

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Баландин, Р. С. Бирюков, М. М. Коган, Оптимальное управление максимальными уклонениями выходов линейной нестационарной системы на конечном интервале времени, *Автомат. и телемех.*, 2019, выпуск 10, 37–61

DOI: 10.1134/S0005231019100027

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.222.91.173

27 декабря 2024 г., 13:45:10



© 2019 г. Д.В. БАЛАНДИН, д-р физ.-мат. наук (dbalandin@yandex.ru)  
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского),  
Р.С. БИРЮКОВ, канд. физ.-мат. наук (biryukovrs@gmail.com),  
М.М. КОГАН, д-р физ.-мат. наук (mkogan@nngasu.ru)  
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНЫМИ УКЛОНЕНИЯМИ ВЫХОДОВ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ<sup>1</sup>

Вводится понятие максимального отклонения выхода линейной нестационарной системы на конечном интервале времени как максимального значения максимальной по времени евклидовой нормы выхода при условии, что сумма квадрата энергии внешнего возмущения и квадратичной формы начального состояния системы равна единице. Максимальное отклонение характеризуется в терминах решений дифференциальных матричных уравнений или неравенств. Введено модифицированное понятие ограниченности системы на конечном интервале при внешнем и начальном возмущениях и установлена его связь с понятием максимального отклонения. Получены необходимые и достаточные условия ограниченности системы на конечном интервале. Показано, что синтез оптимальных управлений, в том числе и многокритериальных, минимизирующих максимальные отклонения нескольких выходов, а также управлений, обеспечивающих ограниченность системы, осуществляется в терминах линейных матричных неравенств.

*Ключевые слова:* максимальное отклонение выхода, линейная нестационарная система, обобщенная  $H_2$  норма, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.1134/S0005231019100027

### 1. Введение

Одно из обязательных требований к системе управления заключается в том, чтобы значения целевых переменных объекта и системы управления находились в определенных границах по отношению к их номинальным значениям несмотря на внешние возмущения и ненулевые начальные условия. Чем уже эти границы, т.е. чем меньше максимальные отклонения, тем эффективнее система управления.

Проблема больших отклонений, вызванных ненулевыми начальными условиями, или, как ее иногда называют, проблема всплеска была рассмотрена А.А. Фельдбаумом [1], а затем Р.Н. Измайловым [2]. В [3] была поставлена и решена классическая задача Б.В. Булгакова о накоплении ограниченных возмущений, и в [4] приведено ее обобщение на случай нескольких переменных.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 18-41-520002, 19-01-00289).

В [5] находится наихудшее ограниченное скалярное возмущение, доставляющее наибольшее значение отклонению выхода системы в конечный момент времени. Различные способы вычисления матричной экспоненты и наличие у ее нормы характерных максимумов демонстрируются в [6]. Верхние оценки максимальных отклонений при всплеске были выведены в терминах решений линейных матричных неравенств в [7, 8]. В последнее время активно занимаются проблемой всплеска в лаборатории им. Я.З. Цыпкина ИПУ РАН [9–11]. Понятие обобщенной  $H_2$  нормы, отвечающее максимальному отклонению при внешнем возмущении с известной энергией ( $L_2$  нормой) и нулевых начальных условиях, было введено D.A. Wilson [12, 13]. В [14] получены оценки обобщенной  $H_2$  нормы для непрерывно-дискретных систем.

Приведенные выше исследования в большей своей части касались анализа максимальных отклонений и всплесков. Что касается задачи синтеза управления, то в [15] для непрерывных систем и в [16] для дискретных систем был получен оптимальный регулятор по выходу на бесконечном горизонте, реализация которого требует решений уравнения Риккати и задачи выпуклого программирования. В [17] для непрерывных систем и в [18] для дискретных систем были синтезированы законы управления, минимизирующие верхние оценки всплесков, вызванных неизвестным начальным возмущением, а в [19, 20] были получены законы управления, минимизирующие максимальное отклонение выхода непрерывной системы при нулевом начальном состоянии и внешнем возмущении с заданной энергией на бесконечном горизонте. Заметим, что исследования максимальных отклонений при внешнем ограниченном возмущении, т.е. из класса  $l_\infty$ , развивающие в определенном смысле задачу Б.В. Булгакова, проводились в рамках теории  $l_1$ -оптимального управления в [21, 22] и в других работах, но здесь далее эта тема не рассматривается.

Особую трудность представляют задачи управления максимальными отклонениями при неопределенных начальных условиях и внешнем возмущении на конечном временном интервале. В рамках концепции так называемой практической устойчивости, которая в западных публикациях получила название устойчивости на конечном интервале (“finite-time stability”), в [23, 24] были получены условия, при выполнении которых состояние линейной нестационарной системы на заданном конечном интервале при любом начальном состоянии из некоторой ограниченной области в отсутствие внешних возмущений не покидает в каждый момент времени заданные, например, эллипсоидальные области. Эти условия выражаются в терминах решений матричных дифференциальных уравнений или неравенств Ляпунова, численная дискретизация которых позволяет синтезировать нестационарные обратные связи, обеспечивающие указанную устойчивость замкнутой системы. В [25] в рамках так называемой концепции устойчивости по входу и выходу на конечном интервале (“input-output finite-time stability”) были синтезированы обратные связи, при которых выход линейной нестационарной системы с нулевыми начальными условиями находится в заданных пределах на конечном интервале при любых внешних возмущениях из определенного класса. Что касается максимальных отклонений на конечном интервале при наличии обоих факторов, т.е. при неопределенных начальных условиях и внешнем возмущении,

то в [26] приведены достаточные условия ограниченности системы на конечном интервале при ненулевых начальных условиях (“finite-time boundedness with non-zero initial state”). В полной мере проблема оптимального управления, минимизирующего максимальные отклонения на конечном интервале при наличии неопределенных начальных условий и внешнего возмущения, не решена до сих пор.

В данной статье предпринимается попытка перейти от оценки максимального отклонения выхода линейной нестационарной системы на конечном интервале к точному значению так называемого максимального уклонения выхода при внешнем и начальном возмущениях, понимаемому как максимальное значение максимальной по времени евклидовой нормы выхода при условии, что сумма квадрата энергии внешнего возмущения и квадратичной формы начального состояния системы равна единице. Для этого здесь применяется вариационный подход, подобно тому, как это делалось в [27, 28] в задаче  $H_\infty$  оптимального управления при ненулевых начальных условиях для линейного нестационарного объекта на конечном горизонте и в [29, 30] для линейного стационарного объекта на бесконечном горизонте. Максимальные уклонения выхода при внешнем возмущении и нулевом начальном состоянии, а также при неопределенном начальном состоянии в отсутствие внешнего возмущения тоже определяются соответствующим образом. Максимальные уклонения характеризуются в терминах решений матричного дифференциального уравнения, а затем в терминах решений линейных матричных неравенств. Показано, что условия устойчивости по входу и выходу и условия ограниченности линейной нестационарной системы на конечном интервале могут быть сформулированы в терминах соответствующих максимальных уклонений. Введено модифицированное понятие ограниченности системы на конечном интервале при внешнем и начальном возмущениях, для которого получены необходимые и достаточные условия. Синтезированы оптимальные законы управления, минимизирующие максимальные уклонения, в том числе многокритериальные, и законы управления, обеспечивающие ограниченность системы на конечном интервале при внешнем и начальном возмущениях.

## 2. Максимальное уклонение при внешнем и начальном возмущениях

Рассмотрим динамический объект, описываемый неавтономной системой линейных дифференциальных уравнений:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)v, & x(t_0) &= x_0, \\ z &= C(t)x, \end{aligned}$$

где  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  – состояние объекта,  $v \in L_2$  – возмущение, действующее на объект, принадлежащее классу интегрируемых с квадратом на отрезке  $[t_0, T_0]$  функций времени,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  – выход объекта. Под максимальным уклонением выхода системы (2.1) при начальном и внешнем возмущениях на конечном

интервале  $[t_0, T_0]$  будем понимать величину

$$(2.2) \quad J_{0,v} = \sup_{x_0, v \in L_2} \frac{\sup_{t \in [t_0, T_0]} |z(t)|}{\left(x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[t_0, T_0]}^2\right)^{1/2}},$$

где  $|\cdot|$  обозначает евклидову норму вектора, а

$$\|v\|_{[t_0, t_1]}^2 = \int_{t_0}^{t_1} |v(t)|^2 dt.$$

Весовая матрица  $R = R^T > 0$  отражает относительную важность учета неопределенностей начальных условий и внешнего возмущения: чем “больше”  $R$ , тем больший вес придается неопределенности в начальных условиях. Величину (2.2) можно рассматривать как индуцированную норму линейного оператора, порожденного системой (2.1) и отображающего пару  $(x_0, v(t)) \in \mathbb{R}^{n_x} \times L_2[t_0, T_0]$  в  $z(t) \in L_\infty[t_0, T_0]$ .

Максимальное уклонение (2.2) может быть записано в виде

$$(2.3) \quad J_{0,v} = \sup_{T \in [t_0, T_0]} \sup_{x_0, v \in L_2} \frac{|z(T)|}{\left(x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[t_0, T]}^2\right)^{1/2}}.$$

Заметим, что в (2.3) величина  $|z(T)|$  для каждого  $T$  зависит от внешнего возмущения на отрезке  $[t_0, T]$ , поэтому точная верхняя грань по возмущениям берется, фактически, только по всем возмущениям на этом отрезке. Это скажется на том, что, как будет показано далее, наилучшие начальное состояние и возмущение, максимизирующие этот функционал, определяются неоднозначно. Кроме того, ясно, что в силу линейности системы и однородности функционала наилучшие начальное состояние и возмущение определяются с точностью до постоянного множителя.

В частном случае, когда начальные условия в системе (2.1) нулевые, максимальным уклонением выхода при внешнем возмущении назовем величину

$$(2.4) \quad J_v = \sup_{v \in L_2} \frac{\sup_{t \in [t_0, T_0]} |z(t)|}{\|v\|_{[t_0, T_0]}} = \sup_{T \in [t_0, T_0]} \sup_{v \in L_2} \frac{|z(T)|}{\|v\|_{[t_0, T]}}.$$

По аналогии со случаем стационарной системы и бесконечного горизонта величина  $J_v$  может быть названа обобщенной  $H_2$  нормой.

В другом частном случае, когда внешнее возмущение отсутствует, максимальное уклонение выхода при начальном возмущении определим как

$$(2.5) \quad J_0 = \sup_{x_0 \neq 0} \frac{\sup_{t \in [t_0, T_0]} |z(t)|}{\left(x_0^T R^{-1} x_0\right)^{1/2}} = \sup_{T \in [t_0, T_0]} \sup_{x_0 \neq 0} \frac{|z(T)|}{\left(x_0^T R^{-1} x_0\right)^{1/2}}.$$

Теорема 2.1. Для системы (2.1) имеют место следующие утверждения:

1. Максимальное уклонение выхода при начальном и внешнем возмущениях на конечном отрезке  $[t_0, T_0]$  определяется формулой

$$(2.6) \quad J_{0,v} = \sup_{t \in [t_0, T_0]} \lambda_{\max}^{1/2} [C(t)Y_{0,v}(t)C^T(t)],$$

где  $\lambda_{\max}(\cdot)$  – максимальное собственное значение соответствующей матрицы, а  $Y_{0,v}(t)$  есть решение дифференциального матричного уравнения

$$(2.7) \quad \dot{Y} = A(t)Y + YA^T(t) + B(t)B^T(t)$$

с начальным условием  $Y(t_0) = R$ . Максимальное уклонение  $J_0$  при начальном возмущении определяется как

$$(2.8) \quad J_0 = \sup_{t \in [t_0, T_0]} \lambda_{\max}^{1/2} [C(t)Y_0(t)C^T(t)],$$

где  $Y_0(t)$  – решение уравнения (2.7),  $B(t) \equiv 0$  с начальным условием  $Y(t_0) = R$ . Максимальное уклонение  $J_v$  при внешнем возмущении определяется как

$$(2.9) \quad J_v = \sup_{t \in [t_0, T_0]} \lambda_{\max}^{1/2} [C(t)Y_v(t)C^T(t)],$$

где  $Y_v(t)$  – решение уравнения (2.7) с начальным условием  $Y(t_0) = 0$ ;

2. Наихудшие внешнее возмущение  $v_*(t)$  и вектор начальных условий  $x_0^*$  по отношению к максимальному уклонению (2.2) на конечном отрезке  $[t_0, T_0]$  определяются так:

$$(2.10) \quad v_*(t) = gB^T(t)Y^{-1}(t)s(t), \quad x_0^* = gs(t_0),$$

где  $s(t)$  – решение задачи Коши для системы

$$(2.11) \quad \dot{x} = [A(t) + B(t)B^T(t)Y^{-1}(t)]x, \quad x(T_*) = e_{\max} (Y(T_*)C^T(T_*)C(T_*)),$$

$Y(t)$  – решение уравнения (2.7),  $T_*$  – момент времени, в который

$$\lambda_{\max} [C(T_*)Y(T_*)C^T(T_*)] = \sup_{t \in [t_0, T_0]} \lambda_{\max} [C(t)Y(t)C^T(t)],$$

$e_{\max}(\cdot)$  – нормированный собственный вектор матрицы, отвечающий ее максимальному собственному значению,

$$(2.12) \quad g = \left( s^T(t_0)R^{-1}s(t_0) + \int_{t_0}^{T_*} s^T(\tau)Y^{-1}(\tau)B(\tau)B^T(\tau)Y^{-1}(\tau)s(\tau)d\tau \right)^{-1/2}.$$

*Замечание 1.* Из доказательства теоремы 2.1, приведенного в Приложении, следует, что наихудшее возмущение по отношению к функционалу  $J_{0,v}$  определяется неоднозначно: на отрезке  $[t_0, T_*]$  оно совпадает с наихудшим возмущением  $v_*(t)$ ,  $t \in [t_0, T_*]$ , по отношению к вспомогательному функционалу  $\bar{J}(v) = |z(T_*)|^2$ , а на отрезке  $[T_*, T_0]$  оно не влияет на максимальное уклонение выхода и, следовательно, может быть продолжено произвольным образом. Действительно, пусть  $\bar{v}_*(t)$ ,  $t \in [t_0, T_0]$ , – произвольное возмущение, совпадающее с  $v_*(t)$  на интервале  $[t_0, T_*]$ . Тогда оно также будет наихудшим по отношению к функционалу  $J_{0,v}$ , так как

$$\begin{aligned} J_{0,v} &\geq \sup_{T \in [t_0, T_0]} \frac{|z(T)|}{(x_0^{*\text{T}} R^{-1} x_0^* + \|\bar{v}_*\|_{[t_0, T]}^2)^{1/2}} \geq \frac{|z(T_*)|}{(x_0^{*\text{T}} R^{-1} x_0^* + \|\bar{v}_*\|_{[t_0, T_*]}^2)^{1/2}} = \\ &= \frac{|z(T_*)|}{(x_0^{*\text{T}} R^{-1} x_0^* + \|v_*\|_{[t_0, T_*]}^2)^{1/2}} = J_{0,v}. \end{aligned}$$

При этом не исключается возможность того, что при разных наихудших возмущениях момент  $T_*$  может быть разным, но в любом случае значение максимального уклонения будет одно и то же. Ясно, что “бóльшие” значения возмущения на отрезке  $[T_*, T_0]$  вызовут “бóльшие” значения выхода, однако максимальное уклонение выхода, понимаемое как отношение (2.2), не превысит величину  $|z(T_*)|$ , которая совпадает с максимальным уклонением, так как

$$x_0^{*\text{T}} R^{-1} x_0^* + \int_{t_0}^{T_*} |v_*(t)|^2 dt = 1.$$

Один из возможных способов определения наихудшего внешнего возмущения на всем отрезке  $[t_0, T_0]$  задается формулой (2.10), другой – определить  $v_*(t)$ ,  $t \in [t_0, T_*]$ , как в (2.10) и  $v_*(t) = 0$ ,  $t \in [T_*, T_0]$ .

*Замечание 2.* Из доказательства теоремы 2.1 следует, что решение  $Y(t)$  уравнения (2.7) при  $Y(t_0) = 0$  монотонно не убывает по времени. Отсюда следует, что для стационарной системы функция  $\lambda_{\max}^{1/2}[CY(t)C^{\text{T}}]$  также монотонно не убывает. Это означает, что

$$J_v = \lambda_{\max}^{1/2} [CY_v(T_0)C^{\text{T}}],$$

т.е. максимум по  $T$  из максимальных по всем допустимым возмущениям значений отношения евклидовой нормы выхода на конце интервала  $[t_0, T]$  к  $L_2$  норме возмущения на этом интервале для стационарной системы при нулевых начальных условиях достигается на конце интервала, т.е. при  $T = T_0$  (см. (2.4)). Стоит добавить, что при неограниченном увеличении  $T_0$  максимальное уклонение  $J_v$  выхода устойчивой стационарной системы стремится к величине  $\lambda_{\max}^{1/2}(CY_*C^{\text{T}})$ , где матрица  $Y_*$ , называемая граммianом управляемости, является решением уравнения

$$AY + YA^{\text{T}} + BB^{\text{T}} = 0.$$

В этом случае можно говорить о максимальном уклонении выхода на бесконечном горизонте, которое совпадает с одним из вариантов обобщенной  $H_2$  нормы стационарной системы, введенной в [12].

*Замечание 3.* Доказательство теоремы 2.1 показывает, что по траектории системы выполняется равенство

$$(2.13) \quad x^T(t)Y_{0,v}^{-1}(t)x(t) = x_0^T R^{-1}x_0 + \|v\|_{[t_0,t]}^2 - \|v - B^T Y_{0,v}^{-1}x\|_2^2.$$

Это наводит на мысль о том, что множество достижимости системы (2.1) в момент времени  $t$ , т.е. множество состояний, в которые может попасть вектор ее решений  $x(t)$  при всевозможных начальных состояниях и возмущениях, удовлетворяющих совместно ограничению  $x_0^T R^{-1}x_0 + \|v\|_{[t_0,t]}^2 \leq 1$ , представляет собою эллипсоид  $\mathcal{E}(Y_{0,v}(t)) = \{x : x^T Y_{0,v}^{-1}(t)x \leq 1\}$ , матрица которого является решением уравнения (2.7). Действительно, из (2.13) следует, что для всех указанных начальных состояний и возмущений выполняется неравенство  $x^T(t)Y_{0,v}^{-1}(t)x(t) \leq 1$ , т.е.  $x(t) \in \mathcal{E}(Y_{0,v}(t))$ . Как нетрудно видеть из (2.13), каждая точка этого эллипсоида будет конечной для решения системы при возмущении  $v(\sigma) = B^T Y_{0,v}^{-1}(\sigma)x(\sigma)$ ,  $\sigma \in [t_0, t]$  и некотором начальном состоянии  $x_0 \in \mathcal{E}(R)$ . Множеством достижимости системы (2.1) в момент времени  $t$  в отсутствие возмущений при начальных состояниях из эллипсоида  $\mathcal{E}(R)$  является эллипсоид  $\mathcal{E}(Y_0(t))$ , а множеством достижимости при нулевых начальных условиях и возмущениях, для которых  $\|v\|_{[t_0,t]}^2 \leq 1$ , является эллипсоид  $\mathcal{E}(Y_v(t))$ . К этому добавим, что  $Y_{0,v}(t) = Y_0(t) + Y_v(t)$  в силу того, что решение неоднородного дифференциального уравнения (2.7) суть сумма соответствующего решения однородного уравнения и решения неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями.

### 3. Устойчивость и ограниченность системы на конечном интервале времени

Напомним, что согласно [26] система называется ограниченной на конечном интервале  $[t_0, T_0]$  при ненулевых начальных условиях и внешнем возмущении из класса  $L_2$  при заданных положительных параметрах  $c_1, c_2, d$  ( $c_1 < c_2$ ) и положительно определенной матрице  $\Gamma(t)$ , если

$$(3.1) \quad x^T(t_0)\Gamma(t_0)x(t_0) \leq c_1 \Rightarrow x^T(t)\Gamma(t)x(t) < c_2 \\ \forall t \in [t_0, T_0], \quad \forall v : \|v\|_{[t_0, T_0]}^2 \leq d.$$

Если для максимального уклонения выхода  $z = \Gamma^{1/2}(t)x$  при выборе  $R = \Gamma^{-1}(t_0)$  справедливо неравенство

$$(3.2) \quad J_{0,v}^2 = \sup_{x_0, v \in L_2} \frac{\sup_{t \in [t_0, T_0]} x^T(t)\Gamma(t)x(t)}{x_0^T \Gamma(t_0)x_0 + \|v\|_{[t_0, T_0]}^2} < \frac{c_2}{c_1 + d},$$

то система ограничена для заданных  $c_1, c_2, d$  и  $\Gamma(t)$ . С учетом теоремы 2.1 это условие совпадает с достаточным условием ограниченности системы



на конечном интервале, полученным в [26]. Неравенство (3.2) не является необходимым условием ограниченности системы, так как из неравенства  $J_{0,v}^2 \geq c_2/(c_1 + d)$  при  $x^T(t_0)\Gamma(t_0)x(t_0) \leq c_1$  и  $\|v\|_{[t_0, T_0]}^2 \leq d$  не следует, вообще говоря, неравенство  $x^T(t)\Gamma(t)x(t) \geq c_2$ , т.е. система может оставаться ограниченной в смысле определения (3.1).

Модифицируем определение (3.1) и дадим следующее определение ограниченности системы на конечном интервале времени при заданных положительных параметрах  $s_1, s_2$  ( $s_1 < s_2$ ) и положительно определенной матрице  $\Gamma(t)$ :

$$(3.3) \quad x^T(t_0)\Gamma(t_0)x(t_0) + \|v\|_2^2 \leq s_1 \Rightarrow x^T(t)\Gamma(t)x(t) < s_2 \quad \forall t \in [t_0, T_0].$$

Необходимые и достаточные условия ограниченности системы на конечном интервале в смысле определения (3.3) формулируются следующим образом.

*Теорема 3.1. Система (2.1) является ограниченной на конечном интервале  $[t_0, T_0]$  при заданных  $s_1, s_2$  ( $s_1 < s_2$ ) и  $\Gamma(t)$  в смысле определения (3.3) тогда и только тогда, когда максимальное уклонение выхода  $z = \Gamma^{1/2}(t)x$  при  $R = \Gamma^{-1}(t_0)$  удовлетворяет неравенству  $J_{0,v}^2 < s_2/s_1$  или, другими словами, когда выполнено условие*

$$(3.4) \quad \lambda_{\max} \left[ \Gamma^{1/2}(t)Y(t)\Gamma^{1/2}(t) \right] < s_2/s_1 \quad \forall t \in [t_0, T_0],$$

где  $Y(t)$  – решение уравнения (2.7) при  $Y(t_0) = \Gamma^{-1}(t_0)$ .

*Замечание 4.* Из теоремы 3.1 следует, что необходимые и достаточные условия устойчивости на конечном интервале при заданных  $c_1, c_2$  и  $\Gamma(t)$ , когда отсутствует внешнее возмущение, понимаемой как

$$x^T(t_0)\Gamma(t_0)x(t_0) \leq c_1 \Rightarrow x^T(t)\Gamma(t)x(t) < c_2 \quad \forall t \in [t_0, T_0],$$

или устойчивости по входу и выходу на конечном интервале при заданных  $c_2, d$  и  $\Gamma(t)$ , когда начальное состояние нулевое, понимаемой как

$$\|v\|_{[t_0, T_0]}^2 \leq d \Rightarrow x^T(t)\Gamma(t)x(t) < c_2 \quad \forall t \in [t_0, T_0],$$

выражаются неравенством

$$(3.5) \quad \lambda_{\max} \left[ \Gamma^{1/2}(t)Y(t)\Gamma^{1/2}(t) \right] < \gamma^2 \quad \forall t \in [t_0, T_0],$$

где  $Y(t)$  – решение уравнения (2.7) при  $B(t) \equiv 0$ ,  $Y(t_0) = \Gamma^{-1}(t_0)$  и  $\gamma^2 = c_2/c_1$  в первом случае и при  $Y(t_0) = 0$  и  $\gamma^2 = c_2/d$  во втором случае. Эти условия при согласовании обозначений совпадают с результатами [23, 24] и [25] соответственно.

#### 4. Оптимальное управление максимальным уклонением

Рассмотрим теперь нестационарную систему с управлением:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)v + B_u(t)u, & x(t_0) &= x_0, \\ z &= C(t)x + D(t)u, \end{aligned}$$

где  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  – управление. Поставим задачу построения оптимального управления в форме обратной связи  $u(t, x) = \Theta(t)x$ ,  $t \in [t_0, T_0]$ , минимизирующего максимальное уклонение выхода замкнутой системы

$$(4.2) \quad J[\Theta(t)] = \sup_{x_0, v \in L_2} \frac{\sup_{t \in [t_0, T_0]} |z(t)|}{\left(x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[t_0, T_0]}^2\right)^{1/2}}.$$

Иначе говоря, требуется найти переменные коэффициенты обратной связи  $\Theta(t)$ , минимизирующие функционал  $J[\Theta(t)]$ . Уравнения замкнутой системы имеют вид:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A_c(t)x + B(t)v, & x(t_0) &= x_0, \\ z &= C_c(t)x, \end{aligned}$$

где  $A_c(t) = A(t) + B_u(t)\Theta(t)$ ,  $C_c(t) = C(t) + D(t)\Theta(t)$ .

Применяя теорему 2.1, получим

$$(4.4) \quad J[\Theta(t)] = \sup_{t \in [t_0, T_0]} \lambda_{\max}^{1/2} [C_c(t)Y_*(t)C_c^T(t)],$$

где матрица  $Y_*(t)$  есть решение дифференциального матричного уравнения

$$(4.5) \quad \dot{Y} = A_c(t)Y + YA_c^T(t) + B(t)B^T(t), \quad Y(t_0) = R.$$

Для решения поставленной задачи введем матрицу  $Z(t) = \Theta(t)Y(t)$  и перейдем от задачи (4.4), (4.5) к эквивалентной задаче оптимального управления, которая с учетом леммы Шура сформулирована как задача полуопределенного программирования.

*Теорема 4.1. Оптимальное управление в задаче минимизации максимального уклонения выхода системы (4.1) на конечном отрезке  $[t_0, T_0]$  имеет матрицу обратной связи  $\Theta_*(t) = Z_*(t)Y_*^{-1}(t)$ , где  $Z_*(t)$ ,  $Y_*(t)$  – решение задачи минимизации  $\gamma^2$  при ограничениях:*

$$(4.6) \quad \begin{aligned} &\dot{Y}(t) - A(t)Y(t) - Y(t)A^T(t) - B_u(t)Z(t) - Z^T(t)B_u^T(t) - B(t)B^T(t) = 0, \\ &\begin{pmatrix} Y(t) & \star \\ C(t)Y(t) + D(t)Z(t) & \gamma^2 I \end{pmatrix} \geq 0, \quad Y(t_0) = R \quad \forall t \in [t_0, T_0]. \end{aligned}$$

Для вычисления искомых параметров обратной связи проведем дискретизацию указанной задачи. Введем на отрезке  $[t_0, T_0]$  равномерную сетку  $t_k = t_{k-1} + h$ ,  $k = 1, \dots, N$ , где  $h = (T_0 - t_0)/N$ , и запишем дискретный аналог рассматриваемой задачи:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} &\min \gamma^2 : \\ &Y_{k+1} - Y_k - h (A_k Y_k + Y_k A_k^T + B_{u,k} Z_k + Z_k^T B_{u,k}^T + B_k B_k^T) = 0, \\ &\begin{pmatrix} Y_k & \star \\ C_k Y_k + D_k Z_k & \gamma^2 I \end{pmatrix} \geq 0, \quad Y_0 = R; \quad k = 0, \dots, N-1, \end{aligned}$$

где индекс  $k$  указывает на значение в момент времени  $t_k$ . Решив эту задачу полуопределенного программирования относительно неизвестных  $Y_k, Z_k, k = 0, \dots, N - 1$  и  $\gamma^2$ , найдем матрицы  $\Theta_k = Z_k Y_k^{-1}$ .

Если система (4.1) без управления не является ограниченной в смысле определения (3.3) на конечном отрезке  $[t_0, T_0]$  при данных  $s_1, s_2$  и  $\Gamma(t)$ , то возникает вопрос о существовании нестационарной линейной обратной связи, при которой замкнутая система обладает этим свойством. Принимая во внимание теорему 3.1, приходим к следующему утверждению.

*Теорема 4.2. Для существования закона управления вида  $u(t) = \Theta(t)x(t)$ , при котором система (4.1) является ограниченной на конечном отрезке  $[t_0, T_0]$  при данных  $s_1, s_2$  и  $\Gamma(t)$ , необходимо и достаточно, чтобы задача*

$$(4.8) \quad \begin{aligned} & \dot{Y}(t) - A(t)Y(t) - Y(t)A^T(t) - B_u(t)Z(t) - Z^T(t)B_u^T(t) - B(t)B^T(t) = 0, \\ & \begin{pmatrix} Y(t) & \star \\ \Gamma^{1/2}(t)Y(t) & (s_2/s_1)I \end{pmatrix} \geq 0, \quad Y(t_0) = \Gamma^{-1}(t_0) \quad \forall t \in [t_0, T_0] \end{aligned}$$

*была разрешима относительно неизвестных матричных функций  $Y(t)$  и  $Z(t)$ . Если это условие выполнено, то матрица искомой обратной связи определяется как  $\Theta(t) = Z(t)Y^{-1}(t)$ .*

Проверка выполнения этого условия и нахождение матриц параметров соответствующей обратной связи осуществляются путем дискретизации (4.8) и проверки разрешимости соответствующих линейных матричных неравенств.

## 5. Многокритериальные управления максимальными уклонениями

При оптимизации максимального уклонения определенного выхода системы некоторые переменные и управление могут принимать достаточно большие значения. В связи с этим целесообразно рассмотреть многокритериальную задачу управления максимальными уклонениями нескольких выходов. Для синтеза многокритериального управления, рассмотренного далее, потребуется расширить понятие максимального уклонения на случай, когда выход системы составлен из нескольких векторов разных, вообще говоря, размерностей.

Рассмотрим систему:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)v, \quad x(t_0) = x_0, \\ z &= \text{col}(z_1, \dots, z_m), \quad z_i = C^{(i)}(t)x, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

выход которой состоит из  $m$  векторов  $z_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ . Введем некоторые обозначения. Пусть вектор  $a \in \mathbb{R}^{n_a}$  представлен в виде  $a = \text{col}(a_1, \dots, a_m)$ , где  $a_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \sum_{i=1}^m n_i = n_a$ . Обозначим обобщенную  $\infty$ -норму вектора  $a$  через  $|a|_{g\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} |a_i|$ , где  $|a_i|$  – евклидова норма вектора  $a_i$ . В частных случаях эта норма совпадает с обычной  $\infty$ -нормой: если  $m = 1$ , то  $|a|_{g\infty} = |a|$ , а если  $m = n_a$ , то  $|a|_{g\infty} = |a|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n_a} |a_i|$ , где  $a_i$  – компоненты вектора  $a$ .

Максимальное уклонение комбинированного выхода  $z$  этой системы на конечном интервале  $[t_0, T_0]$  при начальном и внешнем возмущениях определим как

$$(5.2) \quad \begin{aligned} J_{0,v} &= \sup_{x_0, v \in L_2} \frac{\sup_{t \in [t_0, T_0]} \max_{i=1, \dots, m} |z_i(t)|}{\left( x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[t_0, T_0]}^2 \right)^{1/2}} = \\ &= \sup_{x_0, v \in L_2} \frac{\sup_{t \in [t_0, T_0]} |z(t)|_{g_\infty}}{\left( x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[t_0, T_0]}^2 \right)^{1/2}} = \max_{i=1, \dots, m} J_{0,v}^{(i)}, \end{aligned}$$

где  $J_{0,v}^{(i)}$  – максимальное уклонение выхода  $z_i$ , определенное в (2.2). Условие  $J_{0,v} < \gamma$  отвечает теперь более общему понятию ограниченности системы (5.1) на конечном интервале, когда для нескольких ее выходов выполняются неравенства  $|z_i(t)| < \gamma$ ,  $i = 1, \dots, m$ , для всех  $t \in [t_0, T_0]$  при любых начальных условиях и внешних возмущениях, для которых  $x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[t_0, T_0]}^2 \leq 1$ .

Из теоремы 2.1 непосредственно следует, что

$$(5.3) \quad J_{0,v} = \max_{i=1, \dots, m} \sup_{t \in [t_0, T_0]} \lambda_{\max}^{1/2} \left[ C^{(i)}(t) Y(t) C^{(i)T}(t) \right],$$

где матрица  $Y(t)$  есть решение дифференциального матричного уравнения (2.7). В частном случае  $z_i$  могут быть компонентами вектора  $z$  и тогда

$$J_{0,v} = \max_{i=1, \dots, m} \sup_{t \in [t_0, T_0]} d_{\max}^{1/2} \left[ C^{(i)}(t) Y(t) C^{(i)T}(t) \right],$$

где  $d_{\max}(\cdot)$  обозначает максимальный диагональный элемент соответствующей матрицы. Соответствующим образом определяются максимальное уклонение комбинированного выхода при начальном возмущении и максимальное уклонение комбинированного выхода при внешнем возмущении. Заметим, что для устойчивой линейной стационарной системы при внешнем возмущении на бесконечном горизонте максимальное уклонение комбинированного выхода, состоящего из нескольких векторов, совпадает с обобщенной  $H_2$  нормой, понимаемой как в [19].

Далее переходим к синтезу многокритериального управления для системы:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)v + B_u(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \\ z_i &= C^{(i)}(t)x + D^{(i)}(t)u, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

в классе обратных связей  $u = \Theta(t)x$ . Введем критерии

$$(5.5) \quad J_i[\Theta(t)] = \sup_{x_0, v \in L_2} \frac{\sup_{t \in [t_0, T_0]} |z_i(t)|}{\left( x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[t_0, T_0]}^2 \right)^{1/2}}, \quad i = 1, \dots, m,$$

и поставим задачу поиска оптимальных по Парето параметров регуляторов

$$(5.6) \quad \Theta_P(t) = \arg \min \{J_i[\Theta(t)], i = 1, \dots, m\}.$$

Для ее решения применим свертку Гермейера [31]:

$$J_\alpha[\Theta(t)] = \max_{i=1, \dots, m} \{J_i[\Theta(t)]/\alpha_i, \alpha_i > 0\}.$$

В [19] установлено, что множество оптимальных по Парето решений содержится в множестве оптимальных решений по отношению к данному функционалу при всех значениях  $\alpha_i$ . Обращаясь к (5.2), нетрудно видеть, что в рассматриваемой многокритериальной задаче свертка Гермейера представляет собой не что иное, как максимальное отклонение комбинированного выхода системы:

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= [A(t) + B_u(t)\Theta(t)]x + B(t)v, \quad x(t_0) = x_0, \\ z_\alpha &= \text{col}(z_1, \dots, z_m), \quad z_i = \alpha_i^{-1}[C^{(i)}(t) + D^{(i)}(t)\Theta(t)]x, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

где вектор  $z_\alpha$  состоит из параметризованных выходов исходной системы. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

*Теорема 5.1. Оптимальные по Парето управления в многокритериальной задаче (5.6) минимизации максимальных отклонений выходов системы (5.4) суть оптимальные управления по отношению к максимальному отклонению комбинированного выхода системы (5.7) для всех  $\alpha_i > 0, i = 1, \dots, m$ .*

Для численного решения этой задачи проведем, как и выше, дискретизацию и с учетом того, что нахождение минимального значения  $J_\alpha^2[\Theta(t)]$  эквивалентно вычислению минимального значения  $\gamma^2$ , при котором для всех  $t \in [t_0, T_0]$  выполнены неравенства

$$[C^{(i)}(t) + D^{(i)}(t)\Theta(t)]Y(t)[C^{(i)}(t) + D^{(i)}(t)\Theta(t)]^T \leq \gamma^2 \alpha_i^2 I, \quad i = 1, \dots, m,$$

придем к следующей задаче полуопределенного программирования:

$$(5.8) \quad \begin{aligned} &\min \gamma^2 : \\ &Y_{k+1} - Y_k - h(A_k Y_k + Y_k A_k^T + B_{u,k} Z_k + Z_k^T B_{u,k}^T + B_k B_k^T) = 0, \\ &\begin{pmatrix} Y_k & \star \\ C_k^{(i)} Y_k + D_k^{(i)} Z_k & \gamma^2 \alpha_i^2 I \end{pmatrix} \geq 0, \quad Y_0 = R, \\ &i = 1, \dots, m; \quad k = 0, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

Для каждого набора  $\alpha_i, i = 1, \dots, m$ , матрицы параметров оптимальных по Парето регуляторов находятся как  $\Theta_k = Z_k Y_k^{-1}$ , где  $Y_k, Z_k$  – решения (5.8).

## 6. Результаты численных экспериментов

С целью иллюстрации приведенных выше теоретических результатов рассмотрим задачу активной виброзащиты объекта, подвергаемого вибрационным и ударным воздействиям. На рис. 1 показан защищаемый объект “2”, связанный с подвижным основанием “1” посредством виброизолирующего устройства “3”, включающего пассивную и активную части. Движения такой системы описываются дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2, \\
 \dot{x}_2 &= -x_1 - \beta x_2 + u + v, \\
 x_1(0) &= x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \\
 z_1 &= x_1, \quad z_2 = -x_1 - \beta x_2 + u,
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

где  $z_1$  — координата объекта защиты относительно подвижного основания,  $z_2$  — характеристика пассивной и активной частей виброизолирующего устройства,  $v$  — внешнее воздействие, с точностью до знака совпадающее с ускорением подвижного основания. Будем рассматривать задачу оптимальной виброзащиты, состоящую в нахождении на конечном отрезке времени  $t \in [0, T_0]$  управления в форме нестационарной обратной связи  $u = \theta_1(t)x_1 + \theta_2(t)x_2$ , минимизирующего в смысле Парето следующие функционалы:

$$\begin{aligned}
 J_1[\Theta(t)] &= \sup_{x_0, v \in L_2} \frac{\sup_{t \in [0, T_0]} |x_1(t)|}{\left(x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[0, T_0]}^2\right)^{1/2}}, \\
 J_2[\Theta(t)] &= \sup_{x_0, v \in L_2} \frac{\sup_{t \in [0, T_0]} | -x_1(t) - \beta x_2(t) + u(t) |}{\left(x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[0, T_0]}^2\right)^{1/2}},
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

где  $x_0 = (x_{10} \ x_{20})^T$ ,  $\Theta(t) = (\theta_1(t) \ \theta_2(t))^T$ . Первый функционал характеризует максимальное смещение объекта защиты относительно подвижного основания, а второй функционал — максимальное абсолютное ускорение объекта

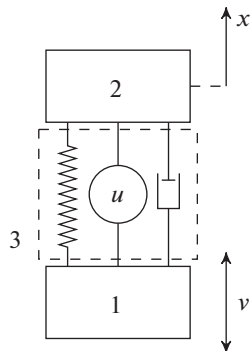


Рис. 1. Схематическое изображение системы активной виброзащиты.

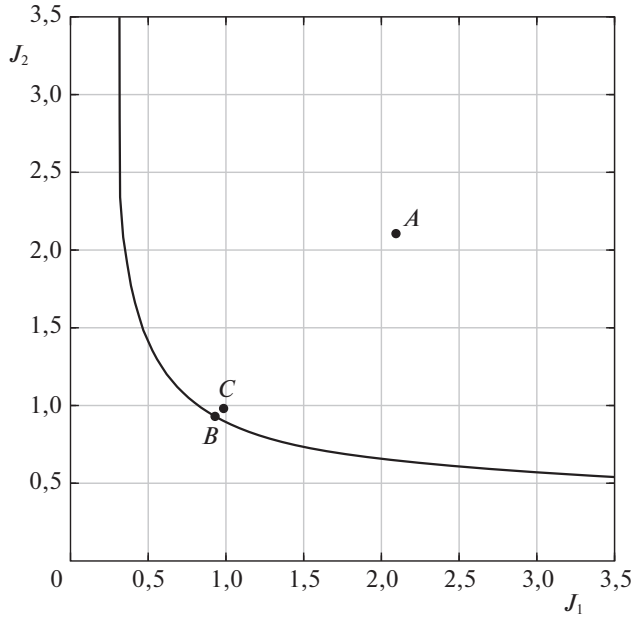


Рис. 2. Парето оптимальный фронт.

защиты или максимальную действующую на него силу. Эти показатели качества виброзащиты являются “конфликтующими”: увеличение силы, противодействующей движению объекта защиты относительно основания, приводит к уменьшению его смещения.

Для численного решения указанной задачи, положим  $\beta = 0,1$ ,  $R^{-1} = \text{diag}(10,1)$  и  $T_0 = 20$ . С использованием теоремы 3.2 и соотношения (5.8) были синтезированы оптимальные в смысле Парето регуляторы  $\Theta_\alpha(t)$  и вычислены соответствующие им оптимальные значения функционалов. На рис. 2 изображена оптимальная по Парето кривая (Парето оптимальный фронт) на плоскости критериев  $(J_1, J_2)$ , на которой указана точка  $B$  с координатами  $(0,930; 0,930)$ . На этом же рисунке для сравнения указана точка  $A$  с координатами  $(2,094; 2,106)$ , отвечающая значениям функционалов в случае, когда в системе отсутствует активная составляющая виброзащиты, т.е. в случае  $u = 0$ . Из представленных данных следует, что применение активной виброзащиты позволяет улучшить показатели качества системы примерно в два раза.

На рис. 3 приведены графики оптимальных по Парето коэффициентов обратной связи  $\Theta_\alpha(t)$  в зависимости от времени (сплошная кривая соответствует коэффициенту  $\theta_1(t)$ , а штриховая — коэффициенту  $\theta_2(t)$ ) при  $\alpha = 0,5$ , отвечающие точке  $B$ . На рис. 4 показаны соответствующие графики изменения выходных переменных  $z_1 = x_1$  (штрихпунктирная кривая) и  $z_2 = -x_1 - \beta x_2 + u$  (штриховая кривая), а также обобщенной  $\infty$ -нормы комбинированного выхода  $z_\alpha$  при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$  (сплошная кривая), т.е.

$$|z_\alpha(t)|_{g\infty} = 2 \max\{|z_1(t)|, |z_2(t)|\},$$

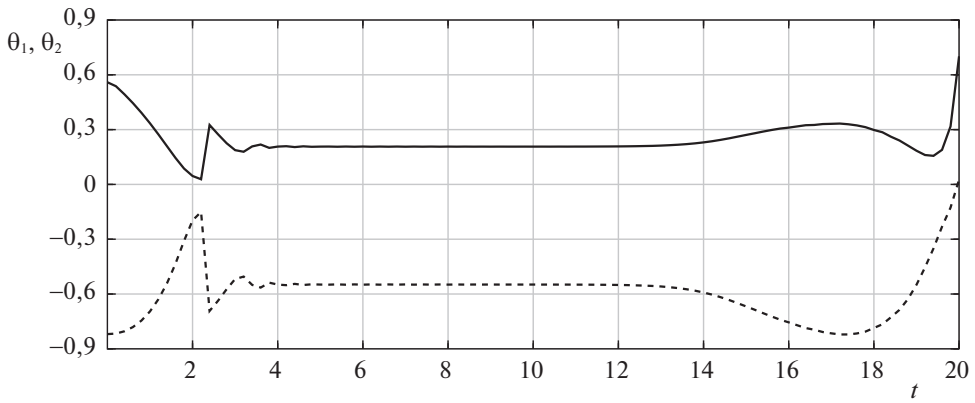


Рис. 3. Графики зависимостей от времени оптимальных по Парето коэффициентов обратной связи.

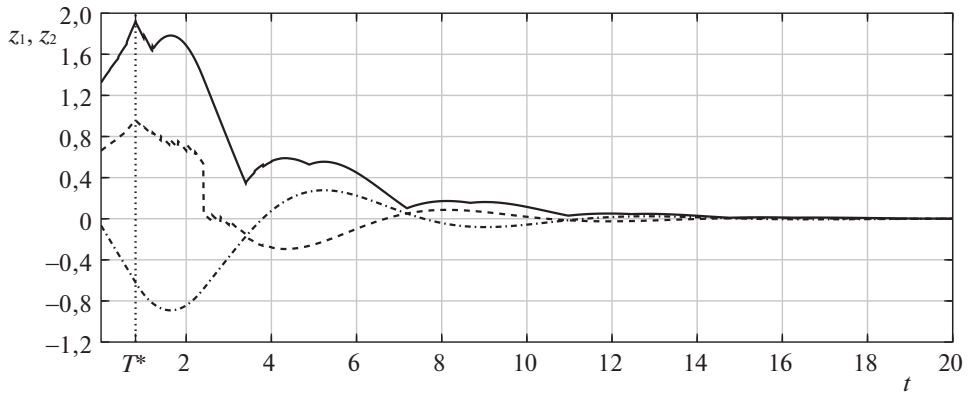


Рис. 4. Графики зависимостей от времени выходов и  $|z_\alpha(t)|_{g\infty}$  в замкнутой оптимальной по Парето системе при наихудших начальном и внешнем возмущениях.

для наихудших начальных условий  $x_0^* = (-0,066; -0,689)$  и внешнего возмущения  $v^*(t)$ , а на рис. 5 – график выбираемого в этих расчетах наихудшего возмущения  $v^*(t)$  по отношению к максимальному отклонению этого комбинированного выхода в замкнутой системе. На рис. 6 и 7 представлены графики зависимостей выходов  $z_1$  и  $z_2$  системы с оптимальным управлением (сплошные кривые), отвечающим точке  $B$ , и в отсутствие управления (штриховые кривые) при одновременном действии ударного и гармонического возмущений:  $x_{10} = 0$ ,  $x_{20} = \sqrt{2}/2$ ,  $v(t) = \sin t/(2\sqrt{\pi})$ ,  $t \in [0, 4\pi]$ ,  $v(t) \equiv 0$ ,  $t \in (4\pi, 20]$ , для которых

$$x_{20}^2 + \int_0^{20} |v(t)|^2 dt = 1.$$

Эти графики демонстрируют хорошее качество активной виброзащиты.



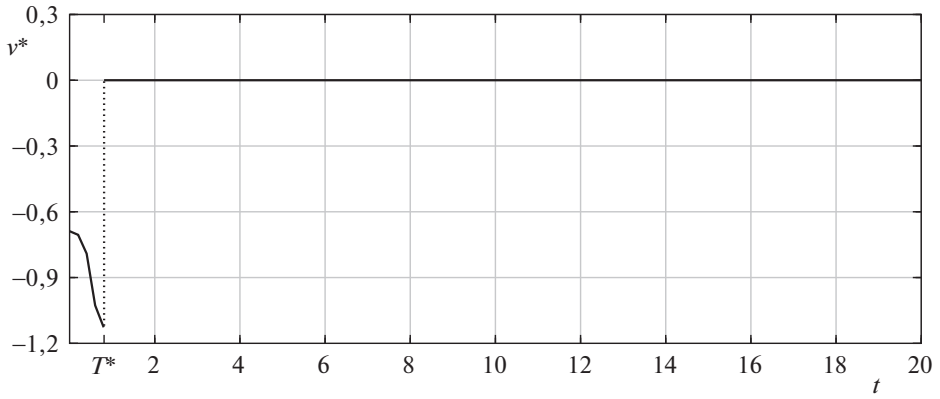


Рис. 5. График наихудшего возмущения.

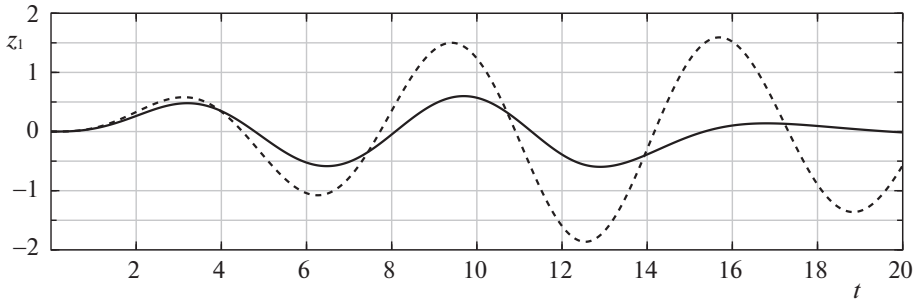


Рис. 6. Графики зависимостей от времени выхода  $z_1$  системы с оптимальным по Парето управлением и в отсутствие управления при одновременном действии ударного и гармонического возмущений.

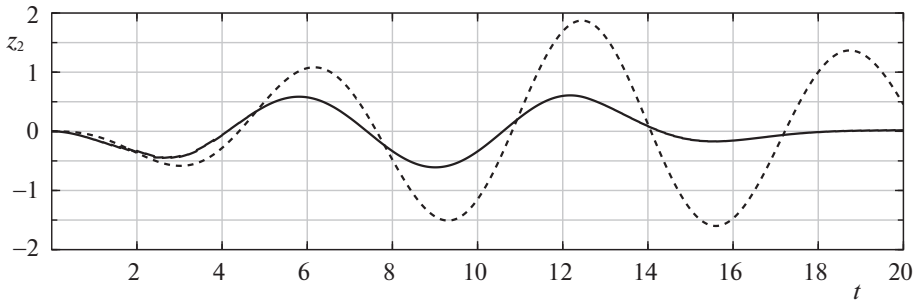


Рис. 7. Графики зависимостей от времени выхода  $z_2$  системы с оптимальным по Парето управлением и в отсутствие управления при одновременном действии ударного и гармонического возмущений.

Наконец, заметим, что примерно половину времени функционирования системы коэффициенты обратной связи сохраняют “постоянные” значения (рис. 3). Интересно сравнить значения функционалов при оптимальном регу-

ляторе и стационарном регуляторе, отвечающим этим “постоянным” значениям  $\theta_1(t) \equiv 0,2180$  и  $\theta_2(t) \equiv -0,5694$ , которым на рис. 2 соответствует точка  $C$  с координатами  $(0,985; 0,981)$ . Как следует из приведенных данных, потери в качестве виброзащиты при использовании такого стационарного регулятора сравнительно невелики.

## 7. Заключение

В статье показано, что максимальные отклонения выходов линейной нестационарной системы на конечном временном горизонте при внешнем и/или начальном возмущениях, а также максимальные отклонения выходов стационарной системы на бесконечном горизонте при внешнем возмущении можно характеризовать в терминах решений дифференциальных или алгебраических матричных уравнений и, как следствие, в терминах линейных матричных неравенств. Это позволяет синтезировать оптимальные по максимальному отклонению выхода законы управления, в том числе и многокритериальные. Результаты численных экспериментов, проведенных для задачи активной виброзащиты, демонстрируют эффективность предлагаемого подхода.

Авторы признательны Б.Т. Поляку за обсуждения, которые инициировали проведение исследований, изложенных в данной статье.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы 2.1.* С целью нахождения величины  $J_{0,v}$  рассмотрим вспомогательную вариационную задачу: для системы (2.1) найти наихудшее возмущение  $v = v_*(t)$  и наихудший начальный вектор  $x_0^*$ , доставляющие максимум функционалу

$$(П.1) \quad \bar{J}(v) = |z(T)|^2 = x^T(T)C^T(T)C(T)x(T)$$

при ограничении

$$(П.2) \quad x_0^T R^{-1} x_0 + \int_{t_0}^T |v(t)|^2 dt = 1$$

в произвольный, но фиксированный момент времени  $T \in (t_0, T_0]$ . Введем функцию Гамильтона

$$H = \psi^T [A(t)x + B(t)v] - \mu v^T v,$$

применим стандартную процедуру решения вариационных задач и придем к следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + (2\mu)^{-1}B(t)B^T(t)\psi, \\ \dot{\psi} &= -A^T(t)\psi, \\ \psi(t_0) &= 2\mu R^{-1}x(t_0), \\ \psi(T) &= 2C^T(T)C(T)x(T). \end{aligned}$$

В этих уравнениях искомое наихудшее возмущение для вспомогательной задачи имеет вид

$$v_*(t) = (2\mu)^{-1}B^T(t)\psi(t),$$

где положительный параметр  $\mu$ , являющийся множителем Лагранжа, пока неизвестен и подлежит в дальнейшем определению.

Далее, исключая вспомогательную переменную  $\psi$  и связывая переменные  $\psi$  и  $x$  линейным преобразованием  $\psi(t) = 2X(t)x(t)$ , получим:

$$\begin{aligned} (\dot{X} + XA(t) + A^T(t)X + \mu^{-1}XB(t)B^T(t)X)x(t) &= 0, \\ (\text{П.3}) \quad X(t_0)x(t_0) &= \mu R^{-1}x(t_0), \\ X(T)x(T) &= C^T(T)C(T)x(T). \end{aligned}$$

При такой замене наихудшее возмущение имеет вид

$$v_*(t) = \mu^{-1}B^T(t)X(t)x(t).$$

Определим теперь значение параметра  $\mu$ . Вычисляя производную по времени от квадратичной формы  $x^T(t)X(t)x(t)$  вдоль оптимальной траектории, отвечающей наихудшему возмущению  $v_*(t)$ , с учетом первого равенства в (П.3) получаем

$$\frac{d}{dt}x^T(t)X(t)x(t) = \mu v_*^T(t)v_*(t).$$

Интегрируя это равенство в пределах от  $t_0$  до  $T$  с учетом двух последних равенств в (П.3), имеем

$$\bar{J}(v_*) = x^T(T)C^T(T)C(T)x(T) = \mu \left( x_0^T R^{-1}x_0 + \int_{t_0}^T |v_*(t)|^2 dt \right).$$

С учетом ограничения типа равенства (П.2) в рассматриваемой вариационной задаче получаем искомое значение параметра  $\mu$ , совпадающее с оптимальным значением функционала (П.1):

$$(\text{П.4}) \quad \mu = \bar{J}(v_*).$$

Сделаем далее замену  $Q = X/\mu$  в соотношениях (П.3):

$$\begin{aligned} (\dot{Q} + QA(t) + A^T(t)Q + QB(t)B^T(t)Q)x(t) &= 0, \\ (\text{П.5}) \quad Q(t_0)x(t_0) &= R^{-1}x(t_0), \\ \mu Q(T)x(T) &= C^T(T)C(T)x(T). \end{aligned}$$

Наконец, введем матрицу  $Y = Q^{-1}$ , которая удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$(\text{П.6}) \quad \dot{Y} = A(t)Y + YA^T(t) + B(t)B^T(t), \quad Y(t_0) = R.$$

Если матрица  $Y = Y(t)$  является решением задачи Коши (П.6), то для любого вектора  $x(t)$  справедливы первые два уравнения (П.5). Заметим также, что матрица  $Y(t)$  является положительно определенной для всех значений  $t \in [t_0, T]$ , поскольку решение матричного дифференциального уравнения (П.6) может быть представлено в виде

$$Y(t) = \Phi(t, t_0)Y(t_0)\Phi^T(t, t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t, \tau)d\tau,$$

где  $\Phi(t, \tau)$  – фундаментальная матрица решений уравнения

$$\dot{x} = A(t)x.$$

Таким образом, матрица  $Y$ , а следовательно, и матрица  $Q$  являются невырожденными для всех  $t \in [t_0, T]$ .

Обратимся теперь к последнему равенству в (П.5), которое можно переписать в виде

$$Y(T)C^T(T)C(T)x(T) = \mu x(T).$$

Данное соотношение можно рассматривать как задачу на собственные значения и собственные векторы матрицы  $Y(T)C^T(T)C(T)$ . Поскольку в исходной вариационной задаче требуется найти максимальное значение функционала, то с учетом (П.4) получаем, что  $\mu$  есть максимальное собственное значение матрицы  $Y(T)C^T(T)C(T)$  или равное ему максимальное собственное значение матрицы  $C(T)Y(T)C^T(T)$  (см. [32], с. 71). Итак,

$$\mu = \lambda_{\max} (C(T)Y(T)C^T(T)).$$

Осталось найти наихудший вектор начальных условий  $x_0$ . С этой целью замкнем исходную систему (2.1) наихудшим возмущением

$$v_*(t) = B^T(t)Y^{-1}(t)x(t)$$

и рассмотрим задачу Коши

$$(П.7) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= (A(t) + B(t)B^T(t)Y^{-1}(t))x, \\ x(T) &= g e_{\max}(Y(T)C^T(T)C(T)), \end{aligned}$$

где  $Y(t)$  есть решение матричного дифференциального уравнения (П.6), а свободный параметр  $g$  подлежит в дальнейшем определению. Обозначим через  $x = s(t)$  решение указанной задачи Коши при  $g = 1$ , тогда искомое значение параметра  $g$  определится из условия (П.2):

$$(П.8) \quad g = \left( s^T(t_0)R^{-1}s(t_0) + \int_{t_0}^T s^T(\tau)Y^{-1}(\tau)B(\tau)B^T(\tau)Y^{-1}(\tau)s(\tau)d\tau \right)^{-1/2}.$$

Таким образом, исходя из необходимых условий оптимальности функционала  $\bar{J}(v)$ , наилучшее возмущение  $v_*(t)$  и вектор начальных условий  $x_0^*$  по отношению к этому функционалу определяются так:

$$(II.9) \quad v_*(t) = gB^T(t)Y^{-1}(t)s(t), \quad x_0^* = gs(t_0), \quad t \in [t_0, T].$$

При этом оптимальное значение функционала  $\bar{J}(v)$  таково:

$$\bar{J}(v_*) = \lambda_{\max}(C(T)Y(T)C^T(T)).$$

Обратно: пусть  $Y(t)$  удовлетворяет (II.6). Тогда для функции  $V(x) = x^T Y^{-1} x$  в силу системы (2.1) выполнено равенство

$$\dot{V} = |v|^2 - |v - B^T Y^{-1} x|^2.$$

Интегрируя это уравнение с учетом того, что  $Y^{-1}(t_0) = R$ , получим

$$(II.10) \quad x^T(T)Y^{-1}(T)x(T) = x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_{[t_0, T]}^2 - \|v - B^T Y^{-1} x\|_2^2.$$

Отсюда следует, что при любых допустимых возмущениях и начальных условиях, удовлетворяющих ограничению (II.2), имеет место неравенство  $x^T(T)Y^{-1}(T)x(T) \leq 1$ . Это значит, что  $x(T)x^T(T) \leq Y(T)$ . Следовательно,  $\bar{J}(v) = |z(T)|^2 \leq \lambda_{\max}(C(T)Y(T)C^T(T))$  и максимум достигается при  $v_*(t) = B^T(t)Y^{-1}(t)x(t)$ , где  $x(t)$  – решение уравнения (II.7), а  $g$  определено в (II.8).

Возвращаясь к исходной задаче нахождения максимального уклонения, записанного в виде (2.3), получаем, что

$$(II.11) \quad J_{0,v} = \sup_{t \in [t_0, T_0]} \lambda_{\max}^{1/2}(C(t)Y_{0,v}(t)C^T(t)),$$

где  $Y_{0,v}(t)$  – решение уравнения (II.6). Пусть  $T_*$  – момент времени, в который

$$\lambda_{\max}[C(T_*)Y_{0,v}(T_*)C^T(T_*)] = \sup_{t \in [t_0, T_0]} \lambda_{\max}[C(t)Y_{0,v}(t)C^T(t)].$$

Тогда наилучшее возмущение и начальное состояние по отношению к  $J_{0,v}$  определяются как в (II.9) при  $T = T_*$ .

Теперь обратимся к частным случаям. Так же как и выше, запишем, что

$$J_v = \sup_{T \in [t_0, T_0]} \sup_{v \in L_2} \frac{|z(T)|}{\|v\|_{[t_0, T_0]}}.$$

При нулевых начальных условиях в системе (2.1) выражение для  $z(t)$  имеет вид

$$z(t) = C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) v(\tau) d\tau.$$

Записывая

$$|z(t)| = \max_{|e|=1} e^T z(t)$$

и используя неравенство Коши–Буняковского, оценим  $|z(t)|$ :

$$|z(t)| \leq \max_{|e|=1} \left( \int_{t_0}^t |B^T(\tau)\Phi^T(t, \tau)C^T(t)e|^2 d\tau \right)^{1/2} \left( \int_{t_0}^t |v(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2}.$$

Далее получаем, что

$$\sup_{v \in L_2} \frac{|z(t)|}{\|v\|_2} \leq \left( \max_{|e|=1} e^T C(t) \left[ \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t, \tau)d\tau \right] C^T(t)e \right)^{1/2}.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\sup_{v \in L_2} \frac{|z(T)|}{\|v\|_{[t_0, T_0]}} \leq \lambda_{\max}^{1/2} [C(T)Y_v(T)C^T(T)],$$

где

$$Y_v(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t, \tau)d\tau$$

– решение матричного уравнения

$$\dot{Y} = A(t)Y + YA^T(t) + B(t)B^T(t), \quad Y(t_0) = 0.$$

Нетрудно проверить, что построенная оценка достигается точно при

$$v_*(\tau) = B^T(\tau)\Phi^T(T, \tau)C^T(T)e_{\max} [C(T)Y_v(T)C^T(T)], \quad \tau \in [t_0, T].$$

Таким образом,

$$\sup_{v \in L_2} \frac{|z(T)|}{\|v\|_{[t_0, T_0]}} = \lambda_{\max}^{1/2} [C(T)Y_v(T)C^T(T)].$$

Возвращаясь наконец к исходной задаче, получаем

$$J_v = \sup_{v \in L_2} \frac{\sup_{t \in [t_0, T_0]} |z(t)|}{\|v\|_{[t_0, T_0]}} = \sup_{T \in [t_0, T_0]} \lambda_{\max}^{1/2} [C(T)Y_v(T)C^T(T)].$$

Представим теперь  $J_0$  в виде

$$J_0 = \sup_{t \in [t_0, T_0]} \sup_{x_0 \neq 0} \frac{|z(t)|}{(x_0^T R^{-1} x_0)^{1/2}}.$$

Выражение для  $z(t)$  может быть представлено в виде

$$z(t) = \Phi(t, t_0)x_0.$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{|z(t)|^2}{x_0^T R^{-1} x_0} = \frac{x_0^T \Phi^T(t, t_0) C^T(t) C(t) \Phi(t, t_0) x_0}{x_0^T R^{-1} x_0}.$$

Произведем далее замену  $\xi_0 = R^{-1/2} x_0$  и получим

$$\sup_{x_0 \neq 0} \frac{|z(t)|^2}{x_0^T R^{-1} x_0} = \sup_{\xi_0 \neq 0} \frac{\xi_0^T R^{1/2} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) C(t) \Phi(t, t_0) R^{1/2} \xi_0}{\xi_0^T \xi_0},$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \sup_{x_0 \neq 0} \frac{|z(t)|^2}{x_0^T R^{-1} x_0} &= \lambda_{\max} \left[ R^{1/2} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) C(t) \Phi(t, t_0) R^{1/2} \right] = \\ &= \lambda_{\max} \left[ C(t) \Phi(t, t_0) R \Phi^T(t, t_0) C^T(t) \right]. \end{aligned}$$

Заметим далее, что

$$C(t) \Phi(t, t_0) R \Phi^T(t, t_0) C^T(t) = C(t) Y_0(t) C^T(t),$$

где матрица  $Y_0(t)$  есть решение дифференциального матричного уравнения

$$\dot{Y} = A(t)Y + Y A^T(t), \quad Y(t_0) = R.$$

Итак, окончательно имеем

$$J_0 = \sup_{t \in [t_0, T_0]} \lambda_{\max}^{1/2} \left[ C(t) Y_0(t) C^T(t) \right].$$

Для определения наихудшего вектора начальных условий  $x_0^*$  предлагается следующий алгоритм. Сначала определим момент времени  $t_*$  такой, что

$$\lambda_{\max} \left[ C(t_*) Y_0(t_*) C^T(t_*) \right] = \sup_{t \in [t_0, T_0]} \lambda_{\max} \left[ C(t) Y_0(t) C^T(t) \right],$$

затем найдем нормированный собственный вектор  $e_{\max}^*$  матрицы  $R^{1/2} \Phi^T(t_*, t_0) C^T(t_*) C(t_*) \Phi(t_*, t_0) R^{1/2}$ , отвечающий максимальному собственному числу. В результате искомым вектор  $x_0^* = R^{1/2} e_{\max}^*$ . Теорема 2.1 доказана.

*Доказательство теоремы 3.1.* Если в определении максимального отклонения, данного в (2.2), выбрать  $z = \Gamma^{1/2}(t)x$  и  $R = \Gamma(t_0)$ , то получим, что выполнение (3.3) эквивалентно неравенству  $J_{0,v}^2 < s_2/s_1$ . Действительно,

если  $J_{0,v}^2 < s_2/s_1$ , то из определения  $J_{0,v}$  непосредственно следует выполнение (3.3). Для обоснования справедливости обратного утверждения предположим, что при выполнении (3.3) имеем  $J_{0,v}^2 \geq s_2/s_1$ . Так как

$$J_{0,v}^2 = s_1^{-1} \sup_{x_{t_0}, v \in L_2} \sup_{t \in [t_0, T_0]} x^T(t) \Gamma(t) x(t) \geq s_2/s_1,$$

где  $\sup$  берется по всем  $x^T(t_0) \Gamma(t_0) x(t_0) + \|v\|_2^2 = s_1$ , то  $\sup_{t \in [t_0, T_0]} x^T(t) \Gamma(t) x(t) \geq s_2$ , что противоречит (3.3). Таким образом, применяя теорему 2.1, приходим к (3.4). Теорема 3.1 доказана.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фельдбаум А.А.* О распределении корней характеристического уравнения систем регулирования // *АиТ.* 1948. № 4. С. 253–279.
2. *Измайлов Р.Н.* Эффект “всплеска” в стационарных линейных системах со скалярными входами и выходами // *АиТ.* 1987. № 8. С. 56–62.  
*Izmailov R.N.* The Peak Effect in Stationary Linear Systems with Scalar Inputs and Outputs // *Autom. Remote Control.* 1987. V. 48. No. 8. P. 1018–1024.
3. *Булгаков Б.В.* О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами // *ДАН СССР.* 1946. Т. 51. № 5. С. 339–342.
4. *Александров В.В.* К задаче Булгакова о накоплении возмущений // *Докл. АН СССР. Сер. Кибернетика и теория регулирования.* 1969. Т. 186. № 3. С. 526–528.
5. *Жермоленко В.Н.* О максимальном отклонении линейной системы // *АиТ.* 2012. № 7. С. 3–14.  
*Zhermolenko V.N.* On Maximal Deviation of Linear System // *Autom. Remote Control.* 2012. V. 73. No. 7. P. 1117–1125.
6. *Moler C., Van Loan C.* Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later // *SIAM Rev.* 2003. V. 45. No. 1. P. 3–49.
7. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
8. *Whidborne J.F., McKernan J.* On Minimizing Maximum Transient Energy Growth // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2007. V. 52. No. 9. P. 1762–1767.
9. *Поляк В.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В., Щербakov П.С., Смирнов Г.В.* Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // *АиТ.* 2015. № 6. С. 18–41.  
*Polyak V.T., Tremba A., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S., Smirnov G.V.* Large Deviations in Linear Control Systems with Nonzero Initial Conditions // *Autom. Remote Control.* 2015. V. 76. No. 6. P. 957–976.
10. *Polyak V.T., Smirnov G.* Large Deviations for Non-zero Initial Conditions in Linear Systems // *Automatica.* 2016. V. 74. P. 297–307.
11. *Агиевич В.Н., Парсегов С.Э., Щербakov П.С.* Верхние оценки всплеска в линейных дискретных системах // *АиТ.* 2018. № 11. С. 32–46.  
*Ahiyevich U.M., Parsegov S.E., Shcherbakov P.S.* Upper Bounds on Peaks in Discrete-Time Linear Systems // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 11. P. 1976–1988.



12. *Wilson D.A.* Convolution and Hankel Operator Norms for Linear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. P. 94–97.
13. *Wilson D.A.* Extended Optimality Properties of the Linear Quadratic Regulator and Stationary Kalman Filter // IEEE Trans. Autom. Control. 1990. V. 35. P. 583–585.
14. *Kim J.H., Hagiwara T.* Upper/Lower Bounds of Generalized  $H_2$  Norms in Sampled-Data Systems with Convergence Rate Analysis and Discretization Viewpoint // Syst. Control Lett. 2017. V. 107. P. 28–35.
15. *Rotea M.A.* The Generalized  $H_2$  Control Problem // Automatica. 1993. V. 29. No. 2. P. 373–385.
16. *Wilson D.A., Nekoui M.A., Halikias G.D.* An LQR Weight Selection Approach to the Discrete Generalized  $H_2$  Control Problem // Int. J. Control. 1998. V. 71. No. 1. P. 93–101.
17. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез линейных законов управления при фазовых ограничениях // АиТ. 2009. № 6. С. 48–57.  
*Balandin D.V., Kogan M.M.* Linear Control Design under Phase Constraints // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 6. P. 958–966.
18. *Коган М.М., Кривдина Л.Н.* Синтез многоцелевых линейных законов управления дискретными объектами при интегральных и фазовых ограничениях // АиТ. 2011. № 7. С. 83–95.  
*Kogan M.M., Krivdina L.N.* Synthesis of Multipurpose Linear Control Laws of Discrete Objects under Integral and Phase Constraints // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 7. P. 1427–1439.
19. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Оптимальное по Парето обобщенное  $H_2$ -управление и задачи виброзащиты // АиТ. 2017. № 8. С. 76–90.  
*Balandin D.V., Kogan M.M.* Pareto Optimal Generalized  $H_2$ -control and Vibration Protection Problems // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 8. P. 1417–1429.
20. *Balandin D.V., Kogan M.M.* Multi-Objective Generalized  $H_2$  Control // Automatica. 2019. V. 99. No. 1. P. 317–322.
21. *Барабанов А.Е., Граничин О.Н.* Оптимальный регулятор дискретного объекта с ограниченной помехой // АиТ. 1984. № 5. С. 39–46.  
*Barabanov A.E., Granichin O.N.* An Optimal Controller for a Linear Plant with Bounded Noise // Autom. Remote Control. 1984. V. 45. Part 1. No. 5. P. 578–584.
22. *Dahleh M.A., Diaz-Bobillo I.J.* Control of uncertain systems: a linear programming approach. Englewood Cliffs. N.J.: Prentice-Hall, 1995.
23. *Amato F., Ariola M., Cosentino C., Abdallah C.T., Dorato P.* Necessary and Sufficient Conditions for Finite-Time Stability of Linear Systems // Proc. Amer. Control Conf. Denver, USA. 2003. P. 4452–4456.
24. *Garcia G., Tarbouriech S., Bernussou J.* Finite-Time Stabilization of Linear Time-Varying Continuous Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2009. V. 54. No. 2. P. 364–369.
25. *Amato F., Carannante G., De Tommasi G., Pironti A.* Input–Output Finite-Time Stability of Linear Systems: Necessary and Sufficient Conditions // IEEE Trans. Autom. Control. 2012. V. 57. No. 12. P. 3051–3063.
26. *Amato F., Ariola M., Cosentino C.* Finite-time Control of Linear Time-Varying Systems via Output Feedback // Proc. Amer. Control Conf. Portland, USA. 2005. P. 4722–4726.
27. *Khargonekar P.P., Nagpal K.M., Poolla K.R.*  $H_\infty$  Control with Transients // SIAM J. Control Optim. 1991. V. 29. No. 6. P. 1373–1393.

28. Lu W.W., Balas G.J., Lee E.B. A Variational Approach to  $H_\infty$  Control with Transients // IEEE Trans. Autom. Control. 1999. V. 44. No. 10. P. 1875–1879.
29. Баландин Д.В., Коган М.М. Обобщенное  $H_\infty$ -оптимальное управление как компромисс между  $H_\infty$ -оптимальным и  $\gamma$ -оптимальным управлениями // АиТ. 2010. № 6. С. 20–38.  
*Balandin D.V., Kogan M.M. Generalized  $H_\infty$ -optimal Control as a Trade-off between the  $H_\infty$ -optimal and  $\gamma$ -optimal Controls // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 6. P. 993–1010.*
30. Balandin D.V., Kogan M.M. LMI Based  $H_\infty$ -optimal Control with Transients // Int. J. Control. 2010. V. 83. No. 8. P. 1664–1673.
31. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
32. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиньым.*

Поступила в редакцию 13.07.2018

После доработки 05.09.2018

Принята к публикации 08.11.2018