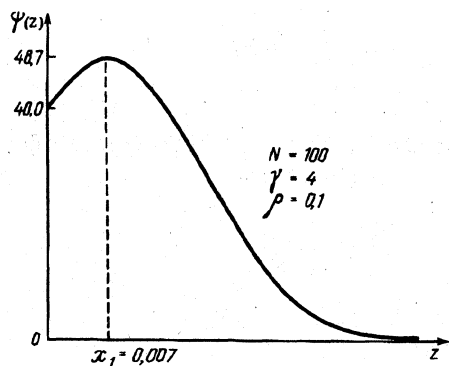


Рис. 1

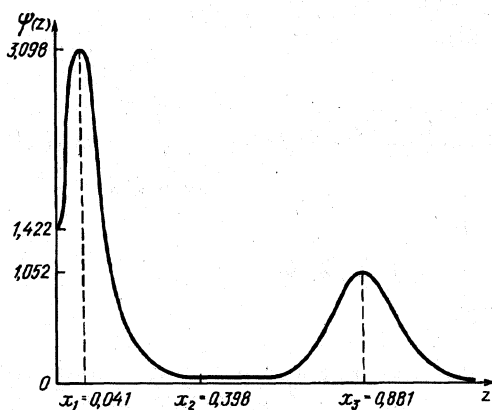


Рис. 2

где $D_2 > 0$. Поэтому плотность распределения величины отклонения y лучше записать в виде шестипараметрической функции $\varphi(z)$:

$$(4.2) \quad \varphi(z) = \begin{cases} C_1 \exp \left\{ -\frac{(z-x_1)^2}{2D_1\varepsilon} \right\} = N_1(z), & 0 \leq z \leq a, \\ C_2 \exp \left\{ \frac{(z-x_2)^2}{2D_2\varepsilon} \right\} = N_2(z), & a \leq z \leq b, \\ C_3 \exp \left\{ -\frac{(z-x_3)^2}{2D_3\varepsilon} \right\} = N_3(z), & b \leq z \leq 1. \end{cases}$$

Здесь произведен переход от переменной y к переменной z по формуле $y = (z - x_i)/\sqrt{\varepsilon}$.

На самом деле функция $\varphi(z)$ имеет одиннадцать параметров: $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3, x_1, x_2, x_3, a$ и b . Но неизвестные параметры C_1, C_2, C_3, a и b можно выразить через известные x_1, x_2, x_3 и D_1, D_2, D_3 из естественного предположения гладкости и непрерывности функции $\varphi(z)$, а также из условия нормировки. Эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} N_1(a) &= N_2(a), & N_2(b) &= N_3(b), \\ N_1'(a) &= N_2'(a), & N_2'(b) &= N_3'(b), \end{aligned}$$

$$\int_0^a N_1(z) dz + \int_a^b N_2(z) dz + \int_b^1 N_3(z) dz = 1.$$

Подставляя явный вид функций $N_j(z)$ ($j = 1, 2, 3$) в эти формулы, можно получить выражения для неизвестных параметров:

$$a = \frac{x_2 D_1 + x_1 D_2}{D_1 + D_2}, \quad b = \frac{x_3 D_2 + x_2 D_3}{D_2 + D_3},$$

$$C_1 = C_2 \exp \left\{ \frac{(a - x_2)^2}{2D_2 \epsilon} + \frac{(a - x_1)^2}{2D_1 \epsilon} \right\},$$

$$C_3 = C_2 \exp \left\{ \frac{(b - x_2)^2}{2D_2 \epsilon} + \frac{(b - x_3)^2}{2D_3 \epsilon} \right\},$$

$$C_2^{-1} = \exp \left\{ \frac{(a - x_2)^2}{2D_2 \epsilon} + \frac{(a - x_1)^2}{2D_1 \epsilon} \right\} \sqrt{\epsilon D_1} \int_{-x_1 \sqrt{\epsilon D_1}}^{(a-x_1)\sqrt{\epsilon D_1}} \exp(-t^2/2) dt +$$

$$+ \exp \left\{ \frac{(b - x_2)^2}{2D_2 \epsilon} + \frac{(b - x_3)^2}{2D_3 \epsilon} \right\} \sqrt{\epsilon D_3} \int_{(b-x_3)\sqrt{\epsilon D_3}}^{(1-x_1)\sqrt{\epsilon D_3}} \exp(-t^2/2) dt +$$

$$+ \sqrt{\epsilon D_2} \int_{(a-x_2)\sqrt{\epsilon D_2}}^{(b-x_2)\sqrt{\epsilon D_2}} \exp(-t^2/2) dt.$$

Для примера рассмотрим случай, когда $N = 100$, $\rho = 0,1$, $\gamma = 4$. При этом уравнение (П.5) имеет только один корень, т.е. явление бистабильности не возникает. График функции $\pi(y)$ для указанных значений параметров приведен на рис. 1. Если изменить значения параметров, например взять $\rho = 0,19$, то уравнение (П.5) уже будет иметь три корня. В этом случае возникает явление бистабильности (рис. 2). Но точка стабилизации x_3 является нежелательной, так как в ней характеристики сети хуже, чем в точке x_1 . Характеристики для обеих точек стабилизации приведены в таблице. Здесь $S = \rho(1 - x)$ - производительность сети, т.е. средний график успешно переданных сообщений за единицу времени, $T = xN/\rho(1 - x)$ - среднее время доставки сообщения, $K = \gamma x/\rho(1 - x)$ - среднее число повторных попыток до успешной передачи сообщения. Избежать нежелательной точки стабилизации можно двумя способами: либо уменьшать загрузку ρ , либо уменьшать γ .

ρ	0,1	0,19	
x	0,007	0,041	0,882
G	0,082	0,348	3,552
S	0,099	0,182	0,022
T	6,97	22,69	3946
K	0,279	0,908	157,9

5. Заключение

Исследован протокол случайного множественного доступа АЛОХА с конечным числом станций. Найдена асимптотическая плотность распределения числа требований в ИПВ $\pi(x)$, которая имеет вид дельта-функции или линейной комбинации двух (в силу бистабильности) дельта-функций с ядрами в точках стабилизации, определяемых уравнением (П.5). Кроме того, найдена плотность распределения значений отклонения $y(t)$ процесса $x(t)$ от величин x_1, x_2, x_3 , являющихся корнями уравнения (П.5), которая имеет вид шестипараметрической функции $\varphi(z)$. Проведено сравнение характеристик сети в разных точках стабилизации. Предложены методы избавления от нежелательной точки стабилизации.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Получим вид решения системы (3.2), которую будем решать в два этапа. На первом этапе положим $\varepsilon = 0$, тогда система (3.2) перейдет в систему

$$(П.1) \quad \begin{aligned} GP_0(x) &= P_1(x), \\ (G + \nu)P_\nu(x) &= GP_{\nu-1}(x) + (\nu + 1)P_{\nu+1}(x), \quad \nu = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned}$$

решение которой имеет вид

$$(П.2) \quad \begin{aligned} P_0(x) &= e^{-G}\pi(x), \quad P_\nu(x) = \frac{G^\nu}{\nu!}e^{-G}\pi(x), \quad \nu \geq 1, \\ Y(x) &= \frac{G}{G+1}e^{-G}\pi(x), \quad H(x) = \frac{G^2}{G+1}e^{-G}\pi(x), \end{aligned}$$

$$\text{где } \pi(x) = \sum_{\nu=0}^N P_\nu(x).$$

Осталось найти вид функции $\pi(x)$. Для этого перейдем ко второму этапу.

На втором этапе в системе (3.2) все функции с аргументом $x \pm \varepsilon$ разложим в ряд по степеням ε , ограничиваясь слагаемыми порядка ε , получим систему

$$\begin{aligned} (\rho(1-x) + \gamma x)P_0(x) &= P_1(x) - \varepsilon H'(x), \\ (\rho(1-x) + \gamma x + 1)Y(x) &= (\rho(1-x) + \gamma x)P_0(x) + \varepsilon[\rho Y(x) + \gamma(xP_0(x))'], \\ (\rho(1-x) + \gamma x + 1)H(x) &= 2P_2(x) + \varepsilon[\rho H(x) - 2P_2'(x)], \\ (\rho(1-x) + \gamma x + \nu)P_\nu(x) &= (\rho(1-x) + \gamma x)P_{\nu-1}(x) + (\nu + 1)P_{\nu+1}(x) + \\ &+ \varepsilon[\rho\nu P_\nu(x) - \rho(\nu - 1)P_{\nu-1}(x) + \gamma(xP_{\nu-1}(x))' - (\nu + 1)P_{\nu+1}'(x)]. \end{aligned}$$

Сложив все уравнения системы, получим

$$(П.3) \quad \varepsilon \frac{d}{dx} \left[\pi(x)\gamma x + Y(x) - \sum_{\nu \geq 1} \nu P_\nu(x) \right] = 0.$$

В это уравнение входят три неизвестные функции: $\pi(x)$, $Y(x)$, $\sum \nu P_\nu(x)$. Выразим функции $Y(x)$ и $\sum \nu P_\nu(x)$ через $\pi(x)$, используя формулы (П.2):

$$Y(x) = \frac{G}{G+1}e^{-G}\pi(x), \quad \sum_{\nu=1}^N \nu P_\nu(x) = \sum_{\nu=1}^N \nu \frac{G^\nu}{\nu!}e^{-G}\pi(x) = G\pi(x).$$

Подставим эти выражения в уравнение (П.3):

$$\frac{d}{dx} \left[\pi(x) \left(\frac{G}{G+1}e^{-G} + G \frac{\rho}{\gamma - \rho} - \frac{\gamma\rho}{\gamma - \rho} \right) \right] = 0$$

или

$$(П.4) \quad \pi(x) \left[\frac{G}{G+1} e^{-G} + G \frac{\rho}{\gamma - \rho} - \frac{\gamma \rho}{\gamma - \rho} \right] = C,$$

где C – произвольная постоянная. Необходимо найти константу C . Нетрудно заметить, что при $x = 0$ выражение в квадратных скобках не положительно, следовательно, $C \leq 0$, а при $x = 1$ $C \geq 0$. Итак, $C = 0$. Таким образом, произведение двух функций равно нулю, следовательно, $\pi(x)$ может принимать какое-либо ненулевое значение лишь в тех точках, в которых выражение в скобках равно нулю. Получили функцию $\pi(x)$, везде равную нулю, за исключением точек, являющихся корнями уравнения

$$(П.5) \quad \frac{G}{G+1} e^{-G} + G \frac{\rho}{\gamma - \rho} - \frac{\gamma \rho}{\gamma - \rho} = 0.$$

Кроме того, должно выполняться условие нормировки $\int_0^1 \pi(x) dx = 1$. Этим условиям удовлетворяет лишь функция вида

$$(П.6) \quad \pi(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \delta(x - x_k),$$

где $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$, n – число корней уравнения (П.5), $\alpha_k \geq 0$, x_k – корни уравнения (П.5).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Решение системы (4.1) в некоторой степени аналогично решению системы (3.2), но проводится в три этапа.

На первом этапе, положив $\varepsilon = 0$, решение системы (4.1) найдем в виде

$$(П.7) \quad \begin{aligned} \pi_0(y) &= e^{-G} \pi(y), \quad \pi_\nu(y) = \frac{G^\nu}{\nu!} e^{-G} \pi(y), \quad \nu \geq 1, \\ \pi_{1y}(y) &= \frac{G}{G+1} e^{-G} \pi(y), \quad \pi_{1H}(y) = \frac{G^2}{G+1} e^{-G} \pi(y), \end{aligned}$$

где $G = \rho(1-x) + \gamma x$.

Перейдем ко второму этапу. В системе (4.1) все функции с аргументом $y \pm \sqrt{\varepsilon}$ разложим в ряд по степеням $\sqrt{\varepsilon}$, ограничиваясь слагаемыми порядка $\sqrt{\varepsilon}$:

$$(П.8) \quad \begin{aligned} G\pi_0(y) &= \pi_1(y) + \sqrt{\varepsilon} [(\rho - \gamma)y\pi_0(y) - \pi'_{1H}(y)], \\ (G+1)\pi_{1y}(y) &= G\pi_0(y) + \sqrt{\varepsilon} [(\rho - \gamma)y\pi_{1y}(y) + (\rho - \gamma)y\pi_0(y) + \gamma x\pi'_0(y)], \\ (G+1)\pi_{1H}(y) &= 2\pi_2(y) + \sqrt{\varepsilon} [(\rho - \gamma)y\pi_{1H}(y) - 2\pi'_2(y)], \\ (G+\nu)\pi_\nu(y) &= G\pi_{\nu-1}(y) + (\nu+1)\pi_{\nu+1}(y) + \sqrt{\varepsilon} [(\rho - \gamma)y\pi_\nu(y) - \\ & - (\rho - \gamma)y\pi_{\nu-1}(y) + \gamma x\pi'_{\nu-1}(y) - (\nu+1)\pi'_{\nu+1}(y)], \quad \nu \geq 2. \end{aligned}$$

Подставляя в слагаемые, содержащие $\sqrt{\varepsilon}$, выражения, найденные на первом этапе, получим систему, решение которой с помощью производящей функции $F(z) = \pi_0(y) + z\pi_1(y) + \dots$ запишем в виде

$$(П.9) \quad F(z) = \pi_0(y)e^{Gz} + \sqrt{\varepsilon} e^{G(z-1)} [bz + e^{-G} a\phi(z)],$$

где $\phi(z) = \int_{1-2}^1 \frac{1 - e^{Gt}}{t} dt$. Нетрудно заметить, что $F(1) = \pi(y)$. Из этого условия находится $\pi_0(y)$:

$$(II.10) \quad \pi_0(y) = \pi(y)e^{-G} - \sqrt{\varepsilon}e^{-G} [b + e^{-G}a\phi(1)].$$

Формулы (II.9) и (II.10) полностью определяют решение системы (II.8) на втором этапе.

На третьем этапе в системе (4.1) все функции разложим в ряд по степеням $\sqrt{\varepsilon}$, ограничиваясь слагаемыми порядка ε , получим

$$(II.11) \quad \begin{aligned} G\pi_0(y) &= \pi_1(y) + \sqrt{\varepsilon}[(\rho - \gamma)y\pi_0(y) - \pi'_{1H}(y)] + \frac{\varepsilon}{2}\pi''_{1H}(y), \\ (G+1)\pi_1(y) &= G\pi_0(y) + 2\pi_2(y) + \sqrt{\varepsilon}[(\rho - \gamma)y\pi_1(y) - (\rho - \gamma)y\pi_0(y) + \gamma x\pi'_0(y) - \\ &- 2\pi'_2(y)] + \varepsilon \left[\rho\pi_1(y) + \gamma\pi_0(y) + \gamma y\pi'_0(y) + \frac{1}{2}\gamma x\pi''_0(y) + \pi''_2(y) \right], \\ (G + \nu)\pi_\nu(y) &= G\pi_{\nu-1}(y) + (\nu + 1)\pi_{\nu+1}(y) + \\ &+ \sqrt{\varepsilon}[(\rho - \gamma)y\pi_\nu(y) - (\rho - \gamma)y\pi_{\nu-1}(y) + \gamma x\pi'_{\nu-1}(y) - (\nu + 1)\pi'_{\nu+1}(y)] + \\ &+ \varepsilon \left[\nu\rho\pi_\nu(y) - (\nu - 1)\rho\pi_{\nu-1}(y) + \gamma\pi_{\nu-1}(y) + \gamma y\pi'_{\nu-1}(y) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\gamma x\pi''_{\nu-1}(y) + \frac{\nu + 1}{2}\pi''_{\nu+1}(y) \right]. \end{aligned}$$

Просуммировав все уравнения системы (II.11), получим равенство для нахождения $\pi(y)$:

$$(II.12) \quad \frac{\varepsilon}{2} \left[2\gamma(y\pi(y))' + \gamma x\pi''(y) + \sum_{\nu \geq 1} \nu\pi''_\nu(y) - \pi''_{1Y}(y) \right] + \\ + \sqrt{\varepsilon} \left[\gamma x\pi'(y) - \sum_{\nu \geq 1} \nu\pi'_\nu(y) + \pi'_{1Y}(y) \right] = 0.$$

В уравнение (II.12) входят три неизвестные функции: $\pi(y)$, $\sum \nu\pi_\nu(y)$ и $\pi_{1Y}(y)$. Поэтому для нахождения $\pi(y)$ функции $\sum \nu\pi_\nu(y)$ и $\pi_{1Y}(y)$ выразим через $\pi(y)$, используя результаты второго этапа. Подставляя найденные выражения в (II.12), для $\pi(y)$ получим линейное дифференциальное уравнение

$$(II.13) \quad \varkappa_1\pi''(y) + \varkappa_2(y\pi(y))' = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= \left(\frac{G_0}{G_0 + 1} e^{-G_0} \right)^2 (\phi(1) + 1) + \frac{G_0^2 + G - G e^{-G_0}}{(G_0 + 1)^2} e^{-G_0}, \\ \varkappa_2 &= \rho - (\gamma - \rho) \frac{G_0^2 + G_0 - 1}{(G_0 + 1)^2} e^{-G_0}. \end{aligned}$$

Решение уравнения (II.13) можно найти в виде

$$(II.14) \quad \pi(y) = C \exp \left\{ -y^2 / 2 \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} \right\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бертсекас Д., Галлагер Р. Сети передачи данных. М.: Мир, 1989.
2. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. М.: Мир, 1979.
3. Шварц М. Сети ЭВМ. Анализ и проектирование. М.: Радио и связь. 1981.
4. Цыбаков Б. С., Бакиров В. Л. Устойчивость несинхронной системы АЛОХА // Проблемы передачи информации. 1984. № 1. С. 82-94.
5. Башарин Г. П., Ефимушкин В. А. Методы анализа локальных информационно-вычислительных сетей // Итоги науки и техники. Сер. "Связь". М.: ВИНТИ, 1988. Т. 2. С. 60-109.
6. Назаров А. А., Юревич Н. М. Исследование сети с протоколом случайного множественного доступа АЛОХА без повторной передачи искаженных сообщений // Автоматика и вычисл. техника. 1993. № 3. С. 52-56.
7. Назаров А. А., Юревич Н. М. Исследование сети с динамическим протоколом случайного множественного доступа АЛОХА с повторной передачей искаженных сообщений // Математические методы исследования систем и сетей массового обслуживания. Минск: Изд-во Бел. гос. ун-та, 1993. С. 84-85.
8. Назаров А. А. Асимптотический анализ марковизируемых систем. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991.

Поступила в редакцию 11.07.95

УДК 519.872

© 1996 г. А.В. ПЕЧИНКИН, д-р физ.-мат. наук
(Московский государственный технический университет)

СИСТЕМА $M_k/G/1$ С НЕНАДЕЖНЫМ ПРИБОРОМ

Рассматривается система массового обслуживания с пуассоновским второго рода входящим потоком требований и ненадежным прибором. Найдены стационарные вероятности состояний и стационарное распределение времени ожидания начала обслуживания требования.

1. Введение

Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания, в которую поступает пуассоновский второго рода входящий поток требований с интенсивностью λ_k , зависящей от числа k находящихся в системе требований. Время обслуживания каждого требования имеет функцию распределения $B(x)$ со средним значением $b = \int_0^{\infty} x dB(x)$.

Обслуживающий прибор ненадежен, т.е. может выходить из строя (отказывать) и ремонтироваться. Дисциплина выходов из строя и ремонтов следующая.

Во-первых, предположим, что начальный момент 0 совпадает с моментом освобождения системы, т.е. в этот момент оканчивается обслуживание требования или ремонт прибора (если прибор находился в неисправном состоянии) и в системе отсутствуют требования. Тогда через случайное время, распределенное по закону $F(x)$,