Д. Ю. Кузнецов, А. А. Назаров, Исследование сетей связи с конечным числом абонентских станций, управляемых адаптивными протоколами случайного множественного доступа в условиях перегрузки, *Автомат. и телемех.*, 1999, выпуск 12, 99–113

4. *Gimpelson L. A.* Analysis of mixtures of wide-and narrow-band traffic // IEEE Trans. on Comm. Tech. 1965. V. 13. No. 3. P. 258–266.
5. *Kraimeche B., Schwartz M.* Circuit access control strategies in integrated digital networks // Infocom.'84. San Francisco. Calif. April 1984.
6. *Kraimeche B., Schwartz M.* Analysis of traffic access control strategies in integrated service networks // IEEE Trans. on Comm. 1985. Vol. Comm-33. No. 10. P. 1085–1093.
7. *Ершов В. А., Кузнецов Н. А.* Теоретические основы построения цифровой сети с интеграцией служб (ISDN). М.: Институт проблем передачи информации РАН, 1995.
8. *Roberts J., Mocci U., Virtamo J.* Broadband network traffic. Performance evaluation and design of bradband multiservice networks. Final report of action COST 242. Lecture notes in computer science. Springer. 1996.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В. М. Вишневским.

Поступила в редакцию 22.03.99

УДК 519.872: 681.03

© 1999 г. Д. Ю. КУЗНЕЦОВ,
(Томский политехнический университет),
А. А. НАЗАРОВ, д-р техн. наук
(Томский государственный университет)

ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТЕЙ СВЯЗИ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ АБОНЕНТСКИХ СТАНЦИЙ, УПРАВЛЯЕМЫХ АДАПТИВНЫМИ ПРОТОКОЛАМИ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА В УСЛОВИЯХ ПЕРЕГРУЗКИ

Предложен адаптивный протокол случайного множественного доступа, стабилизирующий бистабильные и неустойчивые сети связи. Определена производительность сети. Найдено асимптотическое стационарное распределение вероятностей состояний системы. Получены ее основные вероятностно-временны́е характеристики. Проведено сравнение со статическим протоколом.

1. Введение

Известно [1], что сети связи с протоколами случайного множественного доступа функционируют достаточно нестабильно. При конечном числе абонентских станций (АС) может возникать явление бистабильности [2], а при бесконечном числе узлов в них не существует стационарного режима [3, 4], т.е. средняя задержка пакета растет неограниченно по мере продолжительности работы системы.

Проблему стабилизации таких систем при бесконечном числе узлов можно решить использованием адаптивных [5] протоколов доступа, наиболее известным из которых является псевдобайесовский алгоритм Ривеста [6], по существу совпадающий с алгоритмом Михайлова [7], разработанный для протокола "синхронная Алоха", где вероятность повторной передачи пакета из источника повторных вызовов (ИПВ) меняется с изменением величины оценки числа пакетов в ИПВ, которая явно зависит от величины λ – интенсивности поступления пакетов в сеть. Так как скорость поступления λ обычно неизвестна, следовательно, алгоритм должен реализовывать также процедуру оценивания величины λ по текущей информации, доступной наблюдению, что вызывает определенные затруднения.

Анализ задержки пакета при таком алгоритме, даже при известном значении λ, достаточно труден [1], поэтому выполняется анализ приближенной модели и проводится сравнение с результатами имитационного моделирования. Более общие результаты для сети с бесконечным числом узлов получены в [8].

В данной работе рассмотрена неустойчивая сеть связи с конечным числом узлов N и протоколом случайного множественного доступа с оповещением о конфликте [9]. Для ее стабилизации предложена адаптивная модификация протокола доступа, в которой адаптация реализуется автоматом с целесообразным поведением [10], названным здесь адаптером. В работе показано, что для построенного адаптивного протокола случайного множественного доступа в сетях с конечным числом АС явление бистабильности не возникает. Получены те характеристики адаптера, при которых производительность сети максимальна. Определено асимптотическое при $N \to \infty$ стационарное распределение вероятностей состояний системы и найдены основные вероятностно-временны́е характеристики сети связи с адаптивным протоколом доступа.

2. Математическая модель сети с адаптивным протоколом случайного множественного доступа

Описание сети связи с протоколом случайного множественного доступа с оповещением о конфликте и ее математической модели приведено в работе [9], где рассмотрена однолинейная система массового обслуживания (СМО), прибор которой может находиться в одном из трех состояний: $k = 0$, если он свободен; $k = 1$, когда он занят обслуживанием заявки; $k = 2$, когда на приборе реализуется этап оповещения о конфликте. Заявка, заставшая в момент поступления прибор свободным, начинает немедленно обслуживаться. Если за это время другие требования не поступали, то исходная заявка по завершении обслуживания покидает систему. Если во время обслуживания одной заявки поступает другая, то они вступают в конфликт. От этого момента начинается этап оповещения о конфликте. Заявки, попавшие в конфликт, а также поступившие на интервале оповещения о конфликте, переходят в источник повторных вызовов, из которого вновь обращаются к прибору с попыткой повторного обслуживания. Повторное обращение происходит после случайной задержки, имеющей экспоненциальное распределение с параметром σ. Число заявок в ИПВ обозначим i.

Поток сообщений от внешнего источника для сети с конечным N числом АС будем моделировать примитивным [11] потоком с параметром $\lambda(N-i)/N$ при $k = 0, 2$ и $\lambda(N - i - 1)/N$ при $k = 1$, когда в ИПВ находится i требований.

Время обслуживания заявок рекуррентное с функцией распределения $B(s)$. Длины интервалов оповещения о конфликте имеют функцию распределения $A(s)$. Для простоты изложения ограничимся экспоненциальными распределениями с параметром μ для времени обслуживания и μ_1 для интервала оповещения о конфликте. Исследование этой СМО изложенным ниже методом можно провести и для произвольных функций распределения $A(s)$ и $B(s)$, марковизируя систему, вводя дополнительную переменную.

В зависимости от параметра σ можно различать три класса протоколов случайного доступа.

Если $\sigma = \mu\gamma/N$, тогда протокол назовем статическим.

При $\sigma = \mu\gamma/i$ – динамическим [12].

Для $\sigma = \mu\gamma/T$ – адаптивным, где T – состояние адаптера, а γ – некоторая константа (параметр системы).

При статических протоколах сети функционируют неустойчиво, так как в сетях с конечным числом АС возникает явление бистабильности, а при бесконечном числе узлов отсутствует стационарный режим.

Динамические протоколы лишены этих недостатков, но технически нереализуемы в связи с отсутствием на абонентских станциях информации о значении величины i. Такие сети можно считать идеализацией сетей с адаптивными протоколами.

Предметом исследования данной работы являются сети с адаптивными протоколами. Опишем функционирование адаптера.

Для стабилизации неустойчивых сетей интенсивность σ повторного обращения будет возрастать непрерывно при любом состоянии канала и убывать дискретно, в момент окончания в канале сигнала оповещения о конфликте. Для такого изменения σ, положив $\sigma = \mu\gamma/T$, конструкцию адаптера выберем так, чтобы его состояние $T(t)$ с течением времени t менялось следующим образом: в любой момент времени $T(t+\Delta t) = T(t) - \alpha\mu\Delta t$ за исключением момента окончания распространения сигнала оповещения о конфликте, когда $T(t+\Delta t) = T(t) + \beta$. Здесь α и β – параметры адаптера, которые будут определены ниже. Если при убывании $T(t)$ достигает заданного значения $T_0 > 0$, то состояние адаптера остается равным этому значению до момента его увеличения на β.

Можно предложить и другие конструкции адаптеров.

При сформулированном изменении интенсивности σ рассмотренную СМО естественно назвать адаптивной СМО [5], моделирующей сеть связи с адаптивным протоколом случайного множественного доступа.

Состояние рассматриваемой системы определим вектором (k, i, T), изменение во времени которого образует однородный марковский процесс $\{k(t), i(t), T(t)\}$. Проведем исследование этого процесса.

3. Исследование сетей связи с конечным числом абонентских станций, управляемых адаптивными протоколами случайного множественного доступа в условиях перегрузки

Для исследования построенной адаптивной СМО обозначим

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & P\left(k(t) = k, i(t) = t, T \leqslant T(t) < T + dT\right) = P_k(i, T, t)dT,\\
& \frac{\lambda}{\mu} = \rho, \quad \frac{\mu_1}{\mu} = \frac{1}{\nu}.
\end{aligned}
$$

Так как

$$
\begin{aligned}
& P_0(i, T, t+\Delta t) = \mu\Delta t P_1(i, T, t) + \mu_1 \Delta t P_2(i, T-\beta, t) + \\
& + \left[1 - \left(\frac{\lambda}{N}(N-i) + \gamma\mu\frac{i}{T}\right)\Delta t\right] P_0(i, T+\alpha\mu\Delta t, t) + o\left(\Delta t\right),\\
& P_1(i, T, t+\Delta t) = \frac{\lambda}{N}(N-i)\Delta t P_0(i, T, t) + \gamma\mu\frac{i+1}{T}\Delta t P_0(i+1, T, t) + \\
& + \left[1 - \left(\frac{\lambda}{N}(N-i-1) + \gamma\mu\frac{i}{T} + \mu\right)\Delta t\right] P_1(i, T+\alpha\mu\Delta t, t) + o\left(\Delta t\right),\\
& P_2(i, T, t+\Delta t) = \frac{\lambda}{N}(N-i+1)\Delta t P_1(i-2, T, t) + \frac{\lambda}{N}(N-i+1)\Delta t P_2(i-1, T, t) + \\
& + \gamma\mu\frac{i-1}{T}\Delta t P_1(i-1, T, t) + \left[1 - \left(\frac{\lambda}{N}(N-i) + \mu_1\right)\Delta t\right] \times \\
& \times P_2(i, T+\alpha\mu\Delta t, t) + o\left(\Delta t\right),
\end{aligned}
$$

то, выполнив необходимые преобразования для стационарного распределения $P_k(i,T,t) = P_k(i,T)$, получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&\left[\rho\left(1-\frac{i}{N}\right)+\gamma\frac{i}{T}\right]P_0(i,T) = P_1(i,T)+\frac{1}{\nu}P_2(i,T-\beta)+\alpha\frac{\partial P_0(i,T)}{\partial T},\\
&\left[\rho\left(1-\frac{i+1}{N}\right)+\gamma\frac{i}{T}+1\right]P_1(i,T) = \rho\left(1-\frac{i}{N}\right)P_0(i,T)+\\
&+\gamma\frac{i+1}{T}P_0(i+1,T)+\alpha\frac{\partial P_1(i,T)}{\partial T},\\
&\left[\rho\left(1-\frac{i}{N}\right)+\frac{1}{\nu}\right]P_2(i,T) = \rho\left(1-\frac{i-1}{N}\right)P_2(i-1,T)+\\
&+\rho\left(1-\frac{i-1}{N}\right)P_1(i-2,T)+\gamma\frac{i-1}{T}P_1(i-1,T)+\alpha\frac{\partial P_2(i,T)}{\partial T}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Стационарное распределение должно также удовлетворять краевым условиям при $i = 0, N$ и условию нормировки

$$\sum_{k=0}^{2}\sum_{i=k}^{N}\int_0^\infty P_k(i,T)dT = 1.$$

В силу конечности множества состояний $0 \leqslant i \leqslant N$, при целесообразном поведении адаптера стационарный режим в рассматриваемой СМО существует для любых значений загрузки ρ.

Основной характеристикой таких сетей связи является производительность S, которую определим как среднее число сообщений успешно переданных за единицу времени. В качестве единицы времени возьмем среднее времени передачи одного сообщения.

Рассматриваемую СМО исследуем в асимптотическом условии $N \to \infty$ [13]. Докажем утверждение.

Т е о р е м а 1. *Пусть $\beta/\alpha > \nu$, обозначим*

$$g = \frac{1+\sqrt{1-\nu+\dfrac{\beta}{\alpha}}}{\dfrac{\beta}{\alpha}-\nu}$$

и пусть

$$\rho > \max_g\left\{\frac{g}{\nu g^2+2g+1}\right\} = \frac{1}{2(1+\sqrt{\nu})},$$

тогда производительность S сети связи, управляемой адаптивным протоколом случайного множественного доступа с конечным числом АС, определятся равенством

$$S = \frac{g}{\nu g^2+2g+1}. \tag{3}$$

Асимптотически при $N \to \infty$ среднее значение a нормированного i/N числа АС в ИПВ составляет

$$a = 1-\frac{S}{\rho}. \tag{4}$$

Распределение вероятностей r_k состояний канала имеет вид

$$r_0 = \frac{g+1}{\eta}, \quad r_1 = \frac{g}{\eta}, \quad r_2 = \frac{\nu g^2}{\eta}, \quad \eta = \nu g^2 + 2g + 1. \tag{5}$$

Доказательство. Обоснование переходов, реализованных ниже, выполнимо аналогично [9], при переходе методом преобразований Лапласа от дифференциальных уравнений (2) к системе конечного числа $3N$ линейных алгебраических уравнений.

Обозначим

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad i\varepsilon^2 = x, \quad T\varepsilon^2 = y, \quad \frac{1}{\varepsilon^4} P_k(i,T) = \Pi_k(x,y,\varepsilon),$$
$$\Pi_k(x,y,0) = \Pi_k(x,y)$$

и перепишем систему (2) в виде

$$\begin{aligned}
&\left[\rho(1-x) + \gamma\frac{x}{y}\right]\Pi_0(x,y,\varepsilon) = \\
&= \Pi_1(x,y,\varepsilon) + \frac{1}{\nu}\Pi_2(x,y-\varepsilon^2\beta,\varepsilon) + \varepsilon^2\alpha\frac{\partial\Pi_0(x,y,\varepsilon)}{\partial y}, \\
&\left[\rho(1-x-\varepsilon^2) + \gamma\frac{x}{y} + 1\right]\Pi_1(x,y,\varepsilon) = \rho(1-x)\Pi_0(x,y,\varepsilon) + \\
&+\gamma\frac{x+\varepsilon^2}{y}\Pi_0(x+\varepsilon^2,y,\varepsilon) + \varepsilon^2\alpha\frac{\partial\Pi_1(x,y,\varepsilon)}{\partial y}, \\
&\left[\rho(1-x) + \frac{1}{\nu}\right]\Pi_2(x,y,\varepsilon) = \rho\left(1-(x-\varepsilon^2)\right)\Pi_2(x-\varepsilon^2,y,\varepsilon) + \\
&+\rho\left(1-(x-\varepsilon^2)\right)\Pi_1(x-2\varepsilon^2,y,\varepsilon) + \gamma\frac{x-\varepsilon^2}{y}\Pi_1(x-\varepsilon^2,y,\varepsilon) + \varepsilon^2\alpha\frac{\partial\Pi_2(x,y,\varepsilon)}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Раскладывая $\Pi_k(x\pm\varepsilon^2,y,\varepsilon)$ и $\Pi_2(x,y-\varepsilon^2\beta,\varepsilon)$ по ε^2 в ряд с точностью до ε^2 в окрестности точки (x,y,ε) и складывая почленно все уравнения этой системы, получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\left\{\alpha\Pi_0(x,y,\varepsilon) + \alpha\Pi_1(x,y,\varepsilon) + \alpha\Pi_2(x,y,\varepsilon) - \frac{\beta}{\nu}\Pi_2(x,y,\varepsilon)\right\} + \\
&+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\gamma\frac{x}{y}\Pi_0(x,y,\varepsilon) - \rho(1-x)\Pi_2(x,y,\varepsilon) - \right. \\
&\left. -\left(2\rho(1-x) + \gamma\frac{x}{y}\right)\Pi_1(x,y,\varepsilon)\right\} = \frac{o\left(\varepsilon^2\right)}{\varepsilon^2}.
\end{aligned}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, будем иметь

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\left\{\alpha\Pi_0(x,y) + \alpha\Pi_1(x,y) + \alpha\Pi_2(x,y) - \frac{\beta}{\nu}\Pi_2(x,y)\right\} + \\
&+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\gamma\frac{x}{y}\Pi_0(x,y) - \rho(1-x)\Pi_2(x,y) - \left(2\rho(1-x) + \gamma\frac{x}{y}\right)\Pi_1(x,y)\right\} = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

В системе (6) перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$, обозначив $G = \rho(1-x) + \gamma x/y$, получим однородную систему трех линейных алгебраических уравнений относительно $\Pi_k(x,y)$, решения которой имеют вид

$$\Pi_0(x,y) = \frac{G+1}{\nu G^2 + 2G + 1}\Pi(x,y), \tag{8}$$

$$\Pi_1(x,y) = \frac{G}{\nu G^2 + 2G + 1}\Pi(x,y),$$
$$\Pi_2(x,y) = \frac{\nu G^2}{\nu G^2 + 2G + 1}\Pi(x,y),$$

где $\Pi(x,y) = \Pi_0(x,y) + \Pi_1(x,y) + \Pi_2(x,y)$. Подставляя найденные выражения в (7), получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\frac{G}{\nu G^2 + 2G + 1} - \rho(1-x)\right]\Pi(x,y)\right\} +$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{(\alpha\nu - \beta)G^2 + 2\alpha G + \alpha}{\nu G^2 + 2G + 1}\Pi(x,y)\right\} = 0,$$

совпадающее с вырожденным уравнением Фоккера–Планка [14] для плотности распределения вероятностей $\Pi(x,y)$ значений стационарного двумерного диффузионного процесса, коэффициенты диффузии которого равны нулю. Поэтому допредельное распределение вероятностей $\Pi_k(x,y,\varepsilon)$ сосредоточено в окрестности той точки $x = a$, $y = b$, в которой и коэффициенты переноса равны нулю. Следовательно, можно записать систему двух уравнений

$$(9) \qquad \begin{cases} (\alpha\nu - \beta)G^2 + 2\alpha G + \alpha = 0, \\ \rho(1-x) = G/(\nu G^2 + 2G + 1), \end{cases}$$

решение которой определяет параметры $x = a$ и $y = b$. Естественно, параметры a и b должны удовлетворять ограничениям $0 < a < 1$, $b > 0$. При заданных значениях параметров адаптера α, β и сети ρ, ν из первого уравнения этой системы получаем величину

$$(10) \qquad G = g = \frac{1 + \sqrt{1 - \nu + \dfrac{\beta}{\alpha}}}{\dfrac{\beta}{\alpha} - \nu},$$

которая в силу условия $\beta/\alpha > \nu$ будет действительной и положительной.

Тогда второе равенство системы (9) перепишем в виде

$$(11) \qquad \rho(1-x) = \frac{g}{\nu g^2 + 2g + 1}.$$

При

$$\rho > \max_g \left\{g/(\nu g^2 + 2g + 1)\right\}$$

это уравнение имеет решение $x = a$ такое, что $0 < a < 1$. В этом случае a равно среднему значению компоненты x.

Так как в рассматриваемой сети сообщения не теряются, то успешно передаются (быть может не с первой попытки) все сообщения, поступающие из внешнего источника, поэтому производительность S такой сети равна интенсивности входящего потока от внешнего источника, модель которого описана выше, а так как рассматриваемый поток ординарный, то его интенсивность совпадает с параметром, поэтому $\rho(1-a)$ является производительностью сети связи, значение S которой определяется равенством

$$S = \frac{g}{\nu g^2 + 2g + 1},$$

совпадающим с (3). Среднее значение $x = a$ из (11) получим в виде

$$a = 1 - \frac{S}{\rho},$$

совпадающем с (4).

Из (8) получаем

$$\Pi_k(x, y) = r_k \Pi(x, y),$$

где r_k определяются формулами (5).

При доказательстве теоремы условие

$$\rho > \max_g \bigl\{ g \big/ (\nu g^2 + 2g + 1) \bigr\} = 1 \big/ 2(1 + \sqrt{\nu})$$

является достаточным для существования точки стабилизации $x = a$, $y = b$, в окрестности которой сосредоточено асимптотическое распределение вероятностей состояний системы. Это важное условие назовем условием перегрузки сети.

С л е д с т в и е 1. *Асимптотическое среднее значение b нормированного T/N значения состояния адаптера составляет*

$$b = \frac{\gamma a}{g - S} = \frac{\gamma}{\rho} \frac{\rho - S}{g - S}. \tag{12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$\rho(1 - a) + \gamma \frac{a}{b} = g, \quad \rho(1 - a) = S,$$

то $b = \gamma a \big/ (g - S)$. Подставляя сюда (4), получим (12).

С л е д с т в и е 2. *При $\beta/\alpha = 2\nu((1 + \sqrt{\nu}) \big/ \sqrt{\nu})$ адаптивный протокол реализует максимальную производительность $S^* = 1 \big/ 2(\sqrt{\nu} + 1)$ сети связи и минимальное среднее $a^* = 1 - \bigl(1 \big/ 2\rho(\sqrt{\nu} + 1)\bigr)$ числа активных АС.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (3) очевидно следует, что S максимально при $g = 1 / \sqrt{\nu}$, при этом a в (4) минимально. А так как в силу (10)

$$\frac{1}{\sqrt{\nu}} = \frac{1 + \sqrt{1 - \nu + \dfrac{\beta}{\alpha}}}{\dfrac{\beta}{\alpha} - \nu}, \quad \text{то} \quad \frac{\beta}{\alpha} = 2\nu \left(\frac{1 + \sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}} \right).$$

Найдем асимптотическое распределение вероятностей состояний (k, i, T) в условиях $N \to \infty$, для этого в допредельной системе (6) сделаем замену

$$\begin{gathered} x = a + \varepsilon u, \quad y = b + \varepsilon v, \quad \frac{1}{\varepsilon^2} \Pi_k(x, y, \varepsilon) = H_k(u, v, \varepsilon), \\ H_k(u, v, 0) = H_k(u, v), \end{gathered} \tag{13}$$

при этом имеет место утверждение.

Т е о р е м а 2. *В асимптотическом условии* $N \to \infty$, *при* $\rho > 1/2(\sqrt{\nu}+1)$, *распределение* $H_k(u,v)$ *имеет вид*

$$H_k(u,v) = r_k H(u,v), \tag{14}$$

где

$$H(u,v) = C \exp\left\{-\frac{1}{1-r^2}\left[\frac{u^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{uv}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{v^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}, \tag{15}$$

здесь параметры σ_1, σ_2 *и* r *определяются системой* (19), *а* C *– условием нормировки.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В (6) выполним замену (13) и получим

$$\begin{aligned}
&\left[\rho(1-a-\varepsilon u) + \gamma\frac{a+\varepsilon u}{b+\varepsilon v}\right] H_0(u,v,\varepsilon) = H_1(u,v,\varepsilon) + \frac{1}{\nu}H_2(u,v-\varepsilon\beta,\varepsilon) + \\
&+\varepsilon\alpha\frac{\partial H_0(u,v,\varepsilon)}{\partial v},\\
&\left[\rho(1-a-\varepsilon u-\varepsilon^2) + \gamma\frac{a+\varepsilon u}{b+\varepsilon v} + 1\right] H_1(u,v,\varepsilon) = \rho(1-a-\varepsilon u)H_0(u,v,\varepsilon) + \\
&+\gamma\frac{a+\varepsilon(u+\varepsilon)}{b+\varepsilon v}H_0(u+\varepsilon,v,\varepsilon) + \varepsilon\alpha\frac{\partial H_1(u,v,\varepsilon)}{\partial v},\\
&\left[\rho(1-a-\varepsilon u) + \frac{1}{\nu}\right] H_2(u,v,\varepsilon) = \rho\left(1-a-\varepsilon(u-\varepsilon)\right) H_2(u-\varepsilon,v,\varepsilon) + \\
&+\rho\left(1-a-\varepsilon(u-\varepsilon)\right) H_1(u-2\varepsilon,v,\varepsilon) + \gamma\frac{a+\varepsilon(u-\varepsilon)}{b+\varepsilon v}H_1(u-\varepsilon,v,\varepsilon) + \\
&+\varepsilon\alpha\frac{\partial H_2(u,v,\varepsilon)}{\partial v}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Положив здесь $\varepsilon = 0$, получим однородную систему трех линейных алгебраических уравнений относительно $H_k(u,v)$, решение которой имеет вид

$$H_k(u,v) = r_k H(u,v),$$

где r_k определяются равенствами (5).

Найдем теперь решение $H_k(u,v,\varepsilon)$ системы (16) с точностью до ε в виде

$$H_k(u,v,\varepsilon) = r_k H(u,v) + \varepsilon h_k(u,v) + o(\varepsilon). \tag{17}$$

Подставляя эти выражения в (16) и ограничиваясь слагаемыми порядка ε, получим неоднородную систему

$$\begin{aligned}
&gh_0 - h_1 - \frac{1}{\nu}h_2 = \alpha r_0\frac{\partial H}{\partial v} - r_2\frac{\beta}{\nu}\frac{\partial H}{\partial v} + \left[\rho u - \gamma\frac{bu-av}{b^2}\right] r_0 H,\\
&(g+1)h_1 - gh_0 = \alpha r_1\frac{\partial H}{\partial v} + \gamma\frac{a}{b^2}r_0\frac{\partial H}{\partial u} + \left[\rho u - \gamma\frac{bu-av}{b^2}\right](r_1-r_0)H,\\
&\frac{1}{\nu}h_2 - gh_1 = \alpha r_2\frac{\partial H}{\partial v} - \left[\rho(1-a)r_2 + \left(2\rho(1-a)+\gamma\frac{a}{b}\right) r_1\right]\frac{\partial H}{\partial u} - \\
&-\left[\rho u - \gamma\frac{bu-av}{b^2}\right] r_1 H
\end{aligned} \tag{18}$$

трех линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных h_k. Определитель этой системы равен нулю, но ранг расширенной матрицы в силу (9) совпадает с рангом матрицы, поэтому система (18) имеет решение.

Разложив функции $H_k(u\pm\varepsilon,v,\varepsilon)$ и $H_2(u,v-\varepsilon\beta,\varepsilon)$ в ряд по степеням ε в окрестности точки (u,v,ε), ограничиваясь слагаемыми порядка ε^2, сложим почленно все уравнения системы (16), получим равенство

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{\partial}{\partial v}\left\{\alpha H_0+\alpha H_1+\alpha H_2-\frac{\beta}{\nu}H_2\right\}+\\
&+\varepsilon\frac{\partial}{\partial u}\left\{\gamma\frac{a+\varepsilon u}{b+\varepsilon v}H_0-\rho(1-a-\varepsilon u)H_2-\left[2\rho(1-a-\varepsilon u)+\gamma\frac{a+\varepsilon u}{b+\varepsilon v}\right]H_1\right\}+\\
&+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left\{\gamma\frac{a}{b}H_0+\rho(1-a)H_2+\left[4\rho(1-a)+\gamma\frac{a}{b}\right]H_1\right\}+\\
&+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\beta^2}{\nu}\frac{\partial^2 H_2}{\partial v^2}=o\left(\varepsilon^2\right).
\end{aligned}
$$

Подставим сюда разложение (17), используя решение системы (18), для $H(u,v)$ получим уравнение вида

$$
A_{11}\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}+A_{22}\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}+A_{12}\frac{\partial^2 H}{\partial u\partial v}+\frac{\partial}{\partial u}\left[(a_1u+b_1v)H\right]+\frac{\partial}{\partial v}\left[(a_2u+b_2v)H\right]=0,
$$

где

$$
\begin{aligned}
&A_{11}=\gamma\frac{a}{b}r_0\left(-\gamma\frac{a}{b}+\gamma\frac{a}{b}\nu-\rho(1-a)\nu g-\left[\gamma\frac{a}{b}+2\rho(1-a)\right]\right)+\\
&+\left[(2\rho(1-a)+\gamma\frac{a}{b})r_1+\rho(1-a)r_2\right]\left[\rho(1-a)(2\nu g+\nu)-(\gamma\frac{a}{b}+2\rho(1-a)\nu g)\right]+\\
&+\frac{1}{2}\left\{\gamma\frac{a}{b}r_0+\rho(1-a)r_2+\left[4\rho(1-a)+\gamma\frac{a}{b}\right]r_1\right\},\\
&A_{22}=\beta\alpha(-2gr_2-gr_1-r_2),\\
&A_{12}=-\alpha\nu(g+1)\left[\rho(1-a)r_2+\left(2\rho(1-a)+\gamma\frac{a}{b}\right)r_1-\gamma\frac{a}{b}r_0\right]+\\
&+\beta g\left[2\left(\rho(1-a)r_2+\left(2\rho(1-a)+\gamma\frac{a}{b}\right)r_1\right)-\gamma\frac{a}{b}r_0\right]+\\
&+\beta\left[\rho(1-a)r_2+\left(2\rho(1-a)+\gamma\frac{a}{b}\right)r_1\right]+\\
&+\gamma\frac{a}{b}\left[-\alpha r_1+\nu(g+1)\left(\alpha r_0-\frac{\beta}{\nu}r_2\right)+\nu\alpha r_1\right]-\\
&-\rho(1-a)\left[(2\nu g+\nu)\alpha r_2+\nu g\alpha r_1\right]-\left(\gamma\frac{a}{b}+2\rho(1-a)\right)\alpha r_2,\\
&a_1=\left(\rho-\frac{\gamma}{b}\right)\left[\gamma\frac{a}{b}\left((r_0-r_1)+\nu gr_0+\nu r_1\right)+\rho(1-a)\left(\nu gr_0+\nu(g+1)r_1\right)-\right.\\
&\left.-\left(\gamma\frac{a}{b}+2\rho(1-a)\right)\left((r_1-r_0)+\nu gr_1\right)\right]-\frac{\gamma}{b}(r_0+r_1)+\rho(r_2+2r_1),\\
&b_1=\gamma\frac{\alpha}{b^2}\left[\gamma\frac{a}{b}\left((r_0-r_1)+\nu gr_0+\nu r_1\right)+\rho(1-a)\left(\nu gr_0+\nu(g+1)r_1\right)-\right.\\
&\left.-\left(\gamma\frac{a}{b}+2\rho(1-a)\right)\left((r_1-r_0)+\nu gr_1\right)-(r_0-r_1)\right],\\
&a_2=\beta\left(\rho-\frac{\gamma}{b}\right)\left[g(r_1+r_0)+r_1\right],
\end{aligned}
$$

$$b_2 = \beta\gamma\frac{\alpha}{b_2}\left[g(r_1 + r_0) + r_1\right].$$

Решением этого уравнения является функция $H(u,\nu)$ вида (15) с параметрами σ_1, σ_2 и r, определяемыми системой трех линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&a_1\sigma_1^2 + b_1 r\sigma_1\sigma_2 = A_{11},\\
&a_2\sigma_2^2 + b_2 r\sigma_1\sigma_2 = A_{22},\\
&a_2\sigma_1^2 + b_1\sigma_2^2 + (a_1 + b_2) r\sigma_1\sigma_2 = 2A_{12},
\end{aligned} \tag{19}$$

относительно трех неизвестных σ_1^2, σ_2^2, $r\sigma_1\sigma_2$.

Величина C определяется условием нормировки.

Следствие 3. *Маргинальное распределение $H(u)$ имеет вид*

$$H(u) = C\left\{\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{b}{\varepsilon\sqrt{1 - r^2\sigma^2}} - \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}}\sigma_1 u\right)\right\} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}}, \tag{20}$$

где C определяется условием нормировки, а $\Phi(z)$ – стандартная функция вероятности, равная

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Доказательство. Так как $T\varepsilon^2 = b + \varepsilon v$, то $-b/\varepsilon \leqslant v < \infty$, поэтому

$$H(u) = \int\limits_{-b/\varepsilon}^{\infty} H(u, v)dv,$$

откуда получаем равенство (20).

Если $b/\varepsilon > r\sigma_1\sigma_2 3\sigma_1$, то в соответствии с “правилом 3σ” выражение (20) можно переписать в виде

$$H(u) = Ce^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}},$$

где C определяется условием нормировки.

Так как $i\varepsilon^2 = a + \varepsilon u$, то $-a/\varepsilon \leqslant u \leqslant (1 - a)/\varepsilon$, поэтому, если $(a/\varepsilon > 3\sigma_1)$, $(1 - a)/\varepsilon > 3\sigma_1$, то $H(u)$ принимает вид

$$H(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}}\exp\left(\frac{-u^2}{2\sigma_1^2}\right). \tag{21}$$

В этом случае распределение нормированного числа i/N активных АС асимптотически нормально со средним, равным a, и дисперсией σ_1^2/N.

Выпишем основные вероятностно-временны́е характеристики сети связи с конечным числом АС, управляемой адаптивным протоколом случайного множественного доступа.

1. Суммарная загрузка сети сообщениями из внешнего источника и ИПВ

$$g = \frac{1 + \sqrt{1 - \nu + \dfrac{\beta}{\alpha}}}{\dfrac{\beta}{\alpha} - \nu}.$$

2. Производительность сети

$$S = \frac{g}{\nu g^2 + 2g + 1}.$$

3. Вероятность простоя канала

$$P_0 = \frac{g+1}{\nu g^2 + 2g + 1}.$$

4. Число заявок в ИПВ

$$i = aN + \sqrt{N}u,$$

где величина a определяется равенством

$$a = 1 - \frac{S}{\rho};$$

здесь случайная величина u имеет распределение (20), которое при $N \to \infty$ является нормальным с нулевым средним и дисперсией σ_1^2, определяемой системой трех линейных алгебраических уравнений (19).

5. Среднее число заявок в ИПВ при достаточно большом значении N

$$I = aN.$$

6. Среднее время доставки сообщения

$$W = \frac{I}{S};$$

здесь единицей времени выбрано среднее время передачи одного сообщения $1/\mu$.

7. Среднее число попыток на одну успешную передачу

$$K = \frac{g}{S}.$$

8. Вероятность передачи сообщения с нулевым временем ожидания

$$R_0 = P_0 P(\tau < \xi) = P_0 \frac{g}{g+1} = \frac{g}{\nu g^2 + 2g + 1},$$

здесь τ – время передачи сообщения, а ξ – длина интервала между моментами поступления сообщений в канал связи. Отметим, что

$$R_0 = S.$$

Оптимальное отношение β/α значений параметров адаптера, максимизирующее производительность S, вероятность R_0 передачи сообщения с нулевым временем ожидания и минимизирующее среднее число I заявок в ИПВ, составляет

$$\frac{\beta}{\alpha} = 2\nu \left(\frac{1 + \sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}} \right).$$

Применение адаптивного протокола позволяет существенно повысить качество функционирования сети связи и, в частности, исключить возникновение явления бистабильности [2] в сети, управляемой статическим протоколом случайного множественного доступа при $\sigma = \mu\gamma/N$. Для сетей со статическим протоколом в тех же обозначениях, что и выше, при

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad i\varepsilon^2 = a + \varepsilon y, \quad \frac{1}{\varepsilon}P_k(i) = \Pi_k(y,\varepsilon), \quad \Pi_k(y,0) = \Pi_k(y)$$

имеем

$$\Pi_k(y) = r_k\Pi(y),$$

где r_k совпадают с (5), но

$$g = \rho(1-a) + \gamma a,$$

здесь величина a определяется уравнением

$$\rho(1-a) = \frac{g}{\nu g^2 + 2g + 1}.$$

Это уравнение может иметь один, два или три корня. В первом и втором случаях сеть моностабильна, а при трех корнях – бистабильна.

Функция $\Pi(y)$ имеет вид

$$\Pi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2D}\right\},$$

здесь $D = Q_2/Q_1$,

$$Q_1 = \rho(1-a)\left[1 + \frac{\nu^2 g^3 + \nu g^2 - g - 1}{(\nu g^2 + 2g + 1)^2}\right],$$

$$Q_2 = \rho + (\gamma - \rho)\frac{1 - \nu g^2}{(\nu g^2 + 2g + 1)^2}.$$

Для сети, управляемой статическим протоколом, можно определить также вероятностно-временны́е характеристики, что и для сети с адаптивным протоколом. При этом большинство формул совпадают. Принципиальное отличие этих протоколов определяется лишь значениями g и a. Для адаптивного протокола величина g определяется равенством

$$g_a = \frac{1 + \sqrt{1 - \nu + \dfrac{\beta}{\alpha}}}{\dfrac{\beta}{\alpha} - \nu},$$

а для статического протокола

$$g_s = \rho(1-a) + \gamma a.$$

В адаптивном протоколе величина a принимает единственное значение

$$a = 1 - \frac{S}{\rho},$$

а в статическом протоколе величина a может принимать два существенно разных значения, при этом в сети связи возникает явление бистабильности, которое исключается адаптивным протоколом.

Таблица 1

ρ	S	$a_{\text{ст}}$	$a_{\text{ад}}$
0,26	0,246 0,158	0,05 0,39	0,04
0,27	0,250 0,139	0,07 0,49	0,07
0,28	0,131	0,53	0,11
0,29	0,125	0,57	0,14
0,30	0,112	0,60	0,17
0,35	0,109	0,69	0,29
0,40	0,104	0,74	0,38
0,45	0,101	0,78	0,45
0,50	0,097	0,81	0,51
0,55	0,095	0,83	0,55
0,60	0,094	0,84	0,59
0,65	0,093	0,86	0,62
0,70	0,092	0,87	0,65
0,75	0,091	0,88	0,67
0,80	0,090	0,89	0,69
0,85	0,090	0,89	0,71
0,90	0,089	0,90	0,73
0,95	0,089	0,91	0,74
1,00	0,088	0,91	0,75

Применение адаптивного протокола позволяет существенно повысить качество функционирования системы. В табл. 1 приведены некоторые числовые характеристики сети связи. Здесь показаны зависимости производительности S от загрузки ρ для статического протокола. Для адаптивного протокола $S = 0{,}25$. Также показаны значения величины a для статического ($a_{\text{ст}}$) и адаптивного протокола ($a_{\text{ад}}$). При $\rho \geqslant 0{,}28$ сеть со статическим протоколом моностабильна, а при $\rho = 0{,}26$ и $\rho = 0{,}27$ она бистабильна, поэтому приведены значения a и S для каждой точки стабилизации. Сеть с адаптивным протоколом моностабильна для всех значений ρ.

Результаты получены для $\nu = 1$, $\gamma = 10$ при оптимальном адаптере $S_{\text{ад}} = 0{,}25$.

4. Область применимости асимптотических формул

Все полученные выше результаты являются асимптотическими при $N \to \infty$. Применение этих формул к исследованию реальных сетей требует определения их области применимости, т.е. при каких значениях N можно пренебрегать различиями предельной и допредельной моделей.

Исследование допредельных моделей проведем методом имитационного моделирования.

Имитационная модель описанной выше сети связи функционирует по алгоритму, работу которого можно разделить на два этапа:

1) этап инициализации. Инициализация основных параметров модели. Генерация времени поступления первой заявки в систему. Время поступления заявки распределено экспоненциально с параметром λ;

2) этап функционирования. Система работает, реагируя на следующие события:

поступление заявки от АС. Если канал свободен заявка встает на обслуживание. Время обслуживания распределено экспоненциально с параметром μ. Если канал занят, вновь поступившая заявка вместе с заявкой, которая обслуживалась, отправляются в источник повторных вызовов, в системе начинает распространяться сигнал оповещения о конфликте. Время распространения сигнала оповещения о конфликте распределено экспоненциально с параметром μ_1. Генерируется время поступления

Таблица 2

ρ	$\widehat{a}$ при $N = 50$	$\widehat{a}$ при $N = 100$	$\widehat{a}$ при $N = 150$	a при $N \to \infty$
0,30	0,17	0,17	0,17	0,17
0,35	0,27	0,27	0,29	0,29
0,40	0,37	0,37	0,37	0,38
0,45	0,45	0,44	0,45	0,45
0,50	0,50	0,50	0,50	0,51
0,55	0,54	0,54	0,54	0,55
0,60	0,58	0,58	0,59	0,59
0,65	0,62	0,61	0,61	0,62
0,70	0,63	0,63	0,64	0,65
0,75	0,66	0,66	0,67	0,67
0,80	0,68	0,68	0,68	0,69
0,85	0,70	0,70	0,71	0,71
0,90	0,71	0,72	0,73	0,73
0,95	0,73	0,73	0,73	0,74
1,00	0,75	0,75	0,75	0,75

следующей заявки от абонентских станций. Так как абонентская станция, отправившая заявку в систему, ждет ее обслуживания, время поступления следующей заявки от абонентских станций будет генерироваться с параметром $\lambda(N-i)/N$;

поступление заявки из источника повторных вызовов. Аналогично поступлению заявки от АС, за исключением того, что время поступления новой заявки генерируется только в том случае, если канал в данный момент был свободен и заявка из ИПВ смогла встать на обслуживание. Время поступления заявки из ИПВ распределено экспоненциально с параметром $i\mu\gamma/T$ для адаптивного протокола и с параметром $i\mu\gamma/N$ для статического протокола;

окончание периода обслуживания. Канал переходит в состояние “свободен” и ждет поступления следующей заявки;

окончание периода распространения сигнала оповещения о конфликте. Аналогично окончанию периода обслуживания за исключением того, что в момент прекращения распространения сигнала оповещения о конфликте генерируется время поступления следующей заявки из источника повторных вызовов.

Для адаптивного протокола состояние адаптера T изменяется непрерывно в сторону уменьшения во время всего периода функционирования системы за исключением случаев, когда величина T достигает некоторого минимального значения, ниже которого быть не может, и момента окончания сигнала оповещения о конфликте, когда она возрастает скачком на величину μ.

Модель функционирует в течение заранее заданного определенного промежутка времени, по истечении которого работа модели прекращается и идет выдача результатов моделирования.

Имитационное моделирование позволило установить следующее.

В системе, построенной на основе адаптивного протокола, при числе АС $N \geqslant 50$ можно пренебречь различиями предельной и допредельной моделей.

Результаты моделирования приведены в табл. 2, где $\widehat{a}$ – среднее число заявок в ИПВ.

Результаты получены при следующих значениях параметров $\nu = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 4$, $t_{\text{мод}} = 10000$, где $t_{\text{мод}}$ – время моделирования.

5. Заключение

Таким образом, в работе исследован адаптивный протокол случайного множественного доступа с оповещением о конфликте стабилизирующей неустойчивые сети связи. Для сети связи с конечным числом N станций найдено асимптотическое при $N \to \infty$ распределение вероятностей состояний системы. Определена величина производительности S и найдены те закономерности параметров адаптера, при которых S максимальна, а средняя задержка сообщения в сети минимальна.

Показано, что для сетей, управляемых адаптивным протоколом, явление бистабильности не возникает, а качество функционирования сети существенно повышается по сравнению со статистическими протоколами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бертсекас Д., Галлагер Р.* Сети передачи данных. М.: Мир, 1989.
2. *Назаров А. А., Юревич Н. М.* Исследование явления бистабильности в сети с протоколом Алоха для конечного числа станций // АиТ. 1996. № 9. С. 91–100.
3. *Фалин Г. И.* О неустойчивости сети Алоха // Проблемы передачи информации. 1990. № 1. С. 79–82.
4. *Цыбаков Б. С., Бакиров В. Л.* Анализ устойчивости сети с коммутацией пакетов и его приложения к построению единого подхода к синхронным и асинхронным радиосетям Алоха // Проблемы передачи информации. 1988. № 2. С. 70–85.
5. *Горцев А. М., Назаров А. А., Терпугов А. Ф.* Управление и адаптация в системах массового обслуживания. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1978.
6. *Rivest R. L.* Network control by Bayessian broadcast (Report MIT/LCS/TM-285), Cambridge, MA: MIT, Laboratory for Computer Science, 1985.
7. *Михайлов В. А.* Методы случайного множественного доступа. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук, 1979. МФТИ.
8. *Михайлов В. А.* Геометрический анализ устойчивости цепей Маркова в R_+^n и его применение к вычислению пропускной способности адаптивного протокола случайного множественного доступа // Проблемы передачи информации. 1988. № 1. С. 61–73.
9. *Назаров А. А.* Устойчивое функционирование нестабильных сетей связи с протоколами случайного множественного доступа // Проблемы передачи информации. 1997. № 2. С. 101–111.
10. *Цетлин М. Л.* Исследование по теории автоматов и моделированию биологических систем. М.: Наука, 1969.
11. *Башарин Г. П., Харкевич А. Д., Шнепс М. А.* Массовое обслуживание в телефонии. М.: Наука, 1968.
12. *Назаров А. А., Пичугин С. Б.* Исследование спутниковой сети связи методом математического моделирования // Изв. вузов. Физика. 1992. № 9. С. 120–127.
13. *Назаров А. А.* Асимптотический анализ марковизируемых систем. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1991.
14. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В. М. Вишневским.

Поступила в редакцию 17.03.98