М. Х. Прилуцкий, Программные управления двухстадийными стохастическими производственными системами, *Автомат. и телемех.*, 2020, выпуск 1, 81–92

DOI: 10.31857/S0005231020010067

Автоматика и телемеханика, № 1, 2020

© 2020 г. **М.Х. ПРИЛУЦКИЙ, д-р техн. наук (pril@iani.unn.ru)**
(Нижегородский государственный университет)

ПРОГРАММНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ ДВУХСТАДИЙНЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ СИСТЕМАМИ[1]

Рассматривается проблема программного управления некоторым классом производственных систем, функционирующих в условиях неопределенности. Строится математическая модель, дается постановка оптимизационной задачи программного управления, предлагается алгоритм построения квазиоптимального решения поставленной задачи. Приводятся примеры прикладных задач, формализуемых в рамках построенной математической модели.

Ключевые слова: стохастические производственные системы, двухстадийные системы, программное управление, квазиоптимальное решение.

DOI: 10.31857/S0005231020010067

1. Введение

Рассматривается проблема программного управления некоторым классом производственных систем, функционирующих в условиях неопределенности. В системах для изготовления продуктов используются технологические режимы, в результате применения которых производятся полуфабрикаты. Особенностями рассматриваемых производственных систем является стохастический характер изготовления полуфабрикатов и детерминированный характер производства продуктов из полуфабрикатов. Исходными данными для рассматриваемых производственных систем являются конечные множества используемых технологических режимов, полуфабрикатов и изготавливаемых продуктов производства. Выбор технологического режима определяет вероятности получения того или иного полуфабриката. Известны затраты на использование каждого технологического режима. К началу планируемого периода задан план изготовления продуктов, причем для каждого продукта определен доход, который система получит от его производства. Каждому полуфабрикату соответствует множество продуктов, любой из которых (но только один) может быть изготовлен из этого полуфабриката. При этом изготовление запланированного продукта приносит системе определенный доход. Формально функционирование рассматриваемых производственных систем можно разбить на две стадии. Первая — от применения технологического режима до изготовления полуфабриката. Эта стадия носит стохастический характер. Вторая стадия — от изготовления полуфабриката до

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 гг.» в рамках соглашения № 14.578.21.0246 (уникальный идентификатор RFMEFI57817X0246).

производства продукта. Эта стадия носит детерминированный характер. Задачи, рассматриваемые для подобных систем, будем называть двухстадийными, принимая за первую стадию процесс изготовления полуфабрикатов, а за вторую — переработку полуфабрикатов в продукты производства.

Работа является продолжением статей [1, 2], в которых решаются задачи оптимального планирования и оптимального управления. Задача оптимального планирования позволяет находить планы производства, которые являются исходными данными для решения задач оптимального управления. Решение задачи оптимального управления определяет, какие технологические режимы в процессе функционирования системы нужно применять для наилучшего выполнения заданного плана. При этом задача оптимального управления является задачей с обратной связью — выбор очередного технологического режима зависит от того, какие продукты производства уже были изготовлены. Так как использование того или иного технологического режима требует его обеспечения необходимыми материальными и трудовыми ресурсами, то для эффективного функционирования рассматриваемых производственных систем необходимо заранее, до начала планируемого периода, знать, какие технологические режимы будут использоваться в процессе производства, чтобы обеспечить их необходимыми ресурсами. Такая задача в терминах теории управляемых систем [3, 4] носит название задачи поиска программных управлений.

В [1, 2] дается литературный обзор результатов в рассматриваемой области [5–11] и приводятся примеры двухстадийных производственных систем, для которых применимы полученные в работе результаты. Это задачи оптимального планирования и управления процессом переработки газового конденсата, процессом изготовления интегральных схем и процессом производства стали в мартеновских печах [12–17]. Для решения задач программного управления в работе строится математическая модель, в рамках которой исследуются рассматриваемые задачи.

2. Постановка задачи поиска оптимального программного управления двухстадийными стохастическими производственными системами

Как и в [1, 2], пусть I — множество технологических режимов; J — множество полуфабрикатов; K — множество выпускаемых продуктов; $T = \{0, 1, \ldots, T_0\}$ — множество тактов функционирования системы; $P = \|p_{ij}\|$ — матрица вероятностей, где p_{ij} — вероятность того, что, применив технологический режим i, будет получен полуфабрикат j, $\sum_{j \in J} p_{ij} = 1$, $i \in I$, $p_{ij} \geq 0$, $i \in I$, $j \in J$; $K(j)$ — множество продуктов, любой из которых может быть изготовлен из полуфабриката j, $K(j) \subseteq K$, $j \in J$; $\vec{\pi}$ — $|K|$-мерный вектор с целочисленными неотрицательными компонентами — план производства продуктов в планируемом периоде, где π_k — количество k-х продуктов, которые должны быть выпущены в планируемом периоде, $k \in K$; c_i — затраты производственной системы, связанные с использованием i-го технологического режима, $i \in I$; g_k — доход, который получит система от производства одного запланированного k-го продукта, $k \in K$.

Множество состояний системы разобьем на два подмножества — основные и вспомогательные состояния. Основные состояния образуют множество $S = \{ \vec{s} \mid s_k \geq 0$ – целые, $s_k \leq T_0,\ k \in K\}$, где s_k определяет количество продуктов k, которые произведены в системе. Вспомогательными состояниями являются всевозможные пары $(\vec{s}, j)$, где $\vec{s} \in S$, j – параметр вспомогательного состояния, $j \in J$. Управлениями в основных состояниях являются элементы множества I – выбор технологического режима. Допустимыми управлениями во вспомогательном состоянии $(\vec{s}, j)$ являются элементы множества $K(j)$ — изготовление из полуфабриката продукта производства. Функционирование системы рассматривается на конечном числе тактов. При этом под одним тактом понимается переход системы из основного состояния в основное — от выбора технологического режима до выпуска продукта производства.

В основном состоянии $\vec{s}$, $\vec{s} \in S$ к системе применяется управление i, $i \in I$ и система с вероятностью p_{ij} переходит во вспомогательное состояние $(\vec{s}, j)$, при этом система несет потери $c_i \geq 0$ — затраты на использование технологического режима. Во вспомогательном состоянии $(\vec{s}, j)$ к системе применяется управление k, $k \in K(j)$, под воздействием которого система переходит в новое основное состояние, отличающееся от состояния $\vec{s}$ лишь в компоненте k, k-я компонента увеличивается на 1 (больше на 1 стало продукта k). При этом переходе система приобретает доход, определяемый функцией $q(\vec{s}, k, \vec{\pi}) = \begin{cases} g_k, & \text{если } s_k < \pi_k, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$ Здесь $g_k \geq 0$ — доход, который получит система от выпуска запланированного продукта k, $k \in K(j)$.

Множество всех управлений обозначим через $U = V \times W$. В общем случае управление $u \in U$ есть пара функций $v(\vec{s}, t)$ и $w(\vec{s}, j, t)$, определенных соответственно на множествах $S \times T$ и $S \times J \times T$ со значениями из множеств соответственно I и $K(j)$. Содержательно функция $v(\vec{s}, t)$ определяет, какие технологические режимы нужно применять в основных состояниях систем, а функция $w(\vec{s}, j, t)$ определяет, какие продукты нужно выпускать во вспомогательных состояниях. В общем случае введенные функции определяют управления с обратными связями, так как зависят от состояний, в которых система может оказаться в зависимости от тактов функционирования.

Для рассматриваемых задач поиска оптимальных программных управлений (управлений без обратных связей) функция $v(\vec{s}, t)$ определяется целочисленным набором $\vec{x}$, i-я компонента которого x_i задает количество технологических режимов i, которые будут применяться в планируемом периоде, $\vec{x} \in R^{|I|}$, а функция $w(\vec{s}, j, t)$ зависит только от параметра вспомогательного состояния j и рандомизированная, т.е. задается распределением вероятностей, определяемым матрицей $Y = \|y_{jk}\|$, $j \in J$, $k \in K$. Здесь y_{jk} — вероятность изготовления продукта k из полуфабриката j, $j \in J$, $k \in K$. Определенные таким образом вероятности не зависят от состояний и тактов функционирования, $\sum_{k \in K} y_{jk} = 1$, $y_{jk} \geq 0$, $j \in J$, $k \in K$.

Рассмотрим целочисленную случайную величину $\sigma_k = \sigma_k(\vec{x}, Y)$, принимающую значения из множества $\{0, 1, \ldots, T_0\}$ — сколько продуктов k будет выпущено, если в основных состояниях будут применяться технологические режимы из набора $\vec{x}$: x_1 раз первые технологические режимы, x_2 раз вторые технологические режимы, ..., $x_{|I|}$ раз $|I|$-е технологические режимы, а во вспомогательных состояниях в случае получения полуфабриката j с вероятностью y_{jk} будет выпускаться продукт k, $j \in J$, $k \in K$.

Обозначим через $F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}, Y)$ математическое ожидание полного дохода, который получит система, если известен план производства продуктов $\vec{\pi}$, количество тактов функционирования системы T_0 и к системе будут применяться управления, задаваемые набором $\vec{x}$ (какие технологические режимы и в каких количествах будут использоваться в планируемом периоде) и матрицей Y, задающей распределение вероятностей изготовления тех или иных продуктов. Тогда $F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}, Y) = \sum_{k \in K} g_k E \min(\pi_k, \sigma_k) - \sum_{i \in I} c_i x_i$, где $E \min(\pi_k, \sigma_k)$ — математическое ожидание целочисленной случайной величины $\min(\pi_k, \sigma_k)$. Действительно, если в результате применения программной стратегии, определяемой набором $\vec{x}$ и матрицей Y, будет выпущено продукта k не больше запланированного, то каждый продукт k принесет доход g_k; если будет выпущено продукта k больше запланированного, то доход принесут только выпущенные первые π_k продукты. Отсюда задача нахождения оптимальной программной стратегии для двухстадийных стохастических производственных систем сводится к решению следующей (исходной) задачи математического программирования.

Задача 1. $$F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}, Y) = \sum_{k \in K} g_k E \min(\pi_k, \sigma_k) - \sum_{i \in I} c_i x_i \to \max$$

при условиях:

$$\sum_{i \in I} x_i = T_0,$$

$$\sum_{k \in K} y_{jk} = 1, \quad j \in J,$$

$$y_{jk} = 0, \text{ если } k \notin K(j), \quad j \in J,$$

$$x_i \geq 0 \text{ – целые}, \quad i \in I,$$

$$y_{jk} \geq 0, \quad j \in J, \quad k \in K.$$

3. Нахождение квазиоптимального программного управления

Из-за существенной сложности функционала $F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}, Y)$, связанной с операцией $E \min(\pi_k, \sigma_k)$, задачу 1 даже при небольших значениях параметров решить не удается. Принципиальные трудности возникают даже при подсчете значения функционала при заданных значениях неизвестных.

Пусть $(\vec{x}^0, Y^0)$ — оптимальное решение исходной задачи 1. Под квазиоптимальным решением задачи 1 будем понимать такое ее допустимое решение $(\vec{x}^*, Y^*)$, что

$$\lim_{T_0 \to \infty} \frac{F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^0, Y^0) - F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^*, Y^*)}{F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^0, Y^0)} = 0.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу математического программирования, в которой в отличие от исходной задачи знак математического ожидания внесен под операцию поиска минимума.

Задача 2. $H(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}, Y) = \sum_{k\in K} g_k \min(\pi_k, E\sigma_k) - \sum_{i\in I} c_i x_i \to \max$
при сохраненных условиях задачи 1.

Нетрудно показать, что $E\sigma_k = \sum_{i\in I} x_i \sum_{j\in J} p_{ij} y_{jk}$, $k \in K$. Действительно, $\sum_{j\in J} p_{ij} y_{jk}$ – вероятность того, что, используя технологический режим i, изготовим продукт k, а x_i – количество i-х технологических режимов, которые будут применяться в планируемом периоде, $i \in I$, $k \in K$.

Преобразуем функционал задачи 2. Учитывая, что

$$\min(\pi_k, E\sigma_k) = -\max(-\pi_k, -E\sigma_k) = \pi_k - \pi_k - \max(-\pi_k, -E\sigma_k) = \\ = \pi_k - \max(0, \pi_k - E\sigma_k) = \pi_k - (\pi_k \otimes E\sigma_k),$$

где $\otimes$ — знак усеченной разности, получим

$$H(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}, Y) = \sum_{k\in K} g_k \pi_k - \sum_{k\in K} g_k \left(\pi_k \otimes \sum_{i\in I} x_i \sum_{j\in J} p_{ij} y_{ij}\right) - \sum_{i\in I} c_i x_i.$$

Учитывая проделанные преобразования, задачу 2 можно рассматривать как *задачу 3* минимизации функционала

$$\Phi(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}, Y) = \sum_{k\in K} g_k \left(\pi_k \otimes \sum_{i\in I} x_i \sum_{j\in J} p_{ij} y_{ij}\right) + \sum_{i\in I} c_i x_i$$

при сохраненных условиях задачи 1.

Рассмотрим следующую *задачу 4* математического программирования:

$$\Phi(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}, Y) = \sum_{k\in K} g_k \left(\pi_k \otimes \sum_{j\in J} z_{jk}\right) + \sum_{i\in I} c_i x_i \to \min \text{ — при условиях:}$$

$$\sum_{i\in I} x_i = T_0,$$
$$\sum_{k\in K} z_{jk} - \sum_{i\in I} x_i p_{ij} = 0, \quad j \in J,$$
$$z_{jk} = 0, \text{ если } k \notin K(j), \quad k \in K, \quad j \in J,$$
$$x_i \geq 0 \text{ – целые}, \; i \in I,$$
$$z_{jk} \geq 0, \quad j \in J, \quad k \in K.$$

Покажем, как по решению задачи 4 получить решение задачи 3, а тем самым и задачи 2. Пусть x'_i, z'_{jk}, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$ — решение задачи 4. Тогда решением задачи 3 будут следующие наборы:

$$x^0_i = x'_i, \quad i \in I,$$

(1)
$$y^0_{jk} = \frac{z'_{jk}}{\sum_{i\in I} x'_i p_{ij}}, \quad \text{если } \sum_{i\in I} x'_i p_{ij} > 0,$$

$$y^0_{jk} = 0, \quad \text{если } \sum_{i\in I} x'_i p_{ij} = 0, \; j \in J, \; k \in K.$$

Действительно, x_i^0, y_{jk}^0, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$ удовлетворяют ограничениям задачи 3. Пусть существуют такие x_i^*, y_{jk}^*, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$, которые удовлетворяют условиям задачи 3, и выполняется $\Phi(\pi, T_0, \vec{x}^*, Y^*) < \Phi(\pi, T_0, \vec{x}^0, Y^0)$, тогда x_i^*, $z_{jk}^* = y_{jk}^* \sum_{i \in I} x_i^* p_{ij}$, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$, удовлетворяют условиям задачи 4 и на них значение функционала меньше значения функционала задачи на x_i', z_{jk}', $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$, что противоречит условиям оптимальности наборов x_i', z_{jk}', $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$.

Избавимся в функционале задачи 4 от нелинейности, определяемой усеченной разностью. Рассмотрим *задачу 5* частично-целочисленного линейного программирования.

$$Q(\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}, Z) = \sum_{k \in K} g_k v_k + \sum_{i \in I} c_i x_i \to \min \text{ — при условиях:}$$

$$\sum_{i \in I} x_i = T_0,$$

$$\sum_{k \in K} z_{jk} - \sum_{i \in I} x_i p_{ij} = 0, \quad j \in J,$$

$$\sum_{j \in J} z_{jk} + v_k - w_k = \pi_k, \quad k \in K,$$

$$z_{jk} = 0, \quad \text{если } k \notin K(j),\ k \in K,\ j \in J,$$

$$x_i \geq 0 \text{ — целые},\ i \in I,$$

$$z_{jk} \geq 0, \quad v_k \geq 0, \quad w_k \geq 0, \quad j \in J, \quad k \in K.$$

Покажем, что решение задачи 5 определяет решение задачи 4, а тем самым и решение задачи 2. Для этого достаточно показать, что $\pi_k \otimes \sum_{j \in J} z_{jk} = v_k$, если $\pi_k > \sum_{j \in J} z_{jk}$, и $\pi_k \otimes \sum_{j \in J} z_{jk} = 0$, если $\pi_k \leq \sum_{j \in J} z_{jk}$.

Пусть z_{jk}^0, v_k^0, w_k^0, $j \in J$, $k \in K$ оптимальное решение задачи 5. Тогда для любого k, $k \in K$, либо $v_k^0 = 0$, либо $w_k^0 = 0$. Пусть это не так и существует другое оптимальное решение задачи 5 z_{jk}^*, v_k^*, w_k^*, $j \in J$, $k \in K$, для которого найдется такое k, что $v_k^* > 0$ и $w_k^* > 0$. Тогда если $v_k^* > w_k^* > 0$, то при замене $v_k' = v_k^0 - w_k^0$ и $w_k' = 0$ ограничения задачи 5 будут выполнены, а значение функционала уменьшится, что противоречит оптимальности найденного решения задачи 5. Если $w_k^* \geq v_k^* > 0$, то $v_k' = 0$, $w_k' = w_k^0 - v_k^0$ удовлетворяют ограничениям задачи 5 и уменьшают значение функционала.

Таким образом, для решения вспомогательной задачи 2 достаточно решить частично-целочисленную задачу линейного программирования 5, а затем по соотношениям (1) найти оптимальное решение задачи 2.

4. Обоснование квазиоптимальности программного управления

Теорема. Пусть $(\vec{x}^0, Y^0)$ *— оптимальное решение исходной задачи 1, а* $(\vec{x}^*, Y^*)$ *— оптимальное решение вспомогательной задачи 2.*

$$\textit{Тогда} \quad \lim_{T_0 \to \infty} \frac{F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^0, Y^0) - F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^*, Y^*)}{F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^0, Y^0)} = 0.$$

Из теоремы следует, что при замене оптимального программного управления $(\vec{x}^0, Y^0)$, получающегося при решении исходной задачи 1, на программное управление $(\vec{x}^*, Y^*)$, получающееся при решении вспомогательной задачи 2, математическое ожидание полного дохода уменьшится, однако с ростом T_0 эти потери по отношению к математическому ожиданию полного дохода при оптимальном программном управлении будут стремиться к нулю.

Доказательство теоремы основано на лемме.

Лемма. Для произвольной целочисленной случайной величины σ, $\sigma \in \in \{0, 1, \ldots, n\}$, и произвольного целого числа π

$$\min(\pi, E\sigma) - E\min(\pi, \sigma) = \frac{1}{2}(E\,|\pi - \sigma| - |E\sigma - \pi|).$$

Доказательство леммы и теоремы см. в Приложении.

5. Заключение

В статье рассматриваются задачи поиска оптимального программного управления двухстадийными стохастическими производственными системами, первая, стохастическая, стадия которых заключается в изготовлении полуфабриката, а вторая, детерминированная, — в изготовлении из полуфабриката готовой продукции. Решение этой задачи позволяет до начала планируемого периода определить, какие технологические режимы будут использованы в процессе функционирования производственной системы, и тем самым обеспечить эти режимы необходимыми ресурсами. Предлагается процедура решения вспомогательной задачи частично-целочисленного линейного программирования, позволяющая находить квазиоптимальное решение исходной задачи.

Полученные результаты положены в основу программных систем, внедренных в постоянную эксплуатацию при планировании и оперативном управлении процессом производства изделий микроэлектроники ФГУП “ФНПЦ НИИИС им. Ю.Е. Седакова” [12–14], и апробированы при решении задач оптимального планирования и управления для Сургутского завода стабилизации конденсата ООО Сургутгазпром [15–17].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы.

$$\min(\pi, E\sigma) - E\min(\pi, \sigma) = \min(\pi, E\sigma) - \sum_{i=0}^{n} \min(\pi, i) p(\sigma = i) =$$

$$= \min(\pi, E\sigma) - \sum_{i=0}^{\pi} i p(\sigma = i) - \pi \sum_{i=\pi+1}^{n} p(\sigma = i) =$$

$$= \min\left(\pi, \sum_{i=0}^{n} i p(\sigma = i)\right) - \sum_{i=0}^{\pi} i p(\sigma = i) - \pi \sum_{i=\pi+1}^{n} p(\sigma = i) =$$

$$= \min\left(\pi - \sum_{i=0}^{\pi} ip(\sigma = i), \sum_{i=\pi+1}^{\pi} ip(\sigma = i)\right) - \pi \sum_{i=\pi+1}^{n} p(\sigma = i) =$$

$$= \min\left(\pi - \pi \sum_{i=\pi+1}^{n} p(\sigma = i) - \sum_{i=0}^{n} ip(\sigma = i), \sum_{i=\pi+1}^{\pi} (i-\pi)p(\sigma = i)\right) =$$

$$= \min\left(\sum_{i=0}^{\pi}(\pi - i)p(\sigma = i), \sum_{i=\pi+1}^{n} (i-\pi)p(\sigma = i)\right).$$

Обозначим:

$$\alpha(\pi) = \sum_{i=0}^{\pi}(\pi - i)p(\sigma = i) \quad \text{и} \quad \beta(\pi) = \sum_{i=\pi+1}^{n} (i-\pi)p(\sigma = i).$$

Тогда

$$\alpha(\pi) + \beta(\pi) = \sum_{i=0}^{\pi} |\pi - i|\, p(\sigma = i) + \sum_{i=\pi+1}^{n} |\pi - i|\, p(\sigma = i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} |\pi - i|\, p(\sigma = i) = E\,|\pi - \sigma|\,.$$

С другой стороны

$$\alpha(\pi) = \sum_{i=0}^{\pi}(\pi - i)p(\sigma = i) = \pi - \sum_{i=\pi+1}^{n} (\pi - i)p(\sigma = i) =$$

$$= \pi - E\sigma + E\sigma - \sum_{i=\pi+1}^{n} (\pi - i)p(\sigma = i) =$$

$$= \pi - E\sigma + \sum_{i=0}^{n} ip(\sigma = i) - \sum_{i=\pi+1}^{n} (\pi - i)p(\sigma = i) =$$

$$= \pi - E\sigma + \sum_{i=0}^{n} ip(\sigma = i) - \pi \sum_{i=\pi+1}^{n} p(\sigma = i) - \sum_{i=\pi+1}^{n} ip(\sigma = i) =$$

$$= \pi - E\sigma + \sum_{i=\pi+1}^{n} (i - \pi)p(\sigma = i) = \pi - E\sigma + \beta(\pi).$$

Таким образом, $\alpha(\pi) + \beta(\pi) = E\,|\pi - \sigma|$ и $\alpha(\pi) - \beta(\pi) = \pi - E\sigma$. Отсюда

$$\alpha(\pi) = \frac{1}{2}(E\,|\pi - \sigma| - (E\sigma - \pi)), \quad \beta(\pi) = \frac{1}{2}(E\,|\pi - \sigma| - (\pi - E\sigma)).$$

Тогда

$$\min(\pi, E\sigma) - E\min(\pi, \sigma) = \min(\alpha(\pi), \beta(\pi)) =$$

$$= \frac{1}{2}\min(E\,|\pi - \sigma| - (E\sigma - \pi), E\,|\pi - \sigma| - (\pi - E\sigma)) =$$
$$= \frac{1}{2}(E\,|\pi - \sigma| - \min(E\sigma - \pi, \pi - E\sigma)) =$$
$$= \frac{1}{2}(E\,|\pi - \sigma| - |E\sigma - \pi|).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Из леммы следует, что

$$H(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}, Y) - F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}, Y) =$$
$$= \sum_{k\in K} g_k \min(\pi_k, E\sigma_k) - \sum_{i\in I} c_i x_i - \sum_{k\in K} g_k E\min(\pi_k, \sigma_k) + \sum_{i\in I} c_i x_i =$$
$$= \sum_{k\in K} g_k(\min(\pi_k, E\sigma_k) - E(\min(\pi_k, \sigma_k)) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k\in K} g_k(E\,|\pi_k - \sigma_k| - |E\sigma_k - \pi_k|)\right).$$

Здесь последнее равенство основано на лемме.

Полученное равенство дает оценку для значения функционала $F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}, Y)$, если известно значение функционала $H(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}, Y)$. При этом нужно учитывать, что $F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}, Y) \leq H(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}, Y)$ и $E\,|\pi - \sigma| \leq \sqrt{D(\pi, \sigma)}$, где $D(\pi, \sigma)$ — средний квадрат отклонения (дисперсия) целочисленной случайной величины σ относительно данного целого числа π.

Определим дисперсию и математическое ожидание для данного случая.

$$D(\pi_k, \sigma_k) = \sum_{i\in I} x_i \sum_{j\in J} p_{ij} y_{jk}(1 - \sum p_{ij} y_{jk}) + \left(\sum_{i\in I} x_i \sum_{j\in J} p_{ij} y_{jk} - \pi_k\right)^2;$$
$$E\sigma_k = \sum_{i\in I} x_i \sum_{j\in J} p_{ij} y_{jk}.$$

Тогда

$$H(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}, Y) - \delta(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}, Y) \leq F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}, Y) \leq H(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}, Y),$$

где

$$\delta(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}, Y) = \frac{1}{2}\sum_{k\in K} g_k \left(\sqrt{D(\pi_k, \sigma_{k)}} - |E\sigma_k - \pi_k|\right).$$

Обозначим:

$$\Delta(F^0, F^*) = \frac{F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^{\,0}, Y^0) - F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^{\,*}, Y^*)}{F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^{\,0}, Y^0)}.$$

Здесь $(\vec{x}^0, Y^0)$ — оптимальное решение исходной задачи 1, а $(\vec{x}^*, Y^*)$ — оптимальное решение задачи 2. Из того, что $F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^0, Y^0) \le H(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^0, Y^0) \le$ $\le H(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^*, Y^*)$ и $-F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^*, Y^*) \le -H(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^*, Y^*) + \delta(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^*, Y^*)$, получаем $F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^0, Y^0) - F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^*, Y^*) \le \delta(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^*, Y^*)$. Учитывая, что $F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^0, Y^0) \ge F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^*, Y^*) \ge H(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^*, Y^*) - \delta(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^*, Y^*)$, получим

$$\Delta(F^0, F^*) = \frac{F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^0, Y^0) - F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^*, Y^*)}{F(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^0, Y^0)} \le$$

$$\le \frac{\delta(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^*, Y^*)}{H(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^*, Y^{*0}) - \delta(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^*, Y^*)}.$$

Оценим числитель и знаменатель полученного выражения.

$$\delta(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^*, Y^*) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k \in K} g_k \left(\sqrt{\sum_{i \in I} x_i^* \sum_{j \in J} p_{ij} y_{jk}^* \left(1 - \sum_{j \in J} p_{ij} y_{jk}^*\right) + \left(\sum_{i \in I} x_i^* \sum_{j \in J} p_{ij} y_{jk}^* - \pi_k\right)^2} - \right.$$

$$\left. - \left| \sum_{i \in I} x_i^* \sum_{j \in J} p_{ij} y_{jk}^* - \pi_k \right| \right) \le \frac{1}{2} \sum_{i \in I} g_i \sqrt{\sum_{i \in I} x_i^* \sum_{j \in J} p_{ij} y_{jk}^* \left(1 - \sum_{j \in J} p_{ij} y_{jk}^*\right)} \le$$

$$\le \frac{1}{4} \sum_{i \in I} g_i \sqrt{\sum_{i \in I} x_i} \le \frac{|K|}{4} g \sqrt{T_0}.$$

При доказательстве этого неравенства использовалось:

$\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}$, если $a \ge 0$ и $b \ge 0$;

$$\sum_{j \in J} p_{ij} y_{jk} \left(1 - \sum_{j \in J} p_{ij} y_{jk}\right) \le \frac{1}{4};$$

$g = \max\limits_{i \in I} g_i$;

$\sum\limits_{i \in I} x_i = T_0$;

$|K|$ – мощность множества K.

Таким образом, показано, что $\delta(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^*, Y^*) \le \frac{|K|}{4} g \sqrt{T_0} = \alpha(T_0)$. Это неравенство справедливо для любых $\vec{x}, Y, \vec{\pi}, T_0$. Можно показать, что

$$H(\vec{\pi}, T_0, \vec{x}^*, Y^*) \ge \beta(T_0) = g' T_0 \left(\min_{k \in K} \max_{i \in I} \sum_{j | k \in K(j)} p_{ij} \right) \min\left(1, \frac{1}{|I|}\right).$$

Здесь $g' = \min\limits_{i \in I} g_i$. Это неравенство справедливо для любых $\vec{x}, Y, \vec{\pi}, T_0$ таких, что $\sum_{k \in K} \pi_k \geq T_0$. Очевидно, что начиная с некоторого T_0 $\beta(T_0) > \alpha(T_0)$. Тогда

$$\Delta(F^0, F^*) \leq \frac{\alpha(T_0)}{\beta(T_0) - \alpha(T_0)} =$$

$$= \frac{\frac{|K|}{4} g\sqrt{T_0}}{g' T_0 \left(\min\limits_{k \in K} \max\limits_{i \in I} \sum_{j | k \in K(j)} p_{ij}\right) \min\left(1, \frac{1}{|I|}\right) - \frac{|K|}{4} g \sqrt{T_0}},$$

отсюда

$$\lim_{T_0 \to \infty} \Delta(F^0, F^*) = 0.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прилуцкий М.Х.* Оптимальное планирование двухстадийных стохастических производственных систем // АиТ. 2014. № 8. С. 37–47.

   Prilutskii M.Kh. Optimal Planning for Two-Stage Stochastic Industrial Systems // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 8. P. 1384–1392.
2. *Прилуцкий М.Х.* Оптимальное управление двухстадийными стохастическими производственными системами // АиТ. 2018. № 5. С. 69–82.

   Prilutskii M.Kh. Optimal Management of Two-Stage Stochastic Production Systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 5. P. 830–840.
3. *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971.
4. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
5. *Kempf K., Keskinocak P., Uzsoy R.* (ed.) Planning Production and Inventories in the Extended Enterprise // Int. Ser. Oper. Res. & Management Sci. V. 152. N.Y.: Springer, 2010.
6. *Pinedo M.L.* Planning and Scheduling in Manufacturing and Services. N.Y.: Springer-Verlag, 2005.
7. *Weglarz J.* (ed.) Project Scheduling: Recent Models, Algorithms and Applications. N.Y.: Springer, 1999.
8. *Sprecher A.* Resource-constrained project scheduling: Exact methods for the multi-mode Case / Ser. Lect. Notes Econom. Math. Syst. V. 409. Berlin, 1994.
9. *Hapke M., Jaszkiewicz A., Słowiński R.* Fuzzy Multi-Mode Resource-Constrained Project Scheduling with multiple Objectives // Węglarz J. (ed.) Project Scheduling. Int. Ser. Oper. Res. & Management Sci. V. 14. Boston: Springer, 1999.
10. *Armbruster D., Fonteijn J., Wienke M.* Modeling Production Planning and Transient Clearing Functions // Logist. Res. 2012. V. 5. No. 3–4. P. 133–139.
11. *Bügler M., Borrmann A.* Using Swap-Based Search Trees to obtain Solutions for Resource Constrained Project Scheduling Problems // Proc. 85 Annual Meeting Int. Associat. Appl. Math. Mechan. (GAMM). 2014. V. 14. No. 1. P. 809–810.
12. *Прилуцкий М.Х., Власов В.С.* Оптимизационные задачи распределения ресурсов при планировании производства микроэлектронных изделий // Системы управления и информационные технологии. 2009. № 1. С. 38–43.

13. *Прилуцкий М.Х.* Многокритериальные многоиндексные задачи объёмно-календарного планирования // Изв. Акад. наук. Теория и системы управления. 2007. № 1. С. 78–82.

14. *Прилуцкий М.Х., Власов В.С., Кривошеев О.В.* Задачи оптимального планирования как задачи распределения ресурсов в сетевых канонических структурах // Информационные технологии. 2017. Т. 23. № 9. С. 650–657.

15. *Прилуцкий М.Х., Костюков В.Е.* Оптимизационные задачи добычи газа и переработки газового конденсата // Автоматизация в промышленности. 2008. № 6. С. 20–23.

16. *Прилуцкий М.Х., Костюков В.Е.* Потоковые модели для предприятий с непрерывным циклом изготовления продукции // Информационные технологии. 2007. № 10. С. 47–52.

17. *Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х.* Многоиндексные задачи оптимального планирования производства // АиТ. 2010. № 10. С. 148–155.

    Afraimovich L.G., Prilutskii M.Kh. Multiindex Optimal Production Planning Problems // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 10. P. 2145–2151.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 18.06.2018

После доработки 24.06.2019

Принята к публикации 18.07.2019