А. А. Голован, А. И. Матасов, Применение гарантирующего подхода к задаче калибровки блока ньютонометров, *Автомат. и телемех.*, 2020, выпуск 4, 140–161

DOI: 10.31857/S0005231020040108

Автоматика и телемеханика, № 4, 2020

© 2020 г. **А.А. ГОЛОВАН, д-р физ.-мат. наук (aagolovan@yandex.ru),**
А.И. МАТАСОВ, д-р физ.-мат. наук (alexander.matasov@gmail.com)
(Лаборатория управления и навигации механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова)

ПРИМЕНЕНИЕ ГАРАНТИРУЮЩЕГО ПОДХОДА К ЗАДАЧЕ КАЛИБРОВКИ БЛОКА НЬЮТОНОМЕТРОВ[1]

Гарантирующий подход применяется к задаче совместной калибровки блока ньютонометров и высокоточного стенда. Получен оптимальный план калибровки с минимальным суммарным числом угловых положений стенда. Построены оптимальные гарантирующие оценки искомых параметров. Поскольку точно реализовать нужные положения стенда часто затруднительно, обсуждается процедура, позволяющая учесть ошибки, возникающие из-за неточности установок стенда в требуемые положения.

Ключевые слова: гарантирующий подход к оцениванию, блок ньютонометров, калибровка.

DOI: 10.31857/S0005231020040108

1. Введение

Гарантирующий подход к оцениванию в так называемой априорной постановке впервые появился в публикациях [1–3] (см. также [4]) и впоследствии был развит в [5–8]. Гарантирующий подход традиционно имеет свои приложения в космической баллистике. В данной статье показано, что при небольшой модификации область применения этого подхода намного шире.

В [9, 10] при помощи гарантирующего подхода исследовалась задача калибровки блока ньютонометров на стендах с грубой информацией об угловом положении стенда (с ошибками порядка десятков угловых минут).

В данной статье рассматривается применение гарантирующего подхода к задаче калибровки блока ньютонометров на прецизионных стендах, когда измерения угловых положений стенда весьма точны (с флуктуационными ошибками порядка нескольких угловых секунд). В этом случае математическая модель соответствующей задачи оценивания существенно отличается от моделей в [9, 10]; в частности, в настоящей статье измерения состоят из трех функций, а в предыдущих – из одной. Следовательно, оптимальные планы измерений также существенно отличаются. Отметим, что после осреднения показаний блока ньютонометров помеха в соответствующей задаче оценивания состоит из суммы остаточной ошибки электромеханического контура блока и отброшенных квадратичных членов. Эта величина не имеет ни четкой параметрической модели, ни стабильного спектра. Еще более важно, что решение

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00054-а).

задачи оптимального гарантирующего оценивания из всей совокупности измерений выделяет ограниченное число наиболее информативных измерений. Таким образом, заодно решается и задача оптимального планирования экспериментов. Поэтому применение гарантирующего подхода для решения задачи калибровки очень адекватно рассматриваемой проблеме.

Опишем прикладное содержание проблемы. Одним из основных сенсоров инерциальной навигационной системы [11, 12] является блок из трех ньютонометров, измеряющий удельную силу, действующую на условную чувствительную массу блока со стороны объекта, на котором он установлен. Согласно второму закону Ньютона эта сила равна разности между абсолютным ускорением чувствительной массы (центра объекта) и гравитационным ускорением. В технике эта величина называется кажущимся ускорением. При статических испытаниях она равна ускорению силы тяжести (с обратным знаком). Хорошо известно, что блок ньютонометров нуждается в калибровке перед его основным использованием. Вопросами калибровки традиционно занимаются во многих специализированных предприятиях и научных заведениях. Калибровке блока ньютонометров (в технике они часто называются акселерометрами) посвящено необъятное количество публикаций (см., например, [10, 13–31]). Часто в них исследуются технологические особенности процесса калибровки, но строгие математические постановки задач редки. В известных авторам публикациях вопросы минимизации числа угловых положений стенда излагаются скупо (кроме [9, 10]) и исходят из эвристических соображений. Нередко после составления модели и упоминания о методе максимального правдоподобия все остальное доверяется стандартным пакетам программ, максимизирующим функцию правдоподобия без должного анализа задачи оценивания. Иногда соответствующие задачи оптимизации являются невыпуклыми, что крайне осложняет их численное решение.

Простые “инженерные” алгоритмы стендовой калибровки блока ньютонометров очень наглядны: надо поставить (при помощи стенда) ньютонометры вверх и вниз и что-то сложить или вычесть и разделить пополам. При этом обычно предполагается, что угловые и геометрические погрешности прецизионных стендов малы настолько, что ими можно пренебречь. Однако анализ разнообразных источников погрешностей блока и самого стенда показывает, что, на первый взгляд, тривиальная процедура калибровки не так проста. Кроме того, представляется разумным включать в состав оцениваемых параметров возможные геометрические погрешности (перекосы осей вращения, негоризонтальность основания из-за просадки фундамента), инструментальные погрешности (систематические ошибки измерения углов поворота) номинально высокоточного стенда с одновременным решением и задачи калибровки, и задачи функциональной диагностики стенда. Это обстоятельство дополняет традиционную постановку задачи калибровки. Однако она становится многопараметрической. При высоких размерностях выбор плана экспериментов не очевиден. Учет погрешностей высокоточных стендов – относительно новое направление в калибровке; при этом вопрос о минимизации суммарного числа угловых положений стенда в публикациях, насколько авторам известно, математически четко не исследовался.

В [16] описана инженерная задача калибровки с учетом погрешностей номинально высокоточного стенда и при помощи анализа соответствующей вариационной задачи для каждого оцениваемого параметра найдены некоторые оптимальные угловые положения стенда. Суммарное количество положений стенда при этом равнялось 15 – числу неизвестных параметров. Проведение каждого калибровочного эксперимента является технологически сложной процедурой, поэтому весьма желательно сократить число экспериментов. В данной статье рассмотрен вопрос о минимизации общего числа положений стенда при оценке всех параметров. При помощи построения соответствующей двойственной задачи показано, что суммарное число угловых положений стенда можно сократить до 10 (но не менее). На первый взгляд, такой вывод может показаться парадоксальным: ведь по 10 измерениям нельзя определить 15 параметров. Дело в том что при каждом положении стенда имеются три измерения, и поэтому суммарное число измерений равно 30.

2. Постановка задачи оценивания

Опишем кратко двухстепенной стенд [16]. Его конкретные реализации могут быть различными, но математическая схема одна и та же. Примером может служить стенд фирмы "Acutronic" [32]. Основание стенда неподвижно относительно Земли. Внешняя ось стенда из-за неточности установки основания отклонена от горизонтальной плоскости на малый угол κ. Внешняя рама стенда может поворачиваться относительно основания вокруг внешней оси на угол α_{tr}; внутренняя рама может поворачиваться относительно внешней рамы вокруг внутренней оси на угол β_{tr}. Углы поворота рам измеряются на фоне помех:

$$\alpha = \alpha_{tr} + \Delta\alpha + \Delta\alpha_{fl}, \quad \beta = \beta_{tr} + \Delta\beta + \Delta\beta_{fl},$$

где α, β – результаты измерений, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ – неизвестные одинаковые для всех измерений константы, $\Delta\alpha_{fl}$, $\Delta\beta_{fl}$ – неизвестные непараметрические (флуктуационные) составляющие, разные для разных измерений углов. Так как стенд предполагается высокоточным, то составляющими $\Delta\alpha_{fl}$, $\Delta\beta_{fl}$ всюду в дальнейшем будем пренебрегать. Это обстоятельство отличает высокоточный стенд от грубого стенда, при использовании которого нельзя пренебрегать величинами этого типа.

При $\alpha_{tr} = 0$ внутренняя ось направлена (почти) по географической вертикали; отклонение внутренней оси от вертикальной плоскости, образованной внешней осью и географической вертикалью, вследствие негоризонтальности основания обозначается малым углом α^*. Указанные оси пересекаются в точке M^b и могут не быть в точности ортогональны; малый угол их неортогональности обозначим через ϵ. С внутренней рамой жестко свяжем систему координат $M^b j$ следующим образом. Ось $M^b j_3$ направлена по внутренней оси. Ось $M^b j_1$ при $\beta_{tr} = 0$ лежит в плоскости, образованной внешней и внутренней осями, ортогональна $M^b j_3$ и близка к внешней оси. Ось $M^b j_2$ образует с $M^b j_1$ и $M^b j_3$ правый ортогональный трехгранник.

С блоком ньютонометров свяжем правый ортогональный трехгранник Mz, по осям которого в идеале должны располагаться оси чувствительности ньютонометров

тонометров (точка M является центром блока). Этот трехгранник называется приборным. Блок ньютонометров устанавливается на планшайбу, жестко прикрепленную к внутренней раме так, чтобы оси Mz как можно точнее были направлены по осям трехгранника $M^b j$. Погрешность установки Mz относительно $M^b j$ характеризуется неизвестным вектором малого поворота $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^\mathsf{T}$. Неточность в знании ускорения силы тяжести в точке проведения испытаний обозначим через Δg.

Пусть $\langle f'_z \rangle$ – известные осредненные показания блока ньютонометров в некотором неподвижном относительно Земли угловом положении, α, β – результат измерения углов поворота внешней и внутренней рам стенда, $\tilde{f}_z(\alpha, \beta)$ – предсказанные по непосредственному измерению углов поворота рам стенда показания блока (точно вычисляемые). Тогда измерения $z(\alpha, \beta)$ для соответствующей задачи оценивания формируются как нормированная разность сигналов $\langle f'_z \rangle$ и $\tilde{f}_z(\alpha, \beta)$ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
z(\alpha, \beta) &= g^{-1} \left\{ \langle f'_z \rangle - \tilde{f}_z(\alpha, \beta) \right\} = \\
&= g^{-1} \Big\{ (E + \Gamma)\left(-g_z(\alpha, \beta, q_b)\right) + \Delta f^0 - \left(-\tilde{g}_z(\alpha, \beta)\right) \Big\} + \varrho(\alpha, \beta),
\end{aligned} \tag{1}
$$

где (см. [10, 16]) g – модельное значение ускорения силы тяжести, $E \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ – единичная матрица, Γ – матрица погрешностей блока (характеризуемая ошибками масштабных коэффициентов и несоосностью ньютонометров), Δf^0 – систематические смещения показаний блока, $g_z(\alpha, \beta, q_b)$ – истинное значение вектора ускорения силы тяжести в проекциях на оси приборного трехгранника Mz, $q_b = (\kappa, \epsilon, \Delta\alpha, \Delta\beta, \alpha^*, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \Delta g/g)^\mathsf{T}$ – вектор параметров погрешностей стенда, $\tilde{g}_z(\alpha, \beta)$ – точно вычисляемый по измерениям углов прогнозируемый вектор ускорения силы тяжести в проекциях на оси приборного трехгранника Mz, $\varrho(\alpha, \beta)$ – флуктуационная составляющая ошибок измерений. Определение величин Γ и Δf^0 составляет цель калибровки.

Линеаризуя невязки (1) относительно параметров погрешностей стенда и блока, можно получить, что компоненты невязки

$$
\overset{(p)}{z}(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^1, \quad p = 1, 2, 3,
$$

связаны с неизвестными оцениваемыми параметрами

$$
(q_1, \ldots, q_{15})^\mathsf{T} = q \in \mathbb{R}^{15},
$$

представляющими собой физически содержательные линейные комбинации погрешностей параметров блока и неточностей стенда, следующими соотношениями:

$$
\overset{(p)}{z}(\alpha, \beta) = \overset{(p)}{H}{}^\mathsf{T}(\alpha, \beta)\, q + \overset{(p)}{\varrho}(\alpha, \beta), \quad p = 1, 2, 3, \tag{2}
$$

где известные векторы $\overset{(p)}{H}(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^{15}$ определяются формулами

$$\overset{(1)}{H}(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix} -\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta \\ -\cos\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overset{(2)}{H}(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix} \sin\beta \\ -\cos\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overset{(3)}{H}(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

наблюдаемые комбинации параметров имеют вид:

$$\begin{array}{lll} q_1=\kappa, & q_2=\Delta\alpha+\alpha^*, & q_3=\epsilon, \\ q_4=\Gamma_{13}-\theta_2, & q_5=\Gamma_{11}-\dfrac{\Delta g}{g}, & q_6=\Gamma_{12}-\Delta\beta+\theta_3, \\ q_7=\dfrac{\Delta f_1^0}{g}, & q_8=\Gamma_{23}+\theta_1, & q_9=\Gamma_{21}+\Delta\beta-\theta_3, \\ q_{10}=\Gamma_{22}-\dfrac{\Delta g}{g}, & q_{11}=\dfrac{\Delta f_2^0}{g}, & q_{12}=\Gamma_{31}+\theta_2, \\ q_{13}=\Gamma_{32}-\theta_1, & q_{14}=\Gamma_{33}-\dfrac{\Delta g}{g}, & q_{15}=\dfrac{\Delta f_3^0}{g}, \end{array} \tag{4}$$

а $\overset{(p)}{\varrho}(\alpha,\beta)$ – неизвестные ошибки измерений (также безразмерные), которые могут принимать произвольные значения, но при этом ограничены по абсолютной величине известной константой σ:

$$|\overset{(p)}{\varrho}(\alpha,\beta)| \leqslant \sigma, \quad p=1,2,3. \tag{5}$$

Будем считать, что стенд можно поставить во все допустимые положения, т.е. углы α и β могут принимать любые значения из отрезка $[0,2\pi]$. Таким образом, соотношения (2)–(5) описывают всевозможные показания блока ньютонометров при континууме его угловых положений. Требуется по всем измерениям $\{\overset{(p)}{z}(\alpha,\beta)\}$ определить все компоненты вектора параметров q.

3. Метод гарантирующего оценивания

Опишем кратко метод гарантирующего оценивания в априорной постановке [1–8] в форме, применимой для решения задачи калибровки. Рассмотрим три группы измерений (2), где известные непрерывные по (α,β) векторы

$\overset{(p)}{H}(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^m$, $m = 15$, определяются формулами (3), а помехи $\overset{(p)}{\varrho}(\alpha,\beta)$ из (5) являются всюду определенными на $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ интегрируемыми по Лебегу функциями.

Пусть $a \in \mathbb{R}^m$ – заданный вектор. В рассматриваемом случае $a = e^{(\nu)}$, где $e^{(\nu)}$ – один из единичных координатных ортов из $\mathbb{R}^m$ с единицей на ν-м месте. Рассмотрим линейные оцениватели для $l = a^{\mathsf{T}} q$ вида

$$\tilde{l} = \sum_{p=1}^{3} \left\{ \int \overset{(p)}{\Phi}_0(\alpha,\beta) \overset{(p)}{z}(\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta + \sum_{s=1}^{M_p} \overset{(p)}{\Phi}_s \overset{(p)}{z}\left(\overset{(p)}{\alpha}_s, \overset{(p)}{\beta}_s \right) \right\}, \tag{6}$$

где $\overset{(p)}{\Phi}_0(\alpha,\beta)$ – некоторые весовые функции, интегрируемые по Лебегу, а $\overset{(p)}{\Phi}_s$, $\overset{(p)}{\alpha}_s$, $\overset{(p)}{\beta}_s$, $s = 1, \ldots, M_p$, – некоторые числа и значения углов из $[0, 2\pi]$. В отличие от широко распространенной формы оценивателя этот оцениватель содержит не только интегральный член, но и слагаемые, зависящие от отдельных значений измерений в некоторых точках.

Для сокращения записи будем условно писать, что

$$\tilde{l} = \sum_{p=1}^{3} \left\{ \int \overset{(p)}{\Phi}(\alpha,\beta) \overset{(p)}{z}(\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta \right\},$$

$$\overset{(p)}{\Phi}(\alpha,\beta) = \overset{(p)}{\Phi}_0(\alpha,\beta) + \sum_{s=1}^{M_p} \overset{(p)}{\Phi}_s\, \delta\left((\alpha,\beta) - \left(\overset{(p)}{\alpha}_s, \overset{(p)}{\beta}_s \right) \right),$$

где $\delta((\alpha,\beta) - (\alpha_s, \beta_s))$ – дельта-функция Дирака:

$$\int f(\alpha,\beta)\delta((\alpha,\beta) - (\alpha_s,\beta_s))d\alpha\, d\beta = f(\alpha_s,\beta_s).$$

Величина

$$\sup_{q\in\mathbb{R}^m,\, |\varrho(\alpha,\beta)|\leqslant\sigma} |\tilde{l} - l|$$

называется гарантированной ошибкой оценки; здесь и далее укороченная запись $|\varrho(\alpha,\beta)| \leqslant \sigma$ означает выполнение условия (5).

При выбранном оценивателе это максимальное значение ошибки оценки при всевозможных значениях неопределенных факторов. Будем искать весовые коэффициенты $\overset{(p)}{\Phi}(\alpha,\beta)$, минимизирующие гарантированную ошибку оценки, т.е. получаемые из решения следующей минимаксной задачи:

$$\inf_{\Phi(\alpha,\beta)} \sup_{q\in\mathbb{R}^m,\, |\varrho(\alpha,\beta)|\leqslant\sigma} |\tilde{l} - l|.$$

Такая задача называется задачей оптимального гарантирующего оценивания. Таким образом, для решения задачи калибровки и диагностики стенда нужно решить m отдельных задач. Интересно отметить, что привлечение нелинейных оценивателей в дополнение к линейным оценивателям вида (6) не приводит к уменьшению гарантированной ошибки оценки [8]. Другими словами, можно ограничиться линейными оценивателями.

Явно вычисляя верхнюю грань в формуле предыдущего абзаца, можно показать, что эта задача сводится к вариационной задаче вида

$$\inf_{\Phi(\alpha,\beta)} \sigma \sum_{p=1}^{3} \int |\overset{(p)}{\Phi}(\alpha,\beta)|\, d\alpha\, d\beta \tag{7}$$

при ограничениях

$$\sum_{p=1}^{3} \int \overset{(p)}{H}(\alpha,\beta)\, \overset{(p)}{\Phi}(\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta = a. \tag{8}$$

Величина функционала (7) определяет гарантированную ошибку оценки. Условия (8) называются условиями несмещенности, так как при их выполнении в отсутствие ошибок измерений оценка $\tilde{l}$ совпадает с l. Поскольку константа σ входит только множителем перед функционалом, то в дальнейшем при анализе (7), (8) будем считать $\sigma = 1$.

Теорема 1. *Если векторы* $\overset{(p)}{H}(\alpha,\beta)$ *непрерывны на* $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$, *то решение задачи* (7), (8) *существует и по крайней мере одно решение* $\{\overset{(p)}{\Phi}{}^0(\alpha,\beta)\}_{p=1}^3$ *является импульсной функцией с не более чем* m *импульсами:*

$$\overset{(p)}{\Phi}{}^0(\alpha,\beta) = \sum_{s=1}^{m_p} \overset{(p)}{\Phi}{}^0_s \delta\left((\alpha,\beta) - \left(\overset{(p)}{\alpha}{}^0_s, \overset{(p)}{\beta}{}^0_s\right)\right), \quad p=1,2,3, \quad \sum_{p=1}^{3} m_p \leqslant m.$$

Именно это обстоятельство и требует вводить импульсные оцениватели в число допустимых.

3.1. Двойственная задача

Соответствующая задаче (7), (8) двойственная задача имеет вид [7, 10]

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}^m} a^{\mathsf{T}}\lambda \tag{9}$$

при ограничениях

$$|\overset{(p)}{H}{}^{\mathsf{T}}(\alpha,\beta)\lambda| \leqslant 1, \quad (\alpha,\beta)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi], \quad p=1,2,3. \tag{10}$$

При этом исходная проблема (7), (8) называется прямой. Двойственная задача полезна, например, следующим обстоятельством.

Теорема 2. Пусть λ^0 – решение задачи (9), (10). *Оптимальный оцениватель $\overset{(p)}{\Phi}{}^0(\alpha,\beta)$ отличен от нуля лишь в тех точках (α,β), для которых $|\overset{(p)}{H}{}^{\mathsf{T}}(\alpha,\beta)\lambda^0|=1$.*

Еще удобнее для анализа исходной вариационной проблемы (7), (8) вместо двойственной задачи (9), (10) рассматривать эквивалентную ей задачу о нахождении так называемого обобщенного чебышевского полинома.

При оценивании координаты q_ν обобщенным полиномом относительно переменных (α,β) с коэффициентами y_s называется тройка обобщенных полиномов

$$\overset{(p)}{H}_\nu(\alpha,\beta)+\sum_{s\in\{1,\dots,\nu-1,\nu+1,\dots,m\}} y_s\overset{(p)}{H}_s(\alpha,\beta),\quad p=1,2,3. \tag{11}$$

Задача о нахождении обобщенного чебышевского полинома состоит в определении такого обобщенного полинома с коэффициентами y_s^0, который имеет наименьшее уклонение от нуля, т.е. является решением задачи вида

$$L_\nu=\min_{y_1,\dots,y_{\nu-1},y_{\nu+1},\dots,y_m}\ \max_{p=1,2,3}\ \max_{(\alpha,\beta)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]}\left|\overset{(p)}{H}_\nu(\alpha,\beta)+\right.$$
$$\left.+\sum_{s\in\{1,\dots,\nu-1,\nu+1,\dots,m\}} y_s\overset{(p)}{H}_s(\alpha,\beta)\right|. \tag{12}$$

Обобщенный чебышевский полином имеет важное свойство.

Теорема 3. Оптимальный оцениватель $\overset{(p)}{\Phi}{}^0(\alpha,\beta)$ отличен от нуля лишь в тех точках (α,β), для которых компоненты обобщенного чебышевского полинома принимают значение $\pm L_\nu$. При этом величина L_ν^{-1} равна оптимальному значению исходной вариационной задачи (7), (8).

Таким образом, если найти обобщенный чебышевский полином и определить точки $(\overset{(p)}{\alpha}{}^0_s,\overset{(p)}{\beta}{}^0_s)$, в которых его компоненты для $p=1,2,3$ достигают значения $\pm L_\nu$, то оптимальный оцениватель можно найти из условий несмещенности (8), записанных только для точек $(\overset{(p)}{\alpha}{}^0_s,\overset{(p)}{\beta}{}^0_s)$.

Теорема 4. Пусть для оценивателя $\overset{(p)}{\Phi}(\alpha,\beta)$, который удовлетворяет условиям несмещенности (8), *и для коэффициентов $\{y_s\}$, $s=1,\dots,\nu-1,\nu+1,\dots,m$, значение функционала* (7) *равно $L_\nu^{-1}(y)$, где $L_\nu(y)$ есть уклонение от нуля обобщенного полинома* (11). *Тогда $\overset{(p)}{\Phi}(\alpha,\beta)$ есть решение прямой задачи* (7), (8), *а $\{y_s\}$ – решение задачи* (12).

Теорема 1 показывает, что решение задачи оптимального гарантирующего оценивания сосредоточено в не более чем m точках, определяющих угловые положения стенда. Следовательно, при применении гарантирующего подхода заодно решается проблема выбора оптимального плана измерений. Это принципиально важно для задачи калибровки, так как *из решения задачи гарантирующего оценивания сразу следует план калибровки.*

Теорема 3 позволяет предложить конструктивный алгоритм решения задачи оптимального гарантирующего оценивания. Нужно: а) найти обобщенный чебышевский полином и определить точки $(\overset{(p)}{\alpha}{}^0_s, \overset{(p)}{\beta}{}^0_s)$; б) по этим точкам из условий несмещенности (8) определить соответствующие весовые коэффициенты.

Теорема 4 также предоставляет способ решения задачи (7), (8). В качестве гипотезы допустим, что набор $\{y_s\}$, $s = 1, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, \ldots, m$, доставляет решение задачи (12). Тогда в соответствии с теоремой 3 точки, в которых обобщенный полином достигает наибольшего уклонения (со знаком $\pm$), есть точки, в которых оцениватель отличен от нуля. При этом соответствующие весовые коэффициенты определяются из условий несмещенности (если они совместны). Если же значение функционала прямой задачи (7) на выбранном оценивателе равно $L_\nu^{-1}(y)$, то получены решения для обеих задач (7), (8) и (12).

Доказательства теорем 1–3 основаны на теории двойственности выпуклых вариационных задач [33–35] и аналогичны доказательствам схожих теорем в [7, 10]. Главным здесь является компактность области интегрирования (отрезок и сфера в [7, 10] и квадрат в (7), (8)), а отличия состоят в относительно громоздких, но технических деталях. Доказательство теоремы 4 непосредственно следует из общих результатов теории двойственности [33–35].

4. Нахождение оптимальных решений

Найдем аналитическое решение задач (7), (8) при $a = e^{(\nu)}$, $\nu = 1, \ldots, m$; $m = 15$. Будет показано, что минимальное общее число экспериментов равно 10.

4.1. Оценивание q_3

Начнем анализ с третьей компоненты q_3: $a = e^{(3)}$. Этот случай относительно прост для исследования и, к тому же, к нему сводится исследование многих других компонент вектора q. Решим эту задачу при помощи теоремы 4 так, как это указано в конце раздела 3. Предположим, что соответствующий обобщенный чебышевский полином имеет нулевые коэффициенты y_1, y_2, $y_4, \ldots, y_m$, т.е. он определяется тройкой функций $\overset{(p)}{H}_3(\alpha, \beta)$, $p = 1, 2, 3$, и, следовательно, $L_3(0) = 1$. Согласно теореме 3 оптимальными положениями могут быть только те, в которых векторы $\overset{(p)}{H}_3(\alpha, \beta)$ принимают максимальные по абсолютной величине значения. В данном случае это коэффициенты $(-\cos\alpha\cos\beta)$ и $\cos\alpha\sin\beta$. Тогда ясно, что для первой группы измерений $(p = 1)$ нужно рассматривать только положения $(0, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 0)$, (π, π), а для второй группы $(p = 2)$ — $(0, \frac{\pi}{2})$, $(0, \frac{3\pi}{2})$, $(\pi, \frac{\pi}{2})$, $(\pi, \frac{3\pi}{2})$.

Соответствующая система уравнений несмещенности примет вид

$$\overset{(1)}{H}(0,0)\overset{(1)}{\Phi}_1+\overset{(1)}{H}(0,\pi)\overset{(1)}{\Phi}_2+\overset{(1)}{H}(\pi,0)\overset{(1)}{\Phi}_3+\overset{(1)}{H}(\pi,\pi)\overset{(1)}{\Phi}_4+ \tag{13}$$
$$+\overset{(2)}{H}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\overset{(2)}{\Phi}_1+\overset{(2)}{H}\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)\overset{(2)}{\Phi}_2+\overset{(2)}{H}\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)\overset{(2)}{\Phi}_3+\overset{(2)}{H}\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\overset{(2)}{\Phi}_4=e^{(3)}.$$

Несмотря на то что число уравнений больше числа неизвестных, система (13) совместна, и ее решение определяется двумя однопараметрическими семействами (в зависимости от ξ и η):

$$\begin{gathered}\overset{(1)}{\Phi}_1=\xi-\frac{1}{4},\quad \overset{(1)}{\Phi}_2=\frac{1}{4}-\xi,\quad \overset{(1)}{\Phi}_3=\frac{1}{4}+\eta,\quad \overset{(1)}{\Phi}_4=-\frac{1}{4}-\eta,\\ \overset{(2)}{\Phi}_1=\xi,\quad \overset{(2)}{\Phi}_2=-\xi,\quad \overset{(2)}{\Phi}_3=\eta,\quad \overset{(2)}{\Phi}_4=-\eta.\end{gathered} \tag{14}$$

Значение функционала равно

$$2\left|\xi-\frac{1}{4}\right|+2\left|\xi\right|+2\left|\eta+\frac{1}{4}\right|+2\left|\eta\right|.$$

Легко показать, что минимальное значение функционала равно $1=L_3^{-1}(0)$ и достигается при любых ξ, η из промежутков

$$0\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{4},\quad -\frac{1}{4}\leqslant\eta\leqslant 0. \tag{15}$$

По теореме 4 соотношения (14), (15) определяют все решения прямой задачи для случая $a=e^{(3)}$, а обобщенный полином имеет вид $\overset{(p)}{H}_3(\alpha,\beta)$, $p=1,2,3$.

Таким образом, возможны 9 вариантов решений, соответствующих следующим множества значений ξ, η:

$$\begin{gathered}\xi=0,\ \eta=-\frac{1}{4};\quad \xi=0,\ \eta=0;\quad \xi=\frac{1}{4},\ \eta=-\frac{1}{4};\\ \xi=\frac{1}{4},\ \eta=0;\quad \xi=0,\ -\frac{1}{4}<\eta<0;\quad 0<\xi<\frac{1}{4},\ \eta=-\frac{1}{4};\\ 0<\xi<\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4}<\eta<0;\quad 0<\xi<\frac{1}{4},\ \eta=0;\quad \xi=\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4}<\eta<0.\end{gathered}$$

Рассмотрим первые четыре варианта. Они выделяют следующие наборы угловых положений и соответствующие им оценки:

$$\underbrace{(0,0),\ (0,\pi)}_{\text{(1) группа}},\quad \underbrace{\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right),\ \left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)}_{\text{(2) группа}}; \tag{16}$$

$$\tilde{q}_3=\frac{1}{4}\left[-\overset{(1)}{z}(0,\,0)+\overset{(1)}{z}(0,\,\pi)-\overset{(2)}{z}\left(\pi,\,\frac{\pi}{2}\right)+\overset{(2)}{z}\left(\pi,\,\frac{3\pi}{2}\right)\right];$$

$$(17) \qquad \underbrace{(0,0),\ (0,\pi),\ (\pi,0),\ (\pi,\pi)}_{(1)\ \text{группа}};$$

$$\tilde{q}_3 = \frac{1}{4}\left[-\overset{(1)}{z}(0,\,0) + \overset{(1)}{z}(0,\,\pi) + \overset{(1)}{z}(\pi,\,0) - \overset{(1)}{z}(\pi,\,\pi)\right];$$

$$(18) \qquad \underbrace{\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ \left(0,\frac{3\pi}{2}\right),\ \left(\pi,\frac{\pi}{2}\right),\ \left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)}_{(2)\ \text{группа}};$$

$$\tilde{q}_3 = \frac{1}{4}\left[\overset{(2)}{z}\left(0,\,\frac{\pi}{2}\right) - \overset{(2)}{z}\left(0,\,\frac{3\pi}{2}\right) - \overset{(2)}{z}\left(\pi,\,\frac{\pi}{2}\right) + \overset{(2)}{z}\left(\pi,\,\frac{3\pi}{2}\right)\right];$$

$$(19) \qquad \underbrace{(\pi,0),\ (\pi,\pi)}_{(1)\ \text{группа}},\quad \underbrace{\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ \left(0,\frac{3\pi}{2}\right)}_{(2)\ \text{группа}};$$

$$\tilde{q}_3 = \frac{1}{4}\left[\overset{(1)}{z}(\pi,\,0) - \overset{(1)}{z}(\pi,\,\pi) + \overset{(2)}{z}\left(0,\,\frac{\pi}{2}\right) - \overset{(2)}{z}\left(0,\,\frac{3\pi}{2}\right)\right].$$

Нетрудно показать, что для остальных пяти вариантов (ξ,η) соответствующие наборы угловых положений включают в себя по крайней мере один из первых четырех. Поэтому с точки зрения минимизации суммарного количества положений их можно не рассматривать.

Итак, проведен полный анализ случая оценивания q_3. Из этого анализа следует, что один из четырех наборов положений (16), (17), (18) и (19) *обязательно* войдет в итоговый набор экспериментов.

4.2. Оценивание остальных компонент q

4.2.1. Оценивание q_1

Вновь используем теоремы 3 и 4, предполагая, что при $a = e^{(1)}$ $y_2 = \ldots$ $\ldots = y_m = 0$. Тогда обобщенный полином определяется функциями: $\overset{(p)}{H}_1(\alpha,\beta)$, $p = 1,2,3$, с соответствующими компонентами вида $(-\cos\beta)$ и $\sin\beta$. Следовательно для оценивания первой компоненты q_1 следует использовать континуум пар углов (α,β), в которых второй угол принимает четыре значения: 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ и π; при этом будут задействованы векторы из первой и второй группы: $p=1$ и $p=2$. Однако в силу континуальности исследовать возможные варианты так же, как и для q_3, здесь затруднительно. Поэтому применение теоремы 3 не дает результата.

Вместе с тем можно использовать информацию, полученную при рассмотрении q_3, именно: можно показать, что любого из наборов (16), (17), (18) или (19) достаточно для оценивания параметра q_1. Покажем это, например, для (16), а для остальных наборов это делается аналогично.

Для набора (16) условия несмещенности примут вид

$$\overset{(1)}{H}(0,0)\,\overset{(1)}{\Phi}_1 + \overset{(1)}{H}(0,\pi)\,\overset{(1)}{\Phi}_2 + \overset{(2)}{H}\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)\overset{(2)}{\Phi}_1 + \overset{(2)}{H}\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\overset{(2)}{\Phi}_2 = e^{(1)}.$$

Эта система совместна, а ее решение, очевидно, определяется равенствами $\overset{(1)}{\Phi}_1 = -\overset{(1)}{\Phi}_2 = -\frac{1}{4}$ и $\overset{(2)}{\Phi}_1 = -\overset{(2)}{\Phi}_2 = \frac{1}{4}$. При этом значение функционала равно $1 = L_1^{-1}(0)$, т.е. по теореме 4 является оптимальным. Соответствующая оптимальная оценка определяется выражением

$$\tilde{q}_1 = \frac{1}{4}\left[-\overset{(1)}{z}(0,0) + \overset{(1)}{z}(0,\pi) + \overset{(2)}{z}\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right) - \overset{(2)}{z}\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\right].$$

Итак, оценка для q_1 строится на уже найденных необходимых наборах (16), (17), (18) и (19). Поэтому новые наборы не нужны.

Те же самые рассуждения, что и для q_1, справедливы и при оценивании параметров q_2, q_4, q_7, q_8, q_{14} и q_{15}. Таким образом, все эти параметры оцениваются на одних и тех же планах, порожденных базовым параметром q_3.

4.2.2. Оценивание параметров q_5, q_6, q_9–q_{13}

Совершенно аналогично можно показать, что базовыми параметрами являются и параметры q_6, q_9, q_{12}, q_{13}, для каждого из которых выделяются по два необходимых набора угловых положений. Они получаются из тех же соображений, что и для q_3. При этом на обязательных планах q_{12} можно оценить q_5, а на обязательных планах q_{13} можно оценить q_{10} и q_{11}.

Тем самым, решены все задачи (7), (8) для $\nu = 1,\ldots,15$, опираясь при этом на теорию двойственности.

4.3. Необходимые положения стенда

Проведенное выше исследование необходимых положений стенда показывает, что для минимизации числа положений стенда достаточно ориентироваться на базовые параметры q_3, q_6, q_9, q_{12} и q_{13}. Их необходимые положения представлены в табл. 1.

При сопоставлении планов для базового параметра q_{12} с планами для базового параметра q_9 и планов для базового параметра q_{13} с планами для

Таблица 1. Необходимые положения стенда для базовых параметров

Базовые параметры	Планы экспериментов
q_3	$(0,0)$, $(0,\pi)$, $\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ или $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,0)$, (π,π) или $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ или $(\pi,0)$, (π,π), $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$
q_{12}	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ или $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$
q_{13}	$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ или $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right)$
q_6	$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right)$ или $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$
q_9	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ или $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Таблица 2. Варианты наборов с 10 суммарными положениями стенда

Группы параметров	Необходимые наборы угловых положений
$q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4$ $q_7,\ q_8,\ q_{14},\ q_{15}$	$*\ (0,0),\ (0,\pi),\ \left(\pi,\frac{\pi}{2}\right),\ \left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ или $(0,0),\ (0,\pi),\ (\pi,0),\ (\pi,\pi)$ или $\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ \left(0,\frac{3\pi}{2}\right),\ \left(\pi,\frac{\pi}{2}\right),\ \left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ или $(\pi,0),\ (\pi,\pi),\ \left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ \left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$
$q_5,\ q_9,\ q_{12}$	$*\ \left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ \left(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ \left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ или $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ \left(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ \left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ или $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ \left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),\ \left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ или $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),\ \left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),\ \left(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
$q_6,\ q_{10},\ q_{11},\ q_{13}$	$*\ \left(\frac{\pi}{2},\pi\right),\ \left(\frac{3\pi}{2},\pi\right),\ \left(\frac{\pi}{2},0\right)$ или $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),\ \left(\frac{3\pi}{2},\pi\right),\ \left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ или $\left(\frac{\pi}{2},0\right),\ \left(\frac{3\pi}{2},0\right),\ \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ или $\left(\frac{\pi}{2},0\right),\ \left(\frac{3\pi}{2},0\right),\ \left(\frac{3\pi}{2},\pi\right)$

базового параметра q_6 из табл. 1 следует, что существует много вариантов наборов необходимых экспериментов (по крайней мере 64) из 10 положений. Использовать меньше, чем 10 положений, очевидно, нельзя. Эти варианты указаны в табл. 2.

Для каждой группы параметров возьмем, например, наборы, отмеченные $*$. На этих экспериментах и построим требуемые оптимальные гарантированные оценки в порядке, соответствующем указанным выше группам (оптимальные гарантированные ошибки этих оценок равны σ):

$$\tilde{q}_1 = \frac{1}{4}\left[-\overset{(1)}{z}(0,\,0) + \overset{(1)}{z}(0,\,\pi) + \overset{(2)}{z}\left(\pi,\,\frac{\pi}{2}\right) - \overset{(2)}{z}\left(\pi,\,\frac{3\pi}{2}\right)\right],$$

$$\tilde{q}_2 = \frac{1}{4}\left[\overset{(1)}{z}\left(\pi,\,\frac{\pi}{2}\right) - \overset{(1)}{z}(\pi,\,\frac{3\pi}{2}) - \overset{(2)}{z}(0,\,0) + \overset{(2)}{z}(0,\,\pi)\right],$$

$$\tilde{q}_3 = \frac{1}{4}\left[-\overset{(1)}{z}(0,\,0) + \overset{(1)}{z}(0,\,\pi) - \overset{(2)}{z}\left(\pi,\,\frac{\pi}{2}\right) + \overset{(2)}{z}\left(\pi,\,\frac{3\pi}{2}\right)\right],$$

$$\tilde{q}_4 = \frac{1}{4}\left[\overset{(1)}{z}(0,\,0) + \overset{(1)}{z}(0,\,\pi) - \overset{(1)}{z}\left(\pi,\,\frac{\pi}{2}\right) - \overset{(1)}{z}\left(\pi,\,\frac{3\pi}{2}\right)\right],$$

$$\tilde{q}_7 = \frac{1}{4}\left[\overset{(1)}{z}(0,\,0) + \overset{(1)}{z}(0,\,\pi) + \overset{(1)}{z}\left(\pi,\,\frac{\pi}{2}\right) + \overset{(1)}{z}\left(\pi,\,\frac{3\pi}{2}\right)\right],$$

$$\tilde{q}_8 = \frac{1}{4}\left[\overset{(2)}{z}(0,\,0) + \overset{(2)}{z}(0,\,\pi) - \overset{(2)}{z}\left(\pi,\,\frac{\pi}{2}\right) - \overset{(2)}{z}\left(\pi,\,\frac{3\pi}{2}\right)\right],$$

$$\tilde{q}_{14} = \frac{1}{2}\left[\overset{(3)}{z}(0,0) - \overset{(3)}{z}\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$\tilde{q}_{15} = \frac{1}{2}\left[\overset{(3)}{z}(0,0) + \overset{(3)}{z}\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$\tilde{q}_{5} = \frac{1}{2}\left[\overset{(1)}{z}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \overset{(1)}{z}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\right],$$

$$\tilde{q}_{9} = \frac{1}{2}\left[\overset{(2)}{z}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \overset{(2)}{z}\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$\tilde{q}_{12} = \frac{1}{2}\left[\overset{(3)}{z}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \overset{(3)}{z}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\right],$$

$$\tilde{q}_{6} = \frac{1}{2}\left[-\overset{(1)}{z}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) + \overset{(1)}{z}\left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right)\right],$$

$$\tilde{q}_{10} = \frac{1}{2}\left[\overset{(2)}{z}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - \overset{(2)}{z}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)\right],$$

$$\tilde{q}_{11} = \frac{1}{2}\left[\overset{(2)}{z}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) + \overset{(2)}{z}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)\right],$$

$$\tilde{q}_{13} = \frac{1}{2}\left[\overset{(3)}{z}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - \overset{(3)}{z}\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)\right].$$

Отметим, что в дополнение к компонентам q представляют интерес оценки для перекосов осей блока [10]:

$$\Gamma_{12} + \Gamma_{21} = q_6 + q_9, \quad \Gamma_{13} + \Gamma_{31} = q_4 + q_{12} \quad \text{и} \quad \Gamma_{23} + \Gamma_{32} = q_8 + q_{13}.$$

В [16] показано, что оптимальные оценки для этих трех комбинаций имеют вид

$$(\widetilde{q_6 + q_9}) = \tilde{q}_6 + \tilde{q}_9, \quad (\widetilde{q_4 + q_{12}}) = \tilde{q}_4 + \tilde{q}_{12} \quad \text{и} \quad (\widetilde{q_8 + q_{13}}) = \tilde{q}_8 + \tilde{q}_{13}.$$

Это свойство аддитивности, привычное для оценок, полученных по методу наименьших квадратов, для метода гарантирующего оценивания в общем случае неверно.

5. Субоптимальный набор измерений

Для оценивания каждой компоненты вектора q, т.е. для $a = e^{(\nu)}$, $\nu = 1, \ldots, m$, требуется решить m отдельных задач (7), (8). Решение каждой из этих задач в соответствии с теоремой 1 определяет оптимальные угловые положения $(\overset{(p)}{\alpha}{}^0_s, \overset{(p)}{\beta}{}^0_s)$, $s = 1, \ldots, m_p$, $p = 1, 2, 3$, суммарное количество которых не превышает m. В совокупности для всех компонент q соответствующие решения из континуума $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ выделяют $S \leqslant m^2$ пар угловых положений, составляющих суммарный оптимальный план измерений.

Для дальнейших рассмотрений упростим обозначения. Оптимальным угловым положениям соответствуют оптимальные измерения. Обозначим совокупность всех оптимальных измерений через $\mathcal{Z}_0 = (z_{i_1^0}, \dots, z_{i_S^0})^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^S$, соответствующие им векторы – через $\mathcal{H}_0 = (H_{i_1^0}, \dots, H_{i_S^0})^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{m\times S}$, а помехи – через $\mathcal{P}_0 = (\varrho_{i_1^0}, \dots, \varrho_{i_S^0})^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^S$. Тогда в матричной форме совокупность оптимальных измерений можно представить в виде

$$\mathcal{Z}_0 = \mathcal{H}_0^{\mathsf{T}} q + \mathcal{P}_0.$$

Обозначим оптимальные оцениватели для q_ν, $\nu = 1, \dots, m$, через $\Psi^{(\nu)} \in \mathbb{R}^S$, т.е.

$$\tilde{q}_\nu = \Psi^{(\nu)\mathsf{T}} \mathcal{Z}_0,$$

причем в силу условий несмещенности (8)

$$\mathcal{H}_0 \Psi^{(\nu)} = e^{(\nu)}, \quad \nu = 1, \dots, m, \tag{20}$$

и каждый $\Psi^{(\nu)}$ содержит не более m отличных от нуля компонент.

Если исследователь в состоянии реализовать указанные измерения (в рассматриваемом случае безупречно установить стенд в строго оптимальные положения), то задача полностью решена. Однако установить стенд точно в заданные положения не всегда технически легко. Часто его можно установить в некоторые близкие положения. Тогда в матричной форме набор субоптимальных измерений представим в виде

$$\mathcal{Z} = \mathcal{H}^{\mathsf{T}} q + \mathcal{P}, \tag{21}$$

где $\mathcal{Z}$ – вектор, составленный их субоптимальных измерений, $\mathcal{P} = (\varrho_{i_1}, \dots, \varrho_{i_S})^{\mathsf{T}}$ – вектор помех, $\mathcal{H} = (H_{i_1}, \dots, H_{i_S})$; при этом векторы $H_{i_1}, \dots, H_{i_P}$ соответствуют углам, близким к оптимальным, и поэтому близки к оптимальным векторам $H_{i_1^0}, \dots, H_{i_P^0}$. По аналогии можно попытаться сформировать оценки, соответствующие близким планам, но с теми же оптимальными оценивателями:

$$\tilde{q}'_\nu = \Psi^{(\nu)\mathsf{T}} \mathcal{Z}. \tag{22}$$

Однако для близких планов условия несмещенности, вообще говоря, уже не выполняются:

$$\mathcal{H}\Psi^{(\nu)} \neq e^{(\nu)}, \quad \nu = 1, \dots, m.$$

Тогда, как легко показать, гарантированные ошибки оценок (22) бесконечны, и поэтому оценки (22) непригодны.

Выходом из этой ситуации является следующий прием. Введем матрицу $\mathcal{D}$ порядка $m \times S$, образованную оптимальными оценивателями для всех компонент:

$$\mathcal{D} = \left(\Psi^{(1)}, \dots, \Psi^{(m)}\right)^{\mathsf{T}}$$

и умножим на нее слева уравнения (21). Тогда получим систему m уравнений относительно m неизвестных q:

$$\mathcal{D}\mathcal{Z} = \mathcal{D}\mathcal{H}^{\mathsf{T}}q + \mathcal{D}\mathcal{P}.$$

Матрица $\mathcal{H}$ близка к $\mathcal{H}_0$, для которой выполнены условия несмещенности (20): $\mathcal{D}\mathcal{H}_0^{\mathsf{T}} = E_m$, где E_m – единичная матрица порядка m. Поэтому квадратная матрица $\mathcal{D}\mathcal{H}^{\mathsf{T}}$ близка к единичной и, следовательно, невырожденна, и оценки q_ν можно построить следующим образом:

$$\tilde{q}_\nu^* = e^{(\nu)\mathsf{T}}\tilde{q}^*, \quad \tilde{q}^* = \left(\mathcal{D}\mathcal{H}^{\mathsf{T}}\right)^{-1}\mathcal{D}\mathcal{Z}, \tag{23}$$
$$\text{т.е.}\ \ \tilde{q}_\nu^* = \tilde{\Psi}^{(\nu)\mathsf{T}}\mathcal{Z}, \quad \tilde{\Psi}^{(\nu)} = \mathcal{D}^{\mathsf{T}}\left(\left(\mathcal{D}\mathcal{H}^{\mathsf{T}}\right)^{-1}\right)^{\mathsf{T}}e^{(\nu)}.$$

При этом, очевидно, $\tilde{\Psi}^{(\nu)} \approx \Psi^{(\nu)}$.

Построенные выше оценки $\tilde{q}_\nu^*$ являются несмещенными, так как в силу (23) очевидно, что

$$\mathcal{H}\tilde{\Psi}^{(\nu)} = e^{(\nu)}, \quad \nu = 1, \ldots, m. \tag{24}$$

Вычислим гарантированные ошибки оценок q_ν, полагая, что в задаче калибровки все ошибки измерений ограничены одной величиной – единицей ($\sigma = 1$). Учитывая условия несмещенности (24) и вводя обозначения для компонент оценивателей $\tilde{\Psi}^{(\nu)} = \left(\tilde{\Psi}_1^{(\nu)}, \ldots, \tilde{\Psi}_S^{(\nu)}\right)^{\mathsf{T}}$, получим равенства:

$$\max_{q\in\mathbb{R}^m,\, \{|\varrho_{i_k}|\leqslant\sigma,\ k=1,\ldots,S\}} |\tilde{q}_\nu^* - q_\nu| = \max_{q\in\mathbb{R}^m,\, \{|\varrho_{i_k}|\leqslant\sigma,\ k=1,\ldots,S\}} \left|\tilde{\Psi}^{(\nu)\mathsf{T}}\mathcal{Z} - e^{(\nu)\mathsf{T}}q\right| =$$
$$= \max_{q\in\mathbb{R}^m,\, \{|\varrho_{i_k}|\leqslant\sigma, k=1,\ldots,S\}} \left|\left(\mathcal{H}\tilde{\Psi}^{(\nu)} - e^{(\nu)}\right)^{\mathsf{T}}q + \tilde{\Psi}^{(\nu)\mathsf{T}}\mathcal{P}\right| =$$
$$= \max_{\{|\varrho_{i_k}|\leqslant\sigma, k=1,\ldots,S\}} \left|\tilde{\Psi}^{(\nu)\mathsf{T}}\mathcal{P}\right| = \sum_{k=1}^{S}\left|\tilde{\Psi}_k^{(\nu)}\right|.$$

В силу близости $\tilde{\Psi}^{(\nu)}$ и $\Psi^{(\nu)}$ последнее выражение близко к величине $\sum_{k=1}^S |\Psi_k^{(\nu)}|$, равной оптимальному гарантированному значению ошибки оценки каждой компоненты q_ν. Таким образом, построение оценок искомых параметров по реализуемым формулам (23) приводит к почти оптимальным оценкам.

6. О необходимости учитывать погрешности стенда

Выше получены оптимальные гарантирующие оценки параметров блока ньютонометров в предположении неидеальности стенда. Возникает вопрос: если при построении алгоритма оценивания не производить его диагностику, условно полагая его идеальным, то нельзя ли получить оценки параметров блока более простым способом, исходя из модели, учитывающей только погрешности самого блока, которые и при неидеальном стенде были бы достаточно точными.

Нетрудно увидеть, что если не принимать во внимание погрешности стенда (другими словами, полагая в (2) $q_1 = q_2 = q_3 = 0$), то задача оценивания (7), (8) декомпозируется на три независимых задачи гарантирующего оценивания – отдельную для каждого ньютонометра. Среди оптимальных для упрощенной модели оценок некоторые оценки могут оказаться оптимальными и для полной системы, а какие-то существенно неоптимальными и смещенными (т.е. условия (8) будут нарушены): ошибки стенда напрямую переходят в ошибки оценок блока, увеличивая их по сравнению с оптимальными. Однако заранее, без анализа полной системы, выяснить, какая оценка является несмещенной при неидеальном стенде, а какая – смещенной, невозможно. Поэтому при оценке погрешностей блока ньютонометров учитывать неидеальность стенда необходимо. При этом можно установить, что усложнение модели за счет учета неидеальности стенда не приводит к увеличению ошибок определения погрешностей блока.

7. Другие способы установки блока ньютонометров на планшайбу

Назовем описанное выше положение блока ньютонометров на планшайбе базовым. Возможны и другие варианты установки блока. В них оси блока ньютонометров совпадают с осями в базовом положении, но при других нумерации и направлении осей. Это соответствует ортогональной матрице Q, состоящей из нулей и единиц (со знаком плюс или минус); определитель матрицы Q равен единице. Далее будет показано, что новые результирующие соотношения не нужно выводить заново с самого начала, а можно получить их, немного модифицируя полученные выше базовые соотношения.

Опишем новый вариант установки блока на планшайбу, искусственно представляя, что сначала блок был установлен на планшайбу (с некоторой небольшой погрешностью) в соответствии с базовым, а потом дополнительно *точно* повернут в соответствии с матрицей Q. При этом $\chi'' = Q\,\chi',\ Q^{-1} = Q^{\mathsf{T}}$, где χ' – координаты произвольного вектора в проекциях на оси приборного трехгранника Mz, установленного в соответствии с базовым вариантом, а χ'' – координаты этого же вектора в проекциях на оси Mz в его новом положении.

Пусть $z(\alpha,\beta)$ – нормированная невязка показаний блока ньютонометров в новом положении, $\varrho(\alpha,\beta)$ – флуктуационная погрешность блока ньютонометров в новом положении. Тогда, очевидно, для нового положения блока имеет место следующее соотношение, аналогичное (1):

$$z(\alpha,\beta) = g^{-1}\left\{\langle f'\rangle - \tilde f(\alpha,\beta)\right\} + \varrho(\alpha,\beta) = g^{-1}\left\{\langle f'\rangle - Q\tilde f_z(\alpha,\beta)\right\} + \varrho(\alpha,\beta) =$$
$$= g^{-1}\Big\{(E+\Gamma)\,Q\,\left(-g_z(\alpha,\beta,q_b)\right) + \Delta f^0 - Q\,\left(-\tilde g_z(\alpha,\beta)\right)\Big\} + \varrho(\alpha,\beta),$$

где: $\langle f'\rangle$ — известные осредненные показания блока в новом положении; $\tilde f(\alpha,\beta)$ — предсказанные по измерениям углов α,β показания блока в новом положении; $\tilde{f}_z(\alpha,\beta)$ — предсказанные показания блока в базовом положении; Γ, Δf_z^0 — параметры погрешностей блока; $g_z(\alpha,\beta,q_b)$ – как и ранее, истинное значение вектора ускорения силы тяжести в проекциях на оси приборного трехгранника Mz в базовом положении; $q_b = (\kappa,\epsilon,\Delta\alpha,\Delta\beta,\alpha^*,\theta_1,\theta_2,\theta_3,\Delta g/g)^{\mathsf{T}}$— как и ранее, параметры погрешностей стенда; $\tilde{g}_z(\alpha,\beta)$ — как и ранее, точно вычисляемый по измерениям углов прогнозируемый вектор ускорения силы тяжести в проекциях на оси приборного трехгранника Mz в базовом положении.

Тогда, очевидно,

$$Q^{-1}z(\alpha,\beta) = g^{-1}\left\{Q^{-1}\langle f'\rangle - \tilde{f}_z(\alpha,\beta)\right\} + Q^{-1}\varrho(\alpha,\beta) =$$

$$= g^{-1}\{(E+Q^{-1}\Gamma Q)(-g_z(\alpha,\beta,q_b)) + Q^{-1}\Delta f^0 - (-\tilde{g}_z(\alpha,\beta))\} + Q^{-1}\varrho(\alpha,\beta). \tag{25}$$

Формула (25) одинакова по структуре со вторым равенством в (1) и полностью совпадает с ним при заменах:

$$z \to Q^{-1}z, \quad \Gamma \to Q^{-1}\Gamma Q, \quad \Delta f^0 \to Q^{-1}\Delta f^0, \quad \varrho \to Q^{-1}\varrho; \tag{26}$$

при этом исходные элементы меняют свое расположение соответственно Q.

Таким образом, используя известную из предыдущих рассуждений зависимость (2) итоговых показаний от погрешностей стенда и блока, получена аналогичная зависимость для нового положения блока ньютонометров. При этом в качестве удобных итоговых измерений берется величина $Q^{-1}z(\alpha,\beta)$. Тогда при помощи представленной выше методики оцениваются величины $Q^{-1}\Gamma Q$ и $Q^{-1}\Delta f^0$. Опишем это более подробно.

При новом варианте установки блока ньютонометров физически осмысленно поступить следующим образом. Сначала надо перейти от системы координат $M^b j$ к новой системе координат $M^b k$, по осям которой в идеале должен быть установлен блок ньютонометров. Матрица ориентации $M^b k$ относительно $M^b j$ определяется известной матрицей Q. Затем, в силу суммарной погрешности установки планшайбы по осям $M^b k$ и блока на планшайбу, образуется неточность в угловой ориентации приборного трехгранника Mz относительно $M^b k$. Эта неточность описывается матрицей $(E+\hat{\theta}^k)$, где $\theta^k = (\theta_1^k,\theta_2^k,\theta_3^k)^{\mathsf{T}}$ – неизвестный вектор малого поворота Mz относительно $M^b k$, а $\hat{\theta}^k$ – соответствующая ему кососимметрическая матрица.

Вначале этот переход был формализован искусственно: сначала ориентация $M^b j$ была чуть изменена при помощи неизвестного вектора малого поворота θ с неявным построением нового трехгранника $M^b j(\theta)$, а потом точным известным поворотом, определяемым матрицей Q, было получено истинное положение приборного трехгранника Mz.

Поэтому кососимметрические матрицы $\hat{\theta}^k$ и $\hat{\theta}$, соответствующие векторам малых поворотов θ^k и θ, связаны соотношением

$$Q(E+\hat{\theta}) = (E+\hat{\theta}^k)Q, \quad \hat{\theta}^k = \begin{pmatrix} 0 & \theta_3^k & -\theta_2^k \\ -\theta_3^k & 0 & \theta_1^k \\ \theta_2^k & -\theta_1^k & 0 \end{pmatrix}$$

(матрица $\hat{\theta}$ определяется аналогично), откуда

$$\hat{\theta} = Q^{-1}\hat{\theta}^k Q. \tag{27}$$

Следовательно, при новом положении блока в основных формулах (4), связывающих непосредственно оцениваемые параметры q с ошибками блока ньютонометров и стенда, надо сделать замены (26), (27).

Тогда с учетом формул (4) нетрудно получить следующие соотношения:

$$\kappa = q_1, \quad \Delta\alpha + \alpha^* = q_2, \quad \epsilon = q_3, \quad \begin{pmatrix} \Delta f_1^0 \\ \Delta f_2^0 \\ \Delta f_3^0 \end{pmatrix} = g\,Q \begin{pmatrix} q_7 \\ q_{11} \\ q_{15} \end{pmatrix}, \tag{28}$$

$$\begin{gathered} \left(\Gamma + \hat{\theta}^k\right) = Q \begin{pmatrix} q_5 & q_6 & q_4 \\ q_9 & q_{10} & q_8 \\ q_{12} & q_{13} & q_{14} \end{pmatrix} Q^{-1} + E\frac{\Delta g}{g} - QNQ^{-1}\Delta\beta, \\ N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{29}$$

Формулы (28) и (29) являются основой для построения оценок погрешностей блока ньютонометров и ошибок стенда при небазовом положении блока. Обычно принимается одно из стандартных соглашений относительно Γ: считается, что матрица Γ является либо нижнетреугольной, либо симметричной. Кроме того, элементы $E\frac{\Delta g}{g}$ много меньше диагональных элементов Γ, а два ненулевых, внедиагональных элемента $QNQ^{-1}\Delta\beta$ много меньше соответствующих элементов $\hat{\theta}^k$; поэтому ими можно пренебречь. Тогда, подставляя в (28), (29) вместо компонент q их оценки, найденные при помощи базового алгоритма, подробно описанного выше, легко построить оценки для погрешностей стенда κ, $\Delta\alpha + \alpha^*$, ϵ, систематических смещений Δf_1^0, Δf_2^0, Δf_3^0 и элементов матрицы $\Gamma + \hat{\theta}^k$. Используя стандартные соглашения относительно Γ и кососимметричность $\hat{\theta}^k$, по оценке $\Gamma + \hat{\theta}^k$ легко однозначно оценить элементы Γ и величины θ_1^k, θ_2^k и θ_3^k.

8. Заключение

В статье подробно описано применение метода гарантирующего оценивания для получения минимального числа угловых положений при калибровке блока ньютонометров на номинально высокоточном стенде. Показано, что минимальное число положений стенда равно 10. Получен итоговый минимальный план калибровки, и построены оптимальные гарантирующие оценки параметров. Исследован случай неточной реализации оптимальных угловых положений. Приведены формулы пересчета при общем положении блока ньютонометров на планшайбе. Применение предложенного подхода к реальной задаче калибровки с диагностикой стенда показало высокую эффективность метода гарантирующего оценивания. Этот метод может быть использован для решения многих задач оценивания, когда число измерений должно быть минимизировано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лидов М.Л.* К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов // Космич. исследования. 1964. Т. 2. № 5. С. 713–715.
2. *Красовский Н.Н.* К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28. № 1. С. 3–14.
3. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
4. *Лидов М.Л.* Минимаксные методы оценивания. М.: Препринт № 71. Ин-т прикл. мат. им. М.В. Келдыша РАН, 2010.
5. *Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е.* Определение и коррекция движения. М.: Наука, 1980.
6. *Белоусов Л.Ю.* Оценивание параметров движения космических аппаратов. М.: Физматлит, 2002.
7. *Матасов А.И.* Метод гарантирующего оценивания. М.: Изд-во МГУ, 2009.
8. *Matasov A.I.* Estimators for Uncertain Dynamic Systems. Dordrecht–Boston–London: Springer Science+Business Media, B.V., 2013.
9. *Бобрик Г.И., Матасов А.И.* Оптимальное гарантирующее оценивание параметров блока акселерометров // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1993. № 5. С. 8–14.
10. *Акимов П.А., Деревянкин А.В., Матасов А.И.* Гарантирующее оценивание и l_1-аппроксимация в задачах оценивания параметров БИНС при стендовых испытаниях. М.: Изд-во МГУ, 2012.
11. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976.
12. *Голован А.А., Парусников Н.А.* Математические основы навигационных систем. Ч. I. М.: МАКС Пресс, 2011.
13. *Болотин Ю.В., Голиков В.П., Ларионов С.В., Требухов А.В.* Алгоритм калибровки платформенной инерциальной навигационной системы // Гироскопия и навигация. 2008. № 3. С. 13–27.
14. *Вавилова Н.Б., Парусников Н.А., Сазонов И.Ю.* Калибровка бескарданных навигационных систем при помощи грубых одностепенных стендов / Современные проблемы математики и механики. Прикладные исследования. М.: Изд-во мех.-мат. факультета МГУ, 2009. Т. 1. С. 212–223.
15. *Веремеенко К.К., Галай И.А.* Разработка алгоритма калибровки инерциальной навигационной системы на двухосном испытательном стенде // Электрон. журн. “Тр. МАИ”. 2013. № 63.
16. *Голован А.А., Матасов А.И.* Гарантирующий подход для определения оптимального плана калибровки // Фундамент. и прикл. мат. 2018. Т. 22. № 2. С. 133–145.
17. *Гусинский В.З., Лесючевский В.М., Литманович Ю.А., Столбов А.А.* Алгоритм калибровки трехосного блока ньютонометров, предназначенного для использования в БИНС // Гироскопия и навигация. 2000. № 4 (31). С. 86.

18. *Деревянкин А.В., Матасов А.И.* Формализация последовательной схемы калибровки бесплатформенных инерциальных навигационных систем // АиТ. 2018. № 1. С. 66–83.

Derevyankin A.V., Matasov A.I. Formalizing a Sequential Calibration Scheme for a Strapdown Inertial Navigation System // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 1. P. 52–66.

19. *Драницына Е.В.* Калибровка измерительного модуля по навигационному решению БИНС: выбор плана движений стенда / Сб. матер. XXIV Санкт-Петербургская междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ГНЦ РФ АО Концерн "ЦНИИ Электроприбор", 2017. С. 235–240.

20. *Егоров Ю.Г., Попов Е.А.* Исследование минимально избыточных программ калибровки триады акселерометров // Авиакосмическое приборостроение. 2016. № 6. С. 3–8.

21. *Емельянцев Г.И., Степанов А.П.* Интегрированные инерциально-спутниковые системы ориентации и навигации. СПб.: ГНЦ РФ АО Концерн "ЦНИИ Электроприбор", 2016.

22. *Ермаков В.С., Дунаев Д.А., Широков А.А. и др.* Калибровка бесплатформенных инерциальных систем навигации и ориентации // Аэрокосмич. техника. Вестн. ПГТУ. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2004. № 18. С. 25–30.

23. *Измайлов Е.А., Лепе С.Н., Молчанов А.В., Поликовский Е.Ф.* Скалярный способ калибровки и балансировки бесплатформенных инерциальных навигационных систем / Сб. матер. Юбилейной XV СПб. междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ГНЦ РФ "ЦНИИ Электроприбор", 2008. С. 145–154.

24. *Сазонов И.Ю., Шаймарданов И.Х.* Калибровка бесплатформенной инерциальной навигационной системы на микромеханических датчиках ньютонометров и гироскопов / Вопросы оборонной техники. Науч.-техн. сб. Сер. 9 "Специальные системы управления, следящие приводы и их элементы". М.: Информтехника, 2010. № 3. С. 73–82.

25. *Cai Q., Yang G., Song N., Lin Y.* Systematic Calibration for Ultra-High Accuracy Inertial Measurement Unit // Sensors. 2016. 16 (940).

26. *Moon-Sik Kim, Si-Bok Yu, Kwang-Soo Lee.* Development of High-Precision Calibration Method for Inertial Measurement Unit // Int. J. Precision Engineer. Manufactur. 2014. V. 15. No. 3. P. 567–575.

27. *Panahandeh G., Skog I., Jansson M.* Calibration of the Accelerometer Triad of an Inertial Measurement Unit, Maximum Likelihood Estimation and Cramer-Rao bound // Proc. Int. Conf. on Indoor Positioning and Indoor Navigation. Zurich, Switzerland, 2010.

28. *Paternain S., Tailanian M., Canetti R.* Calibration of an Inertial Measurement Unit // Proc. 16th Int. Conf. on Advanced Robotics, 2013.

29. *Secer G., Barshan B.* Improvements in Deterministic Error Modeling and Calibration of Inertial Sensors and Magnitometers // Sensors Actuat. A. 2016. (247). P. 522–538.

30. *Syed Z.F., Aggarwal P., Goodall C., Niu X., El-Sheimy N.* A New Multi-Position Calibration Method for MEMS Inertial Navigation Systems // Meas. Sci. Technol. 2007. No. 18. P. 1897–1907.

31. *Xu Y., Wang Y., Su Y., Zhu X.* Research on the Calibration Method for Micro Inertial Measurement Unit for Engineering Applications // IEEE Sens. J. 2016. ID 9108197.

32. Ресурс www.acutronic.com/ru/produkcija/2-osevye-stendy.html.

33. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2007.

34. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: Кн. дом "Либроком", 2011.

35. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.Ф. Караваем.

Поступила в редакцию 16.01.2019

После доработки 09.10.2019

Принята к публикации 28.11.2019