

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Баландин, Р. С. Бирюков, М. М. Коган, Минимаксное управление уклонениями выходов линейной дискретной нестационарной системы, *Автомат. и телемех.*, 2019, выпуск 12, 3–23

DOI: 10.1134/S0005231019120018

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.139.86.53

27 декабря 2024 г., 13:19:35



© 2019 г. Д.В. БАЛАНДИН, д-р физ.-мат. наук (dbalandin@yandex.ru)  
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского),  
Р.С. БИРЮКОВ, канд. физ.-мат. наук (birukovrs@gmail.com),  
М.М. КОГАН, д-р физ.-мат. наук (mkogan@nngasu.ru)  
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

## МИНИМАКСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ УКЛОНЕНИЯМИ ВЫХОДОВ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ<sup>1</sup>

Показано, как можно синтезировать оптимальные на конечном горизонте цифровые регуляторы для линейных нестационарных объектов при неопределенных начальных условиях, находящихся под воздействием внешних возмущений. Квадрат оптимизируемого критерия, названного максимальным уклонением выхода, представляет собою точное гарантированное максимальное по времени значение квадрата евклидовой нормы выхода системы, нормированное суммой квадратов евклидовых норм возмущений и квадратичной формы начального состояния системы. Максимальные уклонения выхода и приводящие к ним наихудшие возмущения и/или начальные условия, а также минимаксные управления, в том числе и многокритериальные, минимизирующие максимальные уклонения нескольких выходов, находятся как решения задачи полуопределенного программирования. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости и ограниченности системы на конечном интервале, позволяющие синтезировать соответствующие законы управления.

*Ключевые слова:* линейная нестационарная дискретная система, максимальное отклонение выхода, оптимальное управление, многокритериальная задача, оптимальная виброизоляция.

DOI: 10.1134/S0005231019120018

### 1. Введение

Анализ и синтез систем управления, функционирующих на конечном временном интервале, давно привлекает внимание специалистов. Особый интерес здесь вызывают задачи, связанные с оптимизацией максимальных отклонений выходов системы и самого управления от их номинальных значений. Обзор различных работ этого направления и соответствующие ссылки можно найти в статьях [1, 2], в которых синтезируются управления максимальными отклонениями выходов линейных нестационарных систем в непрерывном времени на конечном горизонте. Что касается изучения максимальных отклонений в дискретных системах, то в [3] были получены условия устойчивости и стабилизации линейной обратной связью на конечном горизонте,

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 18-41-520002, 19-01-00289).

в [4, 5] – условия ограниченности при действии возмущения, генерируемого заданной системой, в [6] осуществляется синтез обратных связей по выходу, обеспечивающих устойчивость на конечном горизонте, в [7] получены достаточные условия устойчивости и ограниченности на конечном горизонте неопределенных дискретных систем. В [8] для дискретных систем с нулевыми начальными условиями был получен оптимальный регулятор по выходу, минимизирующий максимальное по времени значение евклидовой нормы выхода при действии возмущения из класса  $l_2$  на бесконечном горизонте, реализация которого требует решения уравнения Риккати и задачи выпуклого программирования, а в [9, 10] для дискретных систем были синтезированы законы управления, минимизирующие верхние оценки всплесков, вызванных неизвестным начальным возмущением. Таким образом, несмотря на многообразие работ по этой теме, здесь отсутствуют точные характеристики максимальных отклонений выхода при наличии обоих факторов: неопределенных начальных условий и внешнего возмущения.

Данная работа идейно следует [1, 2], однако использует другой математический аппарат. Введены понятия максимальных уклонений выходов линейных дискретных нестационарных систем при внешнем и/или начальном возмущениях и получены их характеристики в терминах решений нестационарных уравнений Ляпунова или в терминах решений задач полуопределенного программирования. Установлено соответствие между понятиями устойчивости и ограниченности линейной нестационарной системы на конечном интервале и максимальными уклонениями ее определенного выхода. Введены альтернативные понятия устойчивости и ограниченности системы на конечном интервале и получены соответствующие необходимые и достаточные условия. Для стационарных систем при нулевых начальных условиях максимальное уклонение выхода на конечном интервале, вызванное внешним ограниченным в классе  $l_2$  возмущением, оказывается монотонно возрастающей и ограниченной сверху функцией длины интервала, что позволяет определить в этом случае максимальное уклонение на бесконечном горизонте и характеризовать его в терминах решения алгебраического уравнения Ляпунова. Полученные характеристики максимальных уклонений выражаются в терминах линейных матричных неравенств, что позволяет синтезировать оптимальные законы управления, в том числе и многокритериальные.

## 2. Максимальные уклонения на конечном горизонте при начальном и/или внешнем возмущениях

Рассмотрим линейную дискретную нестационарную систему

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x_{t+1} &= A_t x_t + B_t v_t, \\ z_t &= C_t x_t, \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_0 + N_0, \quad N_0 \geq 1, \end{aligned}$$

где  $x_t$  – состояние,  $z_t$  – выход,  $v_t$  – внешнее возмущение. Определим максимальное уклонение выхода при начальном и внешнем возмущениях на вре-

менном горизонте  $[t_0, t_0 + N_0]$  как

$$(2.2) \quad J_{0,v} = \max_{x_{t_0}, v_{t_0}, \dots, v_{t_0+N_0-1}} \frac{\max_{t=t_0, \dots, t_0+N_0} |z_t|}{\left( x_{t_0}^T R^{-1} x_{t_0} + \sum_{i=t_0}^{t_0+N_0-1} |v_i|^2 \right)^{1/2}},$$

где  $R = R^T > 0$  – весовая матрица и знаменатель не обращается в ноль. Так как

$$J_{0,v} = \max_{t=t_0, \dots, t_0+N_0} \max_{x_{t_0}, v_{t_0}, \dots, v_{t_0+N_0-1}} \frac{|z_t|}{\left( x_{t_0}^T R^{-1} x_{t_0} + \sum_{i=t_0}^{t_0+N_0-1} |v_i|^2 \right)^{1/2}},$$

а выход  $z_t$  определяется только возмущениями  $v_{t_0}, \dots, v_{t-1}$ , то

$$(2.3) \quad J_{0,v} = \max_{N=0, \dots, N_0} \max_{x_{t_0}, v_{t_0}, \dots, v_{t_0+N_0-1}} \frac{|z_{t_0+N}|}{\left( x_{t_0}^T R^{-1} x_{t_0} + \sum_{i=t_0}^{t_0+N-1} |v_i|^2 \right)^{1/2}},$$

т.е. максимальное уклонение на горизонте  $[t_0, t_0 + N_0]$  равно максимуму из максимальных относительных значений модуля выхода на концах горизонтов  $[t_0, t_0 + N]$  по всем  $N = 0, \dots, N_0$ .

Для нахождения этой величины запишем решение уравнения (2.1) в виде

$$x_t = \Phi(t, t_0)x_{t_0} + \sum_{i=t_0}^{t-1} \Phi(t, i+1)B_i v_i, \quad t \geq t_0 + 1,$$

где переходная матрица

$$\Phi(t, t_0) = \begin{cases} A_{t-1}A_{t-2} \cdots A_{t_0}, & t \geq t_0 + 1, \\ I, & t = t_0 \end{cases}$$

является решением разностного уравнения

$$(2.4) \quad \Phi(t+1, t_0) = A_t \Phi(t, t_0), \quad t \geq t_0.$$

Выход может быть представлен как

$$z_t = C_t \Phi(t, t_0)x_{t_0} + \sum_{i=t_0}^{t-1} G(t, i)v_i,$$

где  $G(t, i) = C_t \Phi(t, i+1)B_i$ ,  $i = t_0, \dots, t-1$  – матричная импульсная переходная функция системы.

*Теорема 2.1. Максимальное уклонение выхода при начальном и внешнем возмущениях в системе (2.1) на заданном горизонте  $[t_0, t_0 + N_0]$  находится как*

$$(2.5) \quad J_{0,v} = \max_{t=t_0, \dots, t_0+N_0} \lambda_{\max}^{1/2}(C_t P_t C_t^T),$$

где  $\lambda_{\max}(\cdot)$  обозначает максимальное собственное значение соответствующей матрицы,  $P_t = P_t^T \geq 0$  – решение уравнения

$$(2.6) \quad P_{t+1} = A_t P_t A_t^T + B_t B_t^T$$

с начальным условием  $P_{t_0} = R$ . Если максимальное значение  $J_{0,v} = \gamma_*$  достигается при  $t = t_*$ , то наилучшие начальное состояние и внешнее возмущение определяются как

$$(2.7) \quad \begin{aligned} x_{t_0}^* &= \gamma_*^{-1} R^{1/2} \Phi^T(t_*, t_0) C_{t_*}^T e_*, \quad e_* = e_{\max}(C_{t_*} P_{t_*} C_{t_*}^T), \\ v_t^* &= \gamma_*^{-1} B_t^T \Phi^T(t_*, t+1) C_{t_*}^T e_*, \quad t = t_0, \dots, t_* - 1, \end{aligned}$$

где  $e_{\max}(\cdot)$  обозначает нормированный собственный вектор, отвечающий максимальному собственному значению соответствующей матрицы.

Доказательства этого и последующих утверждений содержатся в Приложении. Заметим, что внешнее возмущение на интервале  $[t_*, t_0 + N_0]$  не влияет на максимальное уклонение на всем интервале  $[t_0, t_0 + N_0]$ : большие значения внешнего возмущения на интервале  $[t_*, t_0 + N_0]$ , конечно, вызовут большие значения выхода, но максимальное уклонение выхода, определенное в (2.2), не превысит величину  $\gamma_*$ .

*Теорема 2.2. Максимальное уклонение выхода при начальном и внешнем возмущениях на горизонте  $[t_0, t_0 + N_0]$  находится в результате решения задачи полуопределенного программирования*

$$(2.8) \quad \begin{aligned} J_{0,v}^2 &= \min \gamma^2 : \\ \begin{pmatrix} Y_t & * & * \\ A_t Y_t & Y_{t+1} & * \\ 0 & B_t^T & I \end{pmatrix} &\geq 0, \quad \begin{pmatrix} Y_t & * \\ C_t Y_t & \gamma^2 I \end{pmatrix} \geq 0, \quad Y_{t_0} \geq R, \\ t &= t_0, \dots, t_0 + N_0 - 1, \quad \begin{pmatrix} Y_{t_0+N_0} & * \\ C_{t_0+N_0} Y_{t_0+N_0} & \gamma^2 I \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

относительно неизвестных  $Y_{t_0+1}, \dots, Y_{t_0+N_0}$ .

Заметим, что минимум в задаче (2.8) достигается не обязательно при  $Y_t = P_t, t = t_0 + 1, \dots, t_0 + N_0$ , но в любом случае он равен соответствующему максимальному уклонению выхода.

В частном случае, когда начальное состояние нулевое, максимальное уклонение выхода при внешнем возмущении определяется как

$$(2.9) \quad \begin{aligned} J_v &= \max_{v_{t_0}, \dots, v_{t_0+N_0-1}} \frac{\max_{t=t_0, \dots, t_0+N_0} |z_t|}{\left( \sum_{i=t_0}^{t_0+N_0-1} |v_i|^2 \right)^{1/2}} = \\ &= \max_{N=1, \dots, N_0} \max_{v_{t_0}, \dots, v_{t_0+N-1}} \frac{|z_{t_0+N}|}{\left( \sum_{i=t_0}^{t_0+N-1} |v_i|^2 \right)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Так как в этом случае  $x_{t_0} = 0$ , то

$$z_{t_0+N} = \sum_{i=t_0}^{t_0+N-1} G(t, i)v_i, \quad |z_{t_0+N}|^2 \leq \lambda_{\max}(C_{t_0+N}P_{t_0+N}C_{t_0+N}^T) \sum_{t=t_0}^{t_0+N-1} |v_t|^2,$$

где матрица

$$P_{t_0+N} = \sum_{i=t_0}^{t_0+N-1} \Phi(t_0 + N, i + 1)B_i B_i^T \Phi^T(t_0 + N, i + 1)$$

является решением разностного уравнения

$$(2.10) \quad P_{t+1} = A_t P_t A_t^T + B_t B_t^T, \quad P_{t_0} = 0.$$

Таким образом, максимальное уклонение и наихудшее внешнее возмущение при нулевых начальных условиях определяются как в (2.5) и (2.7) при  $P_{t_0} = 0$  и находятся согласно процедуре (2.8) при  $Y_{t_0} \geq 0$ .

В другом частном случае, когда внешнее возмущение отсутствует, а начальное состояние неизвестно, задачу нахождения максимального уклонения выхода принято называть задачей о всплеске. Максимальное уклонение при начальном возмущении определяется как

$$(2.11) \quad J_0 = \max_{x_{t_0} \neq 0} \frac{\max_{t=t_0, \dots, t_0+N_0} |z_t|}{(x_{t_0}^T R^{-1} x_{t_0})^{1/2}} = \max_{N=0, \dots, N_0} \max_{x_{t_0} \neq 0} \frac{|z_{t_0+N}|}{(x_{t_0}^T R^{-1} x_{t_0})^{1/2}}.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} z_{t_0+N} &= C_{t_0+N} \Phi(t_0 + N, t_0) x_{t_0}, \\ |z_{t_0+N}|^2 &\leq \lambda_{\max}(C_{t_0+N} P_{t_0+N} C_{t_0+N}^T) x_{t_0}^T R^{-1} x_{t_0}, \end{aligned}$$

где матрица

$$P_{t_0+N} = \Phi(t_0 + N, t_0) R \Phi^T(t_0 + N, t_0)$$

является решением разностного уравнения

$$(2.12) \quad P_{t+1} = A_t P_t A_t^T, \quad P_{t_0} = R, \quad t = t_0, \dots, t_0 + N - 1.$$

Таким образом, максимальный всплеск на горизонте  $[t_0, t_0 + N_0]$  определяется как

$$J_0 = \max_{N=0, \dots, N_0} \lambda_{\max}^{1/2}(C_{t_0+N} P_{t_0+N} C_{t_0+N}^T),$$

где  $P_{t_0+N} = P_{t_0+N}^T \geq 0$  – решение уравнения (2.12), и находится согласно процедуре (2.8), в которой следует положить  $B_t \equiv 0$ . Если максимальное значение  $J_0 = \gamma_*$  достигается при  $t = t_*$ , то наилучшие начальное состояние определяется как

$$(2.13) \quad x_{t_0}^* = \gamma_*^{-1} R \Phi^T(t_*, t_0) C_{t_*}^T e_*, \quad e_* = e_{\max}(C_{t_*} P_{t_*} C_{t_*}^T).$$

Максимальное уклонение выхода может пониматься не только как максимальное по времени относительное значение нормы вектора выхода, но и в более широком смысле как максимум из максимальных по времени относительных значений норм векторов, составляющих в совокупности вектор выхода. Это позволяет рассматривать функционалы, характеризующие максимальные значения из максимальных отклонений нескольких векторных выходов (см. пример в разделе 6). А именно, рассмотрим систему

$$(2.14) \quad \begin{aligned} x_{t+1} &= A_t x_t + B_t v_t, \\ z_t &= \text{col}(z_t^{(1)}, \dots, z_t^{(m)}), \quad z_t^{(i)} = C_t^{(i)} x_t, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

комбинированный выход которой состоит из  $m$  векторов  $z_t^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i}$ . Максимальное уклонение выхода этой системы определим как

$$(2.15) \quad J_{0,v} = \max_{x_{t_0}, v_{t_0}, \dots, v_{t_0+N_0-1}} \frac{\max_{t=t_0, \dots, t_0+N_0} \max_{i=1, \dots, m} |z_t^{(i)}|}{\left( x_{t_0}^T R^{-1} x_{t_0} + \sum_{i=t_0}^{t_0+N_0-1} |v_i|^2 \right)^{1/2}}.$$

Ясно, что при  $m = 1$  это определение переходит в (2.2). Нетрудно также видеть, что для комбинированного выхода

$$J_{0,v} = \max_{i=1, \dots, m} J_{0,v}^{(i)},$$

где  $J_{0,v}^{(i)}$  – максимальное уклонение выхода  $z_t^{(i)}$ , определенное в (2.2). Из теоремы 2.1 непосредственно следует, что в случае комбинированного выхода

$$(2.16) \quad J_{0,v} = \max_{i=1, \dots, m} \max_{t=t_0, \dots, t_0+N_0} \lambda_{\max}^{1/2} \left( C_t^{(i)} P_t C_t^{(i)T} \right),$$

где матрица  $P_t$  есть решение уравнения (2.6). В частном случае  $z_i$  могут быть компонентами вектора  $z$  и тогда

$$J_{0,v} = \max_{i=1,\dots,m} \max_{t=t_0,\dots,t_0+N_0} d_{\max}^{1/2} \left( C_t^{(i)} P_t C_t^{(i)\top} \right),$$

где  $d_{\max}(\cdot)$  обозначает максимальный диагональный элемент соответствующей матрицы.

### 3. Максимальное уклонение выхода стационарной системы при внешнем возмущении на конечном и бесконечном горизонтах

Покажем, что для стационарной системы (2.1) с нулевыми начальными условиями при

$$A_t \equiv A, \quad B_t \equiv B, \quad C_t \equiv C, \quad t_0 = 0, \quad z_t = \sum_{i=0}^{\infty} G_{t-i} v_i,$$

$$G_k = \begin{cases} CA^{k-1}B, & k > 0, \\ 0, & k \leq 0 \end{cases}$$

можно определить и вычислить максимальное уклонение при внешнем возмущении на бесконечном горизонте. Действительно, в этом случае решение матричного уравнения (2.10), имеющее вид

$$P_t = \sum_{i=0}^{t-1} A^{t-1-i} B B^\top (A^{t-1-i})^\top,$$

монотонно не убывает, т.е.  $P_{t+1} \geq P_t$ . Следовательно,

$$\max_{N=1,\dots,N_0} \lambda_{\max}^{1/2}(C P_N C^\top) = \lambda_{\max}^{1/2}(C P_{N_0} C^\top),$$

т.е. для стационарных систем максимальное уклонение на конечном горизонте при внешнем возмущении и нулевом начальном состоянии всегда достигается на конце горизонта при  $N = N_0$ .

*Теорема 3.1. Максимальное уклонение выхода при внешнем возмущении в стационарной системе на горизонте  $[0, N_0]$  определяется формулой  $J_v = \lambda_{\max}^{1/2}(C_{N_0} P_{N_0} C_{N_0}^\top)$ , где  $P_{N_0}$  – решение уравнения (2.10), и вычисляется как*

$$J_v^2 = \min \gamma^2 :$$

$$(3.1) \quad \begin{pmatrix} Y_t & * & * \\ AY_t & Y_{t+1} & * \\ 0 & B^\top & I \end{pmatrix} \geq 0, \quad Y_0 \geq 0, \quad t = 0, \dots, N_0 - 1, \quad \begin{pmatrix} Y_{N_0} & * \\ C_{N_0} Y_{N_0} & \gamma^2 I \end{pmatrix} \geq 0.$$

Определим максимальное уклонение выхода устойчивой стационарной системы при внешнем возмущении на бесконечном горизонте

$$(3.2) \quad J_v^{(\infty)} = \max_{\{v_t\}} \frac{\sup_{t \geq 0} |z_t|}{\left( \sum_{i=0}^{\infty} |v_i|^2 \right)^{1/2}}.$$

*Теорема 3.2. Максимальное уклонение выхода при внешнем возмущении в устойчивой стационарной системе (2.1) на бесконечном горизонте равно*

$$J_v^{(\infty)} = \lambda_{\max}(CP_*C^T),$$

где  $P_* = P_*^T \geq 0$  – грамиан управляемости, являющийся решением уравнения

$$(3.3) \quad P = APA^T + BB^T.$$

*Следствие 3.1. Максимальное уклонение при внешнем возмущении на бесконечном горизонте находится как решение задачи полуопределенного программирования:*

$$(3.4) \quad J_v^{(\infty)} = \min \gamma^2 : \begin{pmatrix} Y & * & * \\ AY & Y & * \\ 0 & B^T & I \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} Y & * \\ CY & \gamma^2 I \end{pmatrix} \geq 0.$$

Отметим, что максимальное уклонение выхода устойчивой стационарной системы при нулевом начальном состоянии и внешнем возмущении на бесконечном горизонте является, по существу, одним из вариантов обобщенной  $H_2$ -нормы, введенной в [11] для непрерывных систем, а понятие максимального уклонения комбинированного выхода в этом случае совпадает с понятием обобщенной  $H_2$ -нормы, данным в [12, 13]. Из доказательства теоремы 3.2, которое использует методы оценки соответствующей операторной нормы из [14], следует, что наихудшее возмущение на бесконечном горизонте является “предельным” для наихудших возмущений на горизонте длины  $N$ , когда  $N$  неограниченно возрастает.

## 4. Синтез законов управления максимальными уклонениями

### 4.1. Оптимальное управление максимальным уклонением

Перейдем к синтезу оптимальных законов управления, которые обеспечивают минимальное значение максимальному уклонению целевого выхода системы. Вначале заметим, что соответствующая вариационная задача управления является вырожденной даже в случае, когда управление непосредственно включено в целевой выход, и имеет бесконечно много решений.

Покажем, что синтез оптимального управления в виде линейной нестационарной обратной связи по состоянию может быть осуществлен на основе характеристики максимального уклонения, данной в теореме 2.2 в терминах линейных матричных неравенств.

Для объекта управления

$$(4.1) \quad \begin{aligned} x_{t+1} &= A_t x_t + B_t v_t + B_{u,t} u_t, \\ z_t &= C_t x_t + D_t u_t, \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_0 + N_0 \end{aligned}$$

при законе управления вида  $u_t = \Theta_t x_t$  максимальное уклонение выхода при начальном и внешнем возмущениях согласно теореме 2.2 находится при решении задачи (2.8), в которой вместо матрицы  $A_t$  должна стоять матрица замкнутой системы  $A_t + B_{u,t} \Theta_t$ , а вместо  $C_t$  – матрица  $C_t + D_t \Theta_t$ . Вводя новые переменные  $Z_t = \Theta_t Y_t$ , приходим к следующему результату.

*Теорема 4.1. Матрицы  $\Theta_t$  закона управления, минимизирующего максимальное уклонение выхода при внешнем и начальном возмущениях в замкнутой системе на горизонте  $[t_0, t_0 + N_0]$ , находятся как  $\Theta_t = Z_t Y_t^{-1}$  при решении следующей задачи полуопределенного программирования:*

$$(4.2) \quad \begin{aligned} & \min \gamma^2 : \\ & \begin{pmatrix} Y_t & * & * \\ A_t Y_t + B_{u,t} Z_t & Y_{t+1} & * \\ 0 & B_t^T & I \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} Y_t & * \\ C_t Y_t + D_t Z_t & \gamma^2 I \end{pmatrix} \geq 0, \quad Y_{t_0} \geq R, \\ & t = t_0, \dots, t_0 + N_0 - 1, \quad \begin{pmatrix} Y_{t_0+N_0} & * \\ C_{t_0+N_0} Y_{t_0+N_0} + D_{t_0+N_0} Z_{t_0+N_0} & \gamma^2 I \end{pmatrix} \geq 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом синтезируются законы управления, обеспечивающие минимальное значение максимальному уклонению при внешнем возмущении или всплеску при начальном возмущении.

#### 4.2. Оптимальные по Парето управления максимальными уклонениями нескольких выходов

Рассмотрим теперь многокритериальную задачу управления максимальными уклонениями нескольких целевых выходов системы

$$(4.3) \quad \begin{aligned} x_{t+1} &= A_t x_t + B_t v_t + B_{u,t} u_t, \quad t = t_0, \dots, t_0 + N_0, \\ z_t^{(i)} &= C_t^{(i)} x_t + D_t^{(i)} u_t, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

где  $z_t^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, m$  – целевые выходы. Пусть  $J_{0,v}^{(i)}(\Theta_{t_0}^{t_0+N_0})$  – максимальное уклонение  $i$ -го целевого выхода при внешнем и начальном возмущении для этой системы, замкнутой обратной связью  $u_t = \Theta_t x_t$ ,  $t = t_0, \dots, t_0 + N_0$ , где  $\Theta_{t_0}^{t_0+N_0}$  обозначает набор матриц  $\Theta_{t_0}, \dots, \Theta_{t_0+N_0}$ . Поставим задачу нахождения оптимальных по Парето параметров  $\Theta_{t_0}^{t_0+N_0}$  в многокритериальной задаче

$$(4.4) \quad \widehat{\Theta}_{t_0}^{t_0+N_0} = \arg \min_{\Theta_{t_0}^{t_0+N_0}} \left\{ J_{0,v}^{(i)}(\Theta_{t_0}^{t_0+N_0}), i = 1, \dots, m \right\}.$$

Множество  $\mathcal{P} = \{\widehat{\Theta}_{t_0}^{t_0+N_0}\}$  является оптимальным по Парето, если неравенства  $J_{0,v}^{(i)}(\Theta_{t_0}^{t_0+N_0}) \leq J_{0,v}^{(i)}(\widehat{\Theta}_{t_0}^{t_0+N_0})$ ,  $i = 1, \dots, m$ , в которых по меньшей мере одно является строгим, не выполняются для любого набора матриц  $\Theta_{t_0}^{t_0+N_0}$ . Одним из методов решения этой задачи является выбор скалярной целевой функции

$$(4.5) \quad J_{\alpha}(\Theta_{t_0}^{t_0+N_0}) = \max_{i=1, \dots, m} J_{0,v}^{(i)}(\Theta_{t_0}^{t_0+N_0})/\alpha_i,$$

где  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , известной как свертка Гермейера [15]. Необходимые условия оптимальности по Парето формулируются следующим образом.

*Теорема 4.2 ([12]). Пусть  $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$  – оптимальная по Парето точка в пространстве критериев и минимум целевой функции  $J_{\alpha}(\Theta_{t_0}^{t_0+N_0})$  при  $\alpha_i = \gamma_i / \max_{k=1, \dots, m} \gamma_k$  достигается в  $\Theta_{t_0}^{t_0+N_0}(\alpha)$ . Тогда  $\Theta_{t_0}^{t_0+N_0}(\alpha) \in \mathcal{P}$  и  $J_{0,v}^{(i)}(\Theta_{t_0}^{t_0+N_0}(\alpha)) = \gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .*

Согласно (4.5) и теореме 2.1 свертка Гермейера в рассматриваемой многокритериальной задаче имеет вид

$$(4.6) \quad J_{\alpha}(\Theta_{t_0}^{t_0+N_0}) = \max_{i=1, \dots, m} \max_{t_0, \dots, t_0+N_0} \lambda_{\max}^{1/2}(C_t^{(i)} P_t C_t^{(i)T})/\alpha_i,$$

где  $P_t = P_t^T \geq 0$  – решение уравнения (2.6) для замкнутой системы. Обращаясь к (2.16), нетрудно видеть, что свертка Гермейера (4.6) является максимальным отклонением комбинированного выхода замкнутой системы

$$(4.7) \quad \begin{aligned} x_{t+1} &= (A_t + B_{u,t} \Theta_t) x_t + B_t v_t, \quad t = t_0, \dots, t_0 + N_0, \\ z_t &= \text{col}(z_t^{(1)}, \dots, z_t^{(m)}), \quad z_t^{(i)} = \alpha_i^{-1} (C_t^{(i)} + D_t^{(i)} \Theta_t) x_t, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Это непосредственно приводит к следующему результату.

*Теорема 4.3. Оптимальные по Парето управления в многокритериальной задаче (4.4) минимизации максимальных отклонений выходов системы (4.3) суть оптимальные управления по отношению к максимальному отклонению комбинированного выхода системы (4.7), состоящего из параметризованных выходов системы (4.3) при всех  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .*

Заметим, что, вообще говоря, не всякое оптимальное управление по отношению к максимальному отклонению комбинированного выхода системы будет оптимальным по Парето. Матрицы параметров оптимальных по Парето регуляторов могут быть найдены, если вычисление свертки Гермейера осуществлять с помощью задачи полуопределенного программирования подобно тому, как это было сделано выше для вычисления максимального отклонения выхода при внешнем и начальном возмущениях. А именно, из (4.6) следует, что матрицы параметров оптимальных по Парето регуляторов находятся как

$\hat{\Theta}_t = Z_t Y_y^{-1}$  при решении задачи

$$\begin{aligned} & \min \gamma^2 : \\ (4.8) \quad & \begin{pmatrix} Y_t & * & * \\ A_t Y_t + B_{u,t} Z_t & Y_{t+1} & * \\ 0 & B_t^T & I \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} Y_t & * \\ C_t^{(i)} T_t + D_t^{(i)} Z_t & \gamma^2 \alpha_i^2 I \end{pmatrix} \geq 0, \quad Y_{t_0} \geq R, \\ & i = 1, \dots, m, \quad t = t_0, \dots, t_0 + N_0 - 1, \\ & \begin{pmatrix} Y_{t_0+N_0} & * \\ C_{t_0+N_0}^{(i)} Y_{t_0+N_0} + D_{t_0+N_0}^{(i)} Z_{t_0+N_0} & \gamma^2 \alpha_i^2 I \end{pmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Аналогичным образом решаются и многокритериальные задачи управления максимальными отклонениями при внешнем возмущении и нулевых начальных условиях и при неизвестном начальном состоянии невозмущенной системы. Для стационарных систем на бесконечном горизонте имеет место следующее утверждение.

*Теорема 4.4. Оптимальные по Парето стационарные законы управления в многокритериальной задаче минимизации максимальных отклонений стационарной системы (4.3) при нулевом начальном состоянии и внешнем возмущении на бесконечном горизонте имеют параметры  $\Theta_\alpha = Z_\alpha Y_\alpha^{-1}$ , где  $Y_\alpha = Y_\alpha^T$  и  $Z_\alpha$  – решения задачи полуопределенного программирования:*

$$\begin{aligned} & J_v^{(\infty)} = \min \gamma^2 : \\ (4.9) \quad & \begin{pmatrix} Y & * & * \\ AY + B_u Z & Y & * \\ 0 & B^T & I \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} Y & * \\ C^{(i)} Y + D^{(i)} Z & \gamma^2 \alpha_i^2 I \end{pmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Заметим, что в многокритериальных задачах одним из целевых выходов целесообразно выбирать управление, чтобы обеспечить компромисс между максимальными отклонениями некоторых выходов и максимальным отклонением самого управления.

## 5. Необходимые и достаточные условия устойчивости и ограниченности на конечном горизонте

По аналогии с непрерывными системами назовем дискретную систему

$$(5.1) \quad x_{t+1} = A_t x_t + B_t v_t, \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_0 + N_0, \quad N_0 \geq 1$$

ограниченной на конечном интервале  $[t_0, t_0 + N_0]$  при ненулевых начальных условиях и внешнем возмущении из класса  $l_2$  для заданных положительных параметров  $c_1, c_2, d$  ( $c_1 < c_2$ ) и положительно определенной матричной функции  $\Gamma_t = \Gamma_t^T$ , если верна импликация

$$(5.2) \quad x_{t_0}^T \Gamma_{t_0} x_{t_0} \leq c_1 \Rightarrow x_t^T \Gamma_t x_t < c_2 \quad \forall t \in [t_0, t_0 + N_0], \quad \forall v : \|v\|_2^2 \leq d.$$

Ограниченность дискретной системы при внешнем возмущении, порождаемом заданной линейной экзогенной системой, была определена и изучена в [4, 5]. Выясним условия ограниченности системы в смысле определения (5.2).

Если для максимального уклонения выхода  $z_t = \Gamma_t^{1/2} x_t$  при выборе  $R^{-1} = \Gamma_{t_0}$  справедливо неравенство

$$(5.3) \quad J_{0,v}^2 = \max_{x_{t_0}, v_{t_0}, \dots, v_{t_0+N_0-1}} \frac{\max_{t=t_0, \dots, t_0+N_0} x_t^T \Gamma_t x_t}{x_{t_0}^T \Gamma_{t_0} x_{t_0} + \sum_{i=t_0}^{t_0+N_0-1} |v_i|^2} < \frac{c_2}{c_1 + d},$$

то система (5.1) ограничена для заданных  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $d$  и  $\Gamma_t$ . С учетом теорем 2.1 или 2.2 условие (5.3) формулируется в терминах решений разностных матричных уравнений или неравенств. Однако выполнение неравенства (5.3) не является необходимым для ограниченности системы, так как из  $J_{0,v}^2 \geq c_2/(c_1 + d)$  при  $x_{t_0}^T \Gamma_{t_0} x_{t_0} \leq c_1$  и  $\|v\|_2^2 \leq d$  не следует, вообще говоря, неравенство  $x_t^T \Gamma_t x_t \geq c_2$ , т.е. система может оставаться ограниченной в смысле определения (5.2).

Модифицируем определение (5.2) и скажем, что система (5.1) ограничена на конечном интервале времени для заданных положительных параметров  $s_1$ ,  $s_2$  ( $s_1 \leq s_2$ ) и положительно определенной матричной функции  $\Gamma_t$ , если верна импликация

$$(5.4) \quad x_{t_0}^T \Gamma_{t_0} x_{t_0} + \|v\|_2^2 \leq s_1 \Rightarrow x_t^T \Gamma_t x_t \leq s_2 \quad \forall t \in [t_0, t_0 + N_0].$$

Необходимые и достаточные условия ограниченности системы на конечном интервале в смысле определения (5.4) формулируются следующим образом.

*Теорема 5.1. Следующие утверждения являются эквивалентными.*

- (a) Система (5.1) является ограниченной в смысле определения (5.4) на конечном интервале  $[t_0, t_0 + N_0]$  для заданных  $s_1$ ,  $s_2$  ( $s_1 \leq s_2$ ) и  $\Gamma_t > 0$ .
- (b) Максимальное уклонение выхода  $z_t = \Gamma_t^{1/2} x_t$  при  $R^{-1} = \Gamma_{t_0}$  удовлетворяет неравенству  $J_{0,v}^2 \leq s_2/s_1$ .
- (c) Для решения  $P_t$  уравнения (2.6) при  $P_{t_0} = \Gamma_{t_0}^{-1}$  выполнено условие

$$(5.5) \quad \lambda_{\max} \left( \Gamma_t^{1/2} P_t \Gamma_t^{1/2} \right) \leq s_2/s_1 \quad \forall t \in [t_0, t_0 + N_0].$$

- (d) Линейные матричные неравенства

$$(5.6) \quad \begin{pmatrix} Y_t & * & * \\ A_t Y_t & Y_{t+1} & * \\ 0 & B_t^T & I \end{pmatrix} \geq 0, \quad t = t_0, \dots, t_0 + N_0 - 1, \quad Y_{t_0} \geq \Gamma_{t_0}^{-1},$$

$$Y_t \leq (s_2/s_1) \Gamma_t^{-1}, \quad t = t_0 + 1, \dots, t_0 + N_0$$

*являются разрешимыми.*

Согласно [3, 6] система (5.1) при отсутствии внешнего возмущения называется устойчивой на конечном интервале для заданных  $\varepsilon$  и  $\widehat{R} > 0$ , если верна импликация

$$(5.7) \quad x_{t_0}^T \widehat{R} x_{t_0} \leq 1 \Rightarrow x_t^T \widehat{R} x_t < \varepsilon^2 \quad \forall t \in [t_0, t_0 + N_0].$$

Достаточные условия устойчивости системы на конечном интервале, полученные там же, состоят в выполнении следующих неравенств:

$$(5.8) \quad \begin{aligned} A_t^T X_{t+1} A_t - X_t < 0, \quad X_t \geq \widehat{R}, \quad t = t_0, \dots, t_0 + N_0 - 1, \\ X_{t_0+N_0} \geq \widehat{R}, \quad X_{t_0} < \varepsilon^2 \widehat{R}. \end{aligned}$$

Модифицируем данное определение с целью получения неконсервативных условий. Систему (5.1) при отсутствии внешнего возмущения назовем устойчивой на конечном интервале для заданных  $\varepsilon$  и  $\widehat{R}$ , если верна импликация

$$(5.9) \quad x_{t_0}^T \widehat{R} x_{t_0} \leq 1 \Rightarrow x_t^T \widehat{R} x_t \leq \varepsilon^2 \quad \forall t \in [t_0, t_0 + N_0].$$

Разница между этими определениями состоит в замене строгого неравенства в одном на нестрогое неравенство в другом. Согласно теореме 5.1 при  $B_t \equiv 0$ ,  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = \varepsilon^2$ ,  $\Gamma_t \equiv \widehat{R}$  необходимые и достаточные условия устойчивости системы на конечном интервале в смысле определения (5.9) состоят в выполнении неравенств

$$(5.10) \quad \begin{aligned} A_t Y_t A_t^T - Y_{t+1} \leq 0, \quad Y_t \leq \varepsilon^2 \widehat{R}^{-1}, \quad t = t_0, \dots, t_0 + N_0 - 1, \\ Y_{t_0+N_0} \leq \varepsilon^2 \widehat{R}^{-1}, \quad Y_{t_0} \geq \widehat{R}^{-1}. \end{aligned}$$

Умножая первое неравенство в (5.10) слева и справа на  $Y_{t+1}^{-1}$ , обозначая  $X_t = \varepsilon^2 Y_t^{-1}$  и применяя лемму Шура, приходим к неравенствам

$$(5.11) \quad \begin{aligned} A_t^T X_{t+1} A_t - X_t \leq 0, \quad X_t \geq \widehat{R}, \quad t = t_0, \dots, t_0 + N_0 - 1, \\ X_{t_0+N_0} \geq \widehat{R}, \quad X_{t_0} \leq \varepsilon^2 \widehat{R}, \end{aligned}$$

которые также, как (5.10), выражают необходимые и достаточные условия устойчивости системы на конечном интервале в предложенной модификации. Сравнение (5.11) и (5.8) выявляет лишь “небольшое” отличие: в (5.11) все неравенства являются нестрогими, тогда как в (5.8) два из них строгие. Таким образом, переход от строгого неравенства к нестрогому в определении устойчивости на конечном интервале позволяет сформулировать конструктивные необходимые и достаточные условия.

*Замечание 1.* Если импликация (5.4) верна при  $x_{t_0} = 0$ , то система (5.1) при нулевом начальном состоянии называется устойчивой по входу и выходу на конечном интервале для заданных  $s_1$ ,  $s_2$  и  $\Gamma_t > 0$ . Из теоремы 5.1 следует, что необходимые и достаточные условия того, что система обладает данным свойством, выражаются неравенствами (5.5) при  $P_{t_0} = 0$  или неравенствами (5.6), из которых исключено неравенство  $Y_{t_0} \geq \Gamma_{t_0}^{-1}$ .

Условия ограниченности системы на конечном интервале, сформулированные в теореме 5.1, п. (d), позволяют синтезировать законы управления, обеспечивающие устойчивость, устойчивость по входу и выходу и ограниченность системы на конечном интервале при заданных значениях параметров  $s_1, s_2$  и матричной функции  $\Gamma_t$ .

### 6. Синтез оптимального виброизолятора

Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы, показанную на рис. 1 и представляющую собой упругий объект, который моделируется двумя материальными точками 2 и 3, связанными между собой линейными упругим и диссипативным элементами; этот упругий объект связан такими же линейными упругим и диссипативным элементами и управляемым элементом (называемым далее виброизолятором) с другим телом 1, который моделирует подвижное основание. Динамика данной механической системы (в безразмерных переменных и параметрах) описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 - 2\beta\dot{x}_1 + \beta\dot{x}_2 + u + v, \\
 \ddot{x}_2 &= x_1 - x_2 + \beta\dot{x}_1 - \beta\dot{x}_2 + v, \\
 x_1(0) &= x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \\
 \dot{x}_1(0) &= x_{30}, \quad \dot{x}_2(0) = x_{40},
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

где  $x_1$  и  $x_2$  – координаты материальных точек 2 и 3 относительно подвижного основания,  $u$  – усилие, создаваемое виброизолятором при его деформации (т.е. при смещении точки 2 относительно точки 1),  $v$  – с точностью до знака ускорение основания (материальной точки 1),  $\beta$  – заданный положительный параметр демпфирования. Задача виброизоляции состоит в поиске управления  $u = \theta_1(t)x_1 + \theta_2(t)x_2 + \theta_3(t)\dot{x}_1 + \theta_4(t)\dot{x}_2$ , определяющего характеристику

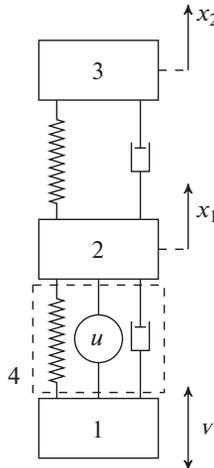


Рис. 1. Схематическое изображение системы активной виброзащиты.

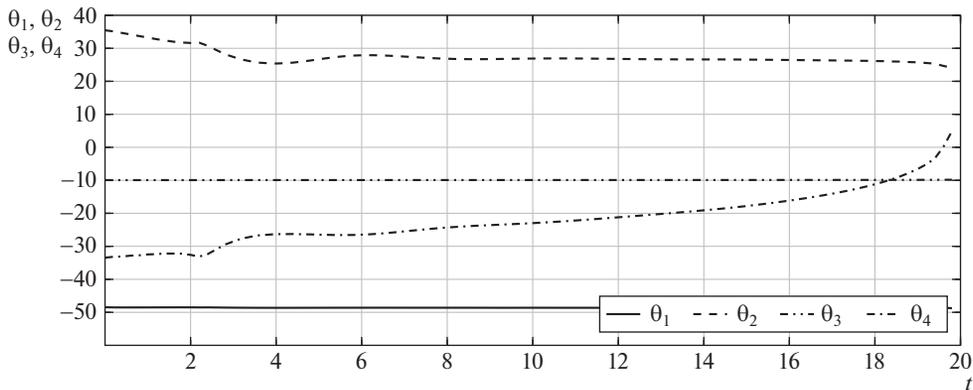


Рис. 2. Графики зависимостей от времени оптимальных по критерию  $J_1$  коэффициентов обратной связи.

виброизолятора и обеспечивающего требуемое качество переходных процессов в данной механической системе.

Для количественной оценки переходных процессов на конечном интервале времени  $[0, T]$  введем два показателя

$$J_1[\Theta(t)] = \sup_{x_0, v \in L_2} \frac{\sup_{t \in [0, T]} \max\{|x_1(t)|, |x_2(t) - x_1(t)|\}}{(x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_2^2)^{1/2}},$$

$$J_2[\Theta(t)] = \sup_{x_0, v \in L_2} \frac{\sup_{t \in [0, T]} |-x_1(t) - \beta \dot{x}_1(t) + u(t)|}{(x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|_2^2)^{1/2}},$$

где  $x_0 = (x_{10} \ x_{20} \ x_{30} \ x_{40})^T$ ,  $\Theta(t) = (\theta_1(t) \ \theta_2(t) \ \theta_3(t) \ \theta_4(t))^T$ ,  $R$  – заданная положительно определенная матрица,

$$\|v\|_2^2 = \int_0^T |v(t)|^2 dt.$$

Первый показатель характеризует максимальную деформацию механической системы, а второй – максимальную силу, противодействующую смещению упругого объекта относительно основания. Желательно, чтобы оба эти показателя были как можно меньше.

Проведем далее на отрезке  $[0, T]$  дискретизацию данной системы и указанных показателей  $J_1$  и  $J_2$  с шагом дискретизации  $h$  и получим дискретную систему 4-го порядка вида (2.14) с показателями в форме максимальных уклонений вида (2.15). Зададим следующие числовые значения параметров:  $h = 0,2$ ,  $T = 20$ ,  $\beta = 0,1$ ,  $R = \text{blockdiag}(0, 1I_2, I_2)$ . Сначала рассмотрим задачу оптимального управления, в которой минимизируется показатель  $J_1$ . В результате применения изложенной выше теории получены оптимальные коэффициенты  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$ ,  $\theta_3(t)$ ,  $\theta_4(t)$ , графики которых представлены на рис. 2,

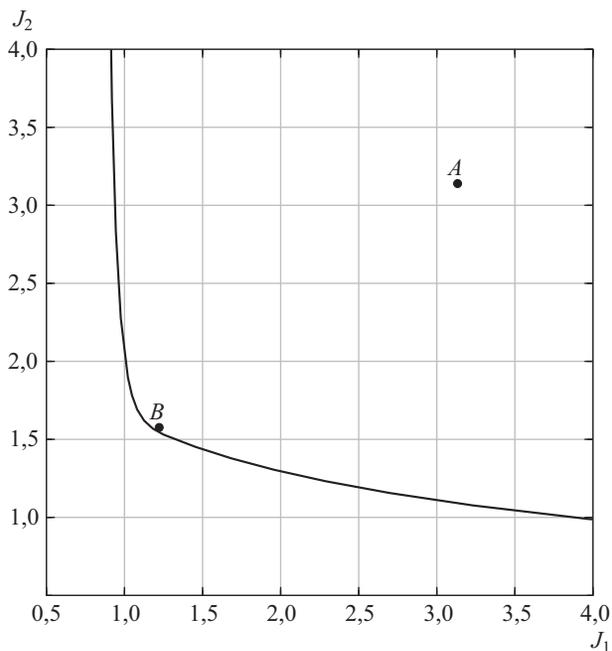


Рис. 3. Парето оптимальный фронт.

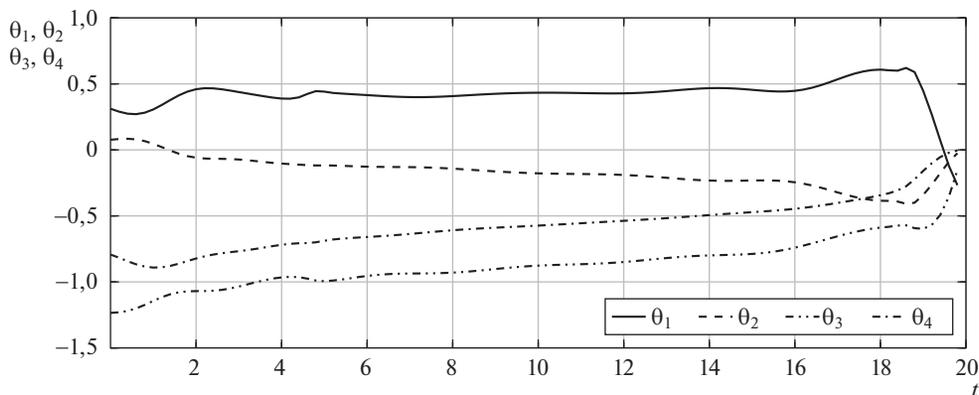


Рис. 4. Графики зависимостей от времени оптимальных по Парето коэффициентов обратной связи.

при этом  $J_1 = 0,847$ , а  $J_2 = 152,56$ . Таким образом, минимизация только одного показателя ( $J_1$ ) приводит к очень большому значению другого ( $J_2$ ), поэтому целесообразно рассмотреть далее двухкритериальную задачу. Результаты решения двухкритериальной задачи представлены на рис. 3 в виде кривой (Парето оптимальный фронт) на плоскости ( $J_1$ ,  $J_2$ ). На этом же рисунке указана точка A, которая соответствует случаю отсутствия управления (т.е.  $u = 0$ ). Точке с координатами (1,183; 1,568), принадлежащей указанной кривой, на рис. 3 соответствуют оптимальные нестационарные параметры  $\Theta(t)$ ,

графики которых представлены на рис. 4. Если усреднить значения этих коэффициентов обратной связи по времени, то получатся постоянные коэффициенты  $\Theta = (0,428; -0,168; -0,868; -0,564)$ , которым на рис. 3 соответствует точка  $B$  с координатами  $(1,222; 1,576)$ . Таким образом, выбор стационарного регулятора (виброизолятора) с указанными параметрами обеспечивает приемлемый компромисс между выбранными показателями.

## 7. Заключение

В статье показано, что максимальные отклонения выхода линейной нестационарной динамической системы на конечном временном горизонте при внешнем и/или начальном возмущениях можно характеризовать в терминах решений линейных матричных неравенств. Это позволяет синтезировать оптимальные по максимальным отклонениям нестационарные законы управления, в том числе и многокритериальные. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости и ограниченности системы на конечном интервале, позволяющие синтезировать соответствующие законы управления. Установлено, что максимальное отклонение выхода стационарной системы при нулевом начальном состоянии и внешнем возмущении на бесконечном горизонте и оптимальное по этому критерию управление могут быть найдены как решения линейных матричных неравенств. Приводятся результаты численных экспериментов в задаче виброзащиты, которые показывают эффективность предлагаемого подхода и, в частности, возможность синтеза субоптимального управления в виде линейной стационарной обратной связи.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Сначала приведем вспомогательное утверждение.

*Лемма П.1.* Нормированные собственные векторы матриц  $S^T S$  и  $SS^T$ , отвечающие максимальным собственным значениям, связаны соотношением

$$(П.1) \quad e_{\max}(S^T S) = \lambda_{\max}^{-1/2}(SS^T) S^T e_{\max}(SS^T),$$

где  $\lambda_{\max}(SS^T) = \lambda_{\max}(S^T S)$ .

*Доказательство леммы П.1.* Так как

$$SS^T e_{\max}(SS^T) = \lambda_{\max}(SS^T) e_{\max}(SS^T),$$

то, умножая обе части этого равенства слева на  $S^T$  и нормируя вектор  $S^T e_{\max}(SS^T)$ , получим (П.1).

*Доказательство теоремы 2.1.* Запишем выход системы (2.1) в виде

$$z_{t_0+N} = S_N w_N,$$

где

$$(П.2) \quad S_N = (C_{t_0+N} \Phi(t_0 + N, t_0) R^{1/2} \quad G(t_0 + N, t_0) \cdots G(t_0 + N, t_0 + N - 1)),$$

$$w_N = \begin{pmatrix} R^{-1/2} x_{t_0} \\ v_{t_0} \\ \dots \\ v_{t_0+N-1} \end{pmatrix}.$$

С учетом того, что  $\lambda_{\max}(S_N^T S_N) = \lambda_{\max}(S_N S_N^T)$  и  $S_N S_N^T = C_{t_0+N} P_{t_0+N} C_{t_0+N}^T$ , получим

$$|z_{t_0+N}|^2 \leq \lambda_{\max}(C_{t_0+N} P_{t_0+N} C_{t_0+N}^T) \left( x_{t_0}^T R^{-1} x_{t_0} + \sum_{t=t_0}^{t_0+N-1} |v_t|^2 \right),$$

где равенство достигается и

$$P_{t_0+N} = \Phi(t_0 + N, t_0) R \Phi^T(t_0 + N, t_0) + \sum_{i=t_0}^{t_0+N-1} \Phi(t_0 + N, i + 1) B_i B_i^T \Phi^T(t_0 + N, i + 1).$$

В силу (2.4) матрица  $P_{t_0+N}$  является решением разностного уравнения (2.6). Таким образом, учитывая (2.3), приходим к (2.5).

Пусть максимальное уклонение выхода происходит в момент  $t_* = t_0 + N_*$ . Тогда  $z_{t_0+N_*} = S_{N_*} w_{N_*}$ , где  $S_{N_*}$  и  $w_{N_*}$  определены в (П.2) при  $N = N_*$ , а  $\max\{|z_{t_0+N_*}|^2 : |w_{N_*}| = 1\} = \gamma_*^2$  достигается при  $\hat{w}_{N_*} = e_{\max}(S_{N_*}^T S_{N_*})$ . С учетом леммы П.1 получим

$$\hat{w}_{N_*} = \gamma_*^{-1} S_{N_*}^T e_{\max}(S_{N_*} S_{N_*}^T) = \gamma_*^{-1} S_{N_*}^T e_{\max}(C_{t_*} P_{t_*} C_{t_*}^T),$$

что непосредственно приводит к (2.7).

*Доказательство теоремы 2.2.* Пусть в задаче (2.8)  $\min \gamma^2 = \gamma_*^2$ . Тогда матрицы  $Y_t = Y_t^T$ ,  $t = t_0, \dots, t_0 + N_0$  удовлетворяют неравенствам

$$(П.3) \quad Y_{t+1} \geq A_t Y_t A_t^T + B_t B_t^T, \quad C_t Y_t C_t^T \leq \gamma^2 I, \quad Y_{t_0} \geq R.$$

Из (П.3) следует, что соотношения

$$Y_{t+1} = A_t Y_t A_t^T + B_t B_t^T + Q_t, \quad Y_{t_0} \geq R$$

выполняются при некоторых матрицах  $Q_t = Q_t^T \geq 0$ . Тогда с учетом (2.6) имеем

$$Y_{t+1} - P_{t+1} = A_t (Y_t - P_t) A_t^T + Q_t, \quad Y_{t_0} - P_{t_0} \geq 0.$$

Отсюда получим, что для всех  $t = t_0, \dots, t_0 + N_0$

$$Y_t - P_t = \Phi(t, t_0) (Y_{t_0} - P_{t_0}) \Phi^T(t, t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} \Phi(i, t_0) Q_i \Phi^T(i, t_0) \geq 0.$$

Следовательно,

$$J_{0,v}^2 = \max_{t=t_0, \dots, t_0+N_0} \lambda_{\max}(C_t P_t C_t^T) \leq \max_{t=t_0, \dots, t_0+N_0} \lambda_{\max}(C_t Y_t C_t^T) \leq \gamma_*^2.$$

Если предположить, что  $J_{0,v}^2 = \gamma_0^2 < \gamma_*^2$ , то задача (2.8) при  $Y_t = P_t$ ,  $t = t_0 + 1, \dots, t_0 + N_0$  имеет решение  $\gamma_0^2 < \gamma_*^2$ , что противоречит условию  $\min \gamma^2 = \gamma_*^2$ .

*Доказательство теоремы 3.2.* При неограниченном увеличении длины горизонта, т.е. когда  $N_0 \rightarrow \infty$ , решение разностного уравнения

$$(П.4) \quad P_{t+1} = A P_t A^T + B B^T, \quad P_0 = 0,$$

монотонно стремится к граммianу управляемости  $P_* = \sum_{i=0}^{\infty} A^i B B^T A^{iT}$  – решению алгебраического уравнения (3.3). Так как  $z_t = \sum_{i=0}^{t-1} G_{t-i} v_i$  и  $\lambda_{\max}(S S^T) = \lambda_{\max}(S^T S)$ , то верны следующие неравенства:

$$|z_t|^2 \leq \lambda_{\max} \left( \sum_{i=0}^{t-1} G_i G_i^T \right) \sum_{i=0}^{t-1} |v_i|^2 \leq \lambda_{\max} \left( \sum_{i=0}^{\infty} G_i G_i^T \right) \sum_{i=0}^{\infty} |v_i|^2,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} G_i G_i^T = C P_* C^T.$$

Отсюда следует, что  $\sup_{t \geq 0} |z_t| \leq \lambda_*^{1/2} (\sum_{i=0}^{\infty} |v_i|^2)^{1/2}$ , где  $\lambda_* = \lambda_{\max}(C P_* C^T)$ . Осталось показать, что здесь имеет место равенство. Выбирая некоторое  $N$ , определим возмущение

$$\hat{v}_i = \lambda_*^{-1/2} G_{N-i}^T e, \quad e = e_{\max}(C P_* C^T), \quad |e| = 1, \quad \sum_{i=0}^{\infty} |\hat{v}_i|^2 \leq 1.$$

При этом возмущении имеем

$$|z_t| = \max_{|z|=1} z^T z_t \geq e^T z_t = \lambda_*^{-1/2} e^T \sum_{i=0}^{\infty} G_{t-i} G_{N-i}^T e,$$

и, значит, для любого  $N$  найдется возмущение, при котором

$$\sup_{t \geq 0} |z_t| \geq \lambda_*^{-1/2} \sup_{t \geq 0} e^T \sum_{i=0}^{\infty} G_{t-i} G_{N-i}^T e = \lambda_*^{-1/2} e^T \sum_{i=0}^N G_i G_i^T e.$$

Отсюда следует, что

$$\sup_{t \geq 0} |z_t| \geq \lambda_*^{-1/2} \sup_{N > 0} e^T \sum_{i=0}^N G_i G_i^T e = \lambda_*^{-1/2} e^T \sum_{i=0}^{\infty} G_i G_i^T e = \lambda_*^{1/2},$$

что и требовалось доказать.

*Доказательство теоремы 5.1.* Утверждение (a)  $\rightarrow$  (b) докажем от противного: пусть при выполнении (5.4) имеем  $J_{0,v}^2 > s_2/s_1$ . Так как

$$J_{0,v}^2 = s_1^{-1} \max_{x_{t_0}, v \in l_2} \max_{t \in [t_0, t_0 + N_0]} x_t^T \Gamma_t x_t > s_2/s_1,$$

где  $\max$  берется по всем  $x_{t_0}^T \Gamma_{t_0} x_{t_0} + \|v\|_2^2 = s_1$ , то  $\max_{t \in [t_0, t_0 + N_0]} x_t^T \Gamma_t x_t > s_2$ , что противоречит (5.4). Утверждение (b)  $\rightarrow$  (a) следует непосредственно из неравенства

$$\max_t x_t^T \Gamma_t x_t \leq J_{0,v}^2 (x_{t_0}^T \Gamma_{t_0} x_{t_0} + \|v\|^2) \leq s_2.$$

Утверждение (b)  $\leftrightarrow$  (c) следует из теоремы 2.1. Утверждение (c)  $\leftrightarrow$  (d) следует из теоремы 2.2.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M.* Finite-Horizon Multi-Objective Generalized  $H_2$  Control with Transients // *Automatica*. 2019. V. 106. No. 8. P. 27–34.
2. *Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М.* Оптимальное управление максимальными отклонениями выходов линейной нестационарной системы на конечном интервале времени // *АиТ*. 2019. № 10. С. 37–61.  
*Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M.* Optimal Control of Maximum Output Deviations of a Linear Time-Varying System on a Finite Horizon // *Autom. Remote Control*. 2019. V. 80. No. 10. P. 1783–1802.
3. *Amato F., Carbone M., Ariola M., Cosentino C.* Finite-Time Stability of Discrete-Time Systems // *Proc. Amer. Control Conf. Boston, USA*. 2004. P. 1440–1444.
4. *Amato F., Ariola M.* Finite-Time Control of Discrete-Time Linear Systems // *IEEE Trans. Autom. Control*. 2005. V. 50. No. 5. P. 724–729.
5. *Ichihara H., Katayama H.* Necessary and Sufficient Conditions for Finite-Time Boundedness of Linear Discrete-Time Systems // *Proc. Joint 48th IEEE CDC 28th Chinese Control Conf., Shanghai, P.R. China*. 2009. P. 3226–3231.
6. *Amato F., Ariola M., Cosentino C.* Finite-time control of discrete-time linear systems: Analysis and design conditions // *Automatica*. 2010. V. 46. P. 919–924.
7. *Kussaba H.T.M., Ishihara J.Y., Borges R.A.* Finite time boundedness and stability analysis of discrete time uncertain systems // *Proc. 54th CDC Osaka, Japan*. 2015. P. 5972–5977.
8. *Wilson D.A., Nekoui M.A., Halikias G.D.* An LQR weight selection approach to the discrete generalized  $H_2$  control problem // *Int. J. Control*. 1998. V. 71. No. 1. P. 93–101.
9. *Коган М.М., Кривдина Л.Н.* Синтез многоцелевых линейных законов управления дискретными объектами при интегральных и фазовых ограничениях // *АиТ*. 2011. № 7. С. 83–95.  
*Kogan M.M., Krivdina L.N.* Synthesis of Multipurpose Linear Control Laws of Discrete Objects under Integral and Phase Constraints // *Autom. Remote Control*. 2011. V. 72. No. 7. P. 1427–1439.
10. *Агиевич В.Н., Парсегов С.Э., Шербakov П.С.* Верхние оценки всплеска в линейных дискретных системах // *АиТ*. 2018. № 11. С. 32–46.  
*Ahiyevich U.M., Parsegov S.E., Shcherbakov P.S.* Upper Bounds on Peaks in Discrete-Time Linear Systems // *Autom. Remote Control*. 2018. V. 79. No. 11. P. 1976–1988.

11. *Wilson D.A.* Convolution and Hankel Operator Norms for Linear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. P. 94–97.
12. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Оптимальное по Парето обобщенное  $H_2$ -управление и задачи виброзащиты // АиТ. 2017. № 8. С. 76–90.  
*Balandin D.V., Kogan M.M.* Pareto Optimal Generalized  $H_2$ -control and Vibration Protection Problems // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 8. P. 1417–1429.
13. *Balandin D.V., Kogan M.M.* Multi-objective generalized  $H_2$  control // Automatica. 2019. V. 99. No. 1. P. 317–322.
14. *Chellaboina V., Haddad W.M., Bernstein D.S., Wilson D.A.* Induced Convolution Operator Norms of Linear Dynamical Systems // Proc. Amer. Control Conf., San Diego. 1999. P. 3805–3809.
15. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.П. Крищенко.*

Поступила в редакцию 06.02.2019

После доработки 02.04.2019

Принята к публикации 25.04.2019